**Лекция 3.**

## § 4. Методы определения вероятностей

### 1. Классическое определение вероятностей

Каждый из возможных результатов опыта назовем элементарным исходом. Обозначим их $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Эти исходы образуют полную группу несовместных событий, все исходы равновозможны.

Те элементарные исходы, в которых наступает событие $A$, называют благоприятствующими событию $A$.

**Определение.** Отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу элементарных исходов называется вероятностью события $A$ и обозначается $P(A)$.

Таким образом, $P(A) = \dfrac{m}{n}$,

где $m$ - число исходов, благоприятствующих событию $A$,
$n$ - число всех возможных элементарных исходов.

Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу событий.

Основные свойства вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна единице. Каждый элементарный исход опыта в этом случае благоприятствует наступлению события $A$: $P(A) = \dfrac{n}{n} = 1$.
2) Вероятность невозможного события равна нулю. Ни один из элементарных исходов опыта не благоприятствует наступлению события $A$: $P(A) = \dfrac{0}{n} = 0$.
3) Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей. Действительно, в этом случае $0 < m < n$, $0 < \dfrac{m}{n} < 1$, $0 < P(A) < 1$.

   Итак, вероятность любого события $0 \le P(A) \le 1$.

### 2. Статистическое определение вероятностей

Классическое определение предполагает, что число элементарных исходов опыта конечно. На практике часто встречается случай, когда число возможных исходов бесконечно. Кроме того, результат опыта невозможно представить в виде совокупности элементарных событий или трудно указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

В этих случаях используют статистическое определение вероятности: в качестве вероятности события принимают относительную частоту появления события или число, близкое к ней.

*Относительной частотой* события называют отношение числа испытаний, в которых данное событий появилось, к общему числу фактически проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где $m$ - число появлений события $A$,
$n$ - общее число испытаний.

Установлено, что если число испытаний достаточно велико, то относительная частота меняется мало. Это называют *свойством устойчивости*. Свойства вероятности сохраняются.

Для существования статистической вероятности события $A$ требуется:

1) Возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие $A$ наступает или не наступает.

2) Устойчивость относительных частот появления события $A$ в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

### 3. Геометрическое определение вероятностей

Классическое определение неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Этот недостаток можно преодолеть введением геометрической вероятности.
Пусть отрезок составляет $l$ составляет часть отрезка $L$. На большой отрезок $L$ наудачу поставлена точка. Эта точка может совпасть с любой точкой отрезка $L$, вероятность попадания точка на отрезок $l$ пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка $L$. Тогда вероятность попадания точки на отрезок $l$ определяется равенством $P = \frac{Длина\ l}{Длина\ L}$.

Аналогичное определение имеет место и для случая площадей, объемов. Пусть $\Omega$ - пространство элементарных событий, $A$ - некоторая область $n$–мерного пространства. Случайное событие – область, содержащаяся в $\Omega$. Тогда $P = \frac{mes\ A}{mes\ \Omega}$.

### 4. Аксиоматическое определение вероятностей

Пусть $\Omega$ - произвольное пространство элементарных событий. $F$ – такой класс подмножеств, который вместе с любыми двумя событиями содержит их сумму.

Произведение, разность, а также само множество $\Omega$, т.е. если $A \in F$, $B \in F$, то $A + B \in F,\ A - B \in F,\ AB \in F, \Omega \in F$.
Говорят, что $F$ является $\sigma$-алгеброй событий.
Например, $F = \{\varnothing,\ \Omega\}$ или $F = \{\varnothing,\ \Omega, A, \overline{A}\}$.
Числовая функций, определенная на совокупности наблюдаемых событий, называется вероятностью, если выполнены следующие аксиомы:

1) Каждому событию $A \in F$ ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$ (аксиома неотрицательности).
2) Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$. (аксиома нормировки)
3) Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.если $A_i A_j \neq \varnothing$.
   (аксиома сложения).

Тройку $(\Omega, F, P)$ называют вероятностным пространством. Оно служит моделью случайного эксперимента.

В системе аксиом, предложенной А.Н.Колмогоровым, неопределяемыми понятиями являются элементарные события и вероятность. Исходя из аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводятся в виде теорем.