Оценивание чистого приведённого дохода инвестиций в условиях неполной информации о величине получаемого дохода

Кирлица В. П.,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Пушкин А. А.,
Белорусский государственный университет

Инвестор, реализуя тот или иной проект, требующий значительных финансовых затрат, часто сталкивается со следующей проблемой. Как правило, для реализации инвестиционного проекта предлагается не один, а несколько проектов. Инвестору необходимо среди этих проектов выбрать наилучший, в финансовом отношении, проект. Для решения подобной проблемы в финансовой литературе [1,2] предлагается следующий подход. Вводится ряд показателей, характеризующих эффективность вложения финансовых средств, таких как чистый приведенный доход (*NPV*, net present value), внутренняя норма доходности (*IRR*, internal rate of return), окупаемость и рентабельность.

Данная статья посвящена способам оценивания одного из важнейших финансовых показателей инвестиционных проектов, к которым относится чистый приведённый доход *NPV*, определяемый по формуле [1,2]:

$$NPV=\sum_{j=1}^{m} R_j(1+i)^{-\tau_j}-\sum_{j=1}^{k} I_j(1+i)^{-t_j}, \tag{1}$$

где R_j - величина чистого дохода, получаемого в момент времени $\tau_j, \tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_m, I_j$ - инвестиционные затраты в момент времени $t_j, t_1<t_2<\ldots<t_k; i$ - годовая ставка сложных процентов, одна и та же для всех вариантов сравниваемых проектов.

Ориентируясь на величину чистого приведённого дохода, среди ряда инвестиционных проектов инвестор предпочтёт выбрать тот проект, для которого *NPV* примет наибольшее значение.

Пример 1 [1]. *Имеются два варианта инвестиционного проекта, которые характеризуются следующими потоками платежей* (*в тысячах условных единиц*):

Год / Вариант	1	2	3	4	5	6	7
A	-100	-150	50	150	200	200	
B	-200	-50	50	100	100	200	200

Для ставки сравнения 10 *сложных годовых процентов необходимо выбрать наилучший вариант инвестиций по величине NPV.*

Используя формулу (1) имеем: NPV_A = 162.22078 тыс., NPV_B = 160.34513 тыс. Следовательно вариант инвестиций *A* лучше.

В классической финансовой литературе [1,2] при вычислении *NPV* полагают, что величины инвестиций I_j и отдачи от них R_j - детерминированы и заданы. Однако в реальной инвестиционной практике это условие фактически не выполняется. Пояснить это можно так. Поскольку финансовыми средствами распоряжается инвестор, то величины инвестиционных вложений $I_j, j=\overline{1,k}$ можно считать заданными, вполне определёнными (правда с некоторой натяжкой). Однако этого нельзя сказать о величине планируемых доходов $R_j, j=\overline{1,m}$, которые инвестор планирует получить в будущем, после того как инвестиционный проект будет завершён и начнёт приносить доходы. Особенно это касается принципиально новых, не имеющих аналога, проектов.

Какой же можно найти выход из, казалось бы, тупиковой ситуации? Нужна некоторая априорная информация о планируемой величине доходов от реализации инвестиционного проекта. Без такой априорной информации инвестор находится в условиях полной неопределенности и никакого обоснованного решения он не сможет принять

В данной работе при оценке величины *NPV* того или иного инвестиционного проекта будем исходить из следующих предположений. Будем полагать, что величины отдач от инвестиций $R_j, j=1,\dots,m$ (все, либо часть из них) – случайные величины с заданными (возможно экспертным путём) либо спрогнозированными (используя статистические наблюдения для аналогичных проектов) законами распределения вероятностей. Моменты времени инвестиций и получения отдач от них заданы и детерминированы. В этом случае величина *NPV* будет также случайной, и инвестора в этой ситуации будут интересовать её среднее значение (математическое ожидание), дисперсия и вероятность попадания в заданный интервал, либо вероятность того, что один вариант будет лучше другого по величине *NPV*. Исходя из этих числовых характеристик, инвестор сможет сделать выбор в пользу того или иного варианта вложения денежных средств. Рассмотрим несколько вариантов априорной информации о величине чистых доходов $R_j, j=\overline{1,m}$.

1. Дискретное распределение. Самый простой уровень априорной информации, доступный инвестору, может состоять в том, что величины отдач от инвестиций $R_j, j=\overline{1,m}$ можно рассматривать как дискретные случайные величины. Очевидно, что в этом случае *NPV* будет также случайной, дискретной величиной. Не представляет принципиальной трудности описать ряд распределения вероятностей *NPV* и по этому ряду вычислить все числовые характеристики *NPV*.

Пример 2. *Пусть в условиях примера* 1 *для варианта А отдачи* R_5 и R_6 - *дискретные случайные величины, имеющие распределение, определяемое таблицей*:

R_6 \ R_5	200	210
180	0.08	0.20
200	0.17	0.21
205	0.14	0.20

Для варианта В величина R_7 - *дискретная случайная величина с рядом распределения вероятностей*:

R_7	180	200	220
P	0.1	0.5	0.4

Какой вариант инвестиций лучше для инвестора по величине NPV, если ставка сравнения 10%?

Вначале вычислим числовые характеристики *NPV* для варианта *A*. Вычисления показывают, что ряд распределения вероятностей для NPV_A имеет вид:

NPV_A	150.9313	157.14051	162.22078	165.04315	168.42999	171.25236
P	0.08	0.2	0.17	0.14	0.21	0.2

Используя этот ряд, получаем: $E\{NPV_A\}$=163.80695 тыс., $D\{NPV_A\}$=38.36758. Также имеем $\{NPV_A\}_{min}$ =150.9313 тыс. и это значение реализуется с вероятностью 0.08; максимальное значение $\{NPV_A\}_{max}$ = 171.25236 тыс. и оно реализуется с вероятностью 0.2. Далее, допустим, инвестора интересует вероятность попадания NPV_A в интервал [155 тыс;170 тыс.]. Вычисления показывают, что $P\{155 \le NPV_A \le 170\} = 0.72$.

Для варианта инвестиций *B* ряд распределения вероятностей таков:

NPV_B	150.08197	160.34513	170.60830
P	0.1	0.5	0.4

Используя этот ряд получаем, $E\{NPV_B\}$=163.42408 тыс., $D\{NPV_B\}$= 43.18536. Получаем также, что $\{NPV_B\}_{min}$ = 150.08197 тыс. и это значение реализуется с вероятностью 0.1; максимальное значение $\{NPV_B\}_{max}$ = 170.60830 тыс. и оно реализуется с вероятностью 0.4. Далее, $P\{155 \le NPV_B \le 170\} = 0.9$. Как видим из этих расчётов, по величине среднего значения и дисперсии *NPV* для инвестора предпочтительнее вариант *A*, но если он будет ориентироваться на вероятность попадания в заданный интервал [155;170], то ситуация меняется и для инвестора предпочтительнее будет вариант *B*.

Используя формулу полной вероятности, подсчитаем вероятность того, что $NPV_A > NPV_B$. В качестве полной группы событий возьмём события: $\{NPV_B = 150.08197\}$, $\{NPV_B = 160.34513\}$, $\{NPV_B = 170.60830\}$. Тогда, $P\{NPV_A > NPV_B\} = 0.1\cdot 1 + 0.5\cdot 0.75 + 0.4\cdot 0.2 = 0.54$.

Как видим, здесь ситуация с выбором наилучшего варианта не столь однозначна, как в примере 1, где все данные были детерминированы.

2. Абсолютно-непрерывное распределение. В этом пункте будем предполагать, что только одна, наиболее удалённая от момента подписания контракта на реализацию проекта, отдача от инвестиций R_m является случайной величиной, имеющей «трапецеидальное» распределений вероятностей на отрезке [*a*,*d*] с плотностью распределения

$$p_{R_m}(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(d+c-a-b)}, a \le x \le b, \\ \dfrac{2}{d+c-a-b}, b \le x \le c, \\ \dfrac{2(d-x)}{(d-c)(d+c-a-b)}, c \le x \le d, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a \le b \le c \le d$. Если $a = b$ и $c = d$, то (2) будет определять равномерное распределение на отрезке [*a*,*d*], которое соответствует низшему уровню априорной информации, которой располагает инвестор. Он знает только наименьшее значение *a* и наибольшее значение *d*, между которыми может варьировать R_m и полагает, что с равной вероятностью R_m может попасть в любые отрезки одинаковой длины из этого интервала.

Если $b = c$, то (2) будет описывать «треугольное» распределение, соответствующее более высокому уровню априорной информации, когда дополнительно можно гарантировать, что вероятность попадания в отрезки одинаковой длины, лежащие в окрестности точки b выше, чем в аналогичные отрезки, лежащие ближе к концам интервала $[a,d]$.

Если $a < b < c < d$, то это ещё более высокий уровень априорной информации, когда инвестор в интервале $[a,d]$ выделяет подинтервал $[b,c]$, в котором, скорее всего, будет находиться R_m. В этом случае вид плотности (2) будет представлять собой трапецию.

Введём обозначения:

$$\xi = R_m, \alpha = \sum_{j=1}^{m-1} R_j (1+i)^{-\tau_j} - \sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-t_j}, \beta = (1+i)^{-\tau_m}.$$

Тогда (1) можно представить в виде

$$NPV = \alpha + \beta\xi.$$

Теорема 1. *Если отдача от инвестиций R_m имеет «трапецеидальное» распределение (2), то NPV будет иметь также «трапецеидальное» распределение на отрезке $[a_1, d_1]$, где $a_1 = \alpha + \beta a, d_1 = \alpha + \beta d, b_1 = \alpha + \beta b, c_1 = \alpha + \beta c$.*

Доказательство. Функция распределения *NPV* равна:

$$F_{NPV}(x) = P\{NPV < x\} = P\{\xi < \frac{x-\alpha}{\beta}\} = F_{R_M}(\frac{x-\alpha}{\beta}).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$p_{NPV}(x) = p_{R_m}(\frac{x-\alpha}{\beta})\frac{1}{\beta}.$$

Теперь, если в формуле (2) вместо x подставить значение $\frac{x-\alpha}{\beta}$ и результат умножить на β^{-1}, то получим утверждение теоремы 1.

Пример 3. *Пусть в условиях примера 1 для варианта A отдача R_6 имеет «треугольное» стандартное распределение на интервале* [190,220] *(т.е. $b = c = 205$ в формуле* (2)*), а R_7 в варианте B равномерно распределена на интервале* [150;230]. *Ставка сравнения прежняя и равна* 10% *годовых. Какой вариант лучше для инвестора по показателю NPV?*

Используя теорему 1 для варианта *A* имеем: $(NPV_{\text{A}})_{\min} = a_1 = 156.57604$ тыс., $(NPV_{\text{A}})_{\max} = d_1 = 173.51025$ тыс., $E\{(NPV)_{\text{A}}\} = \frac{a_1 + d_1}{2} = 165.04315$ тыс., $D\{(NPV)_{\text{A}}\} = 11.94866$, $P\{155 \le NPV_{\text{A}} \le 170\} = 0.9827$.

Для варианта *B* аналогично, получаем: $(NPV_{\text{B}})_{\min} = 134.68723$ тыс., $(NPV_{\text{B}})_{\max} = 175.73988$ тыс., $E\{(NPV)_{\text{B}}\} = 155.21356$ тыс., $D\{(NPV)_{\text{B}}\} = 140.4433$, $P\{155 \le NPV_{\text{B}} \le 170\} = 0.365$.

Анализируя эти данные видим, что вариант *A* лучше варианта *B* по среднему значению, дисперсии *NPV* и по вероятности попадания *NPV* в заданный интервал [150;170].

Расчёты показывают, что P{$NPV_A > NPV_B$} = 0.7524. Итак, в условиях данного примера, по всем показателям вариант инвестиций *A* лучше варианта *B*.

3. Равномерное распределение двух отдач от инвестиций. В этом пункте будем полагать, что две, наиболее удалённые от момента подписания контракта, отдачи от инвестиций R_{m-1} и R_m являются независимыми равномерно распределёнными случайными величинами, соответственно, на интервалах $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$.

Введём следующие, для этого пункта обозначения:

$$\eta_1 = NPV, \alpha = \sum_{j=1}^{m-2} R_j (1+i)^{-\tau_j} - \sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-t_j}, \xi_1 = R_{m-1}, \xi_2 = R_m, \beta = (1+i)^{-\tau_{m-1}}, \gamma = (1+i)^{-\tau_m}. \quad (3)$$

Используя эти обозначения, имеем

$$NPV = \eta_1 = \alpha + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \quad (4)$$

где $\xi_1 \in [a_1, b_1], \xi_2 \in [a_2, b_2]$ - независимые равномерно распределённые случайные величины. Будем использовать также обозначения:

$n_1 = \alpha + \beta a_1 + \gamma a_2, n_2 = \alpha + \beta b_1 + \gamma b_2, m_1 = \alpha + \beta b_1 + \gamma a_2, m_2 = \alpha + \beta a_1 + \gamma b_2.$

Теорема 2. *Чистый приведённый доход* (4) *является случайно величиной имеющей «треугольное» либо «трапецеидальное» распределение на интервале* $[n_1,n_2]$, *плотность распределения которого определяется формулами*: *для* $m_1 \le m_2$

$$p_{\eta_1}(y_1) = \begin{cases} 0, y \notin [n_1, n_2], \\ \dfrac{y_1 - n_1}{\beta\gamma(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, n_1 \le y_1 \le m_1, \\ [\gamma(b_2 - a_2)]^{-1}, m_1 \le y_1 \le m_2, \\ \dfrac{\alpha + \beta b_1 + \gamma a_2 - y_1}{\beta\gamma(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, m_2 \le y_1 \le n_2, \end{cases} \quad (5)$$

для $m_2 \le m_1$

$$p_{\eta_1}(y_1) = \begin{cases} 0, y \notin [n_1, n_2], \\ \dfrac{y_1 - n_1}{\beta\gamma(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, n_1 \le y_1 \le m_1, \\ [\beta(b_1 - a_1)]^{-1}, m_1 \le y_1 \le m_2, \\ \dfrac{\alpha + \beta b_1 + \gamma a_2 - y_1}{\beta\gamma(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, m_2 \le y_1 \le n_2, \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Формула (4) является функциональным преобразованием случайных величин ξ_1, ξ_2 в η_1. Введём новую случайную величину $\eta_2 = \xi_2$. Имеем

$$\begin{cases} \eta_1 = \alpha + \beta\xi_1 + \gamma\xi_2, \\ \eta_2 = \xi_2. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношение (7) задаёт невырожденное преобразование вектора (ξ_1, ξ_2) в вектор (η_1, η_2). Используя теорию функциональных преобразований случайных величин [3], получаем:

$$p_{\eta_1}(y_1) = \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}\left(\frac{(y_1 - \gamma y_2 - \alpha)}{\beta}\right) p_{\xi_2}(y_2)dy_2 = \frac{1}{\beta(b_2 - a_2)}\int_{a_2}^{b_2} p_{\xi_1}\left(\frac{(y_1 - \gamma y_2 - \alpha)}{\beta}\right)dy_2 =$$

$$= \frac{1}{(b_2 - a_2)\gamma}\int_{p_1}^{p_2} p_{\xi_1}(s)ds,$$

где $p_1 = (y_1 - \gamma b_2 - \alpha)\beta^{-1}, p_2 = (y_1 - \gamma a_2 - \alpha)\beta^{-1}$. Интегрируя $p_{\xi_1}(s)$ по промежутку [p_1, p_2], получаем формулу (5) либо (6). Теорема (2) доказана.

Используя теорему 2, имеем:

$$(NPV)_{\min} = n_1, (NPV)_{\max} = n_2, E\{NPV\} = \alpha + \beta\frac{a_1 + b_1}{2} + \gamma\frac{a_2 + b_2}{2},$$

$$D\{NPV\} = \beta^2\frac{(b_1 - a_1)^2}{12} + \gamma^2\frac{(b_2 - a_2)}{12}, P\{N_1 \le NPV \le N_2\} = \int_{N_1}^{N_2} p_{\eta_1}(y_1)dy_1.$$

Пример 4. *Пусть в условиях примера* 1 *для варианта A отдача R_6 имеет равномерное распределение на интервале* [190;220], *а для варианта B отдача* $R_6 \in [190;230]$, а $R_7 \in [180;250]$ *и они независимые равномерно распределённые случайные величины. Необходимо сравнить варианты по величине NPV для ставке сравнения* 10% *годовых.*

Используя теорему 1 для варианта *A* получим, что $(NPV)_A$ – случайная величина, равномерно распределённая в интервале [156.57604;173.51025]. Среднее значение этой величины равно 165.04315 тыс., а дисперсия равна 23.89729. Вероятность попадания в интервал [155;170] равна 0.793, $(NPV_A)_{\min}$ = 156.57604 тыс., $(NPV_A)_{\max}$ = 173.51025 тыс.

Применим теорему 2 для расчёта числовых характеристик NPV_B. Имеем: α = -55.18128; β = 0.56447393; γ = 0.513158118, n_1 = 144.43723, n_2 = 202.93725; m_1 = 167.01494; m_2 = 180.3583; $(NPV_B)_{\min}$ = 144.43723 тыс., $(NPV_B)_{\max}$ = 202.93725 тыс., $E\{(NPV)_B\}$=173.68724 тыс., $D\{(NPV)_B$ =150.011. Вероятность попадания NPV_B в интервал [155;170] равна 0.329.

По среднему ожидаемому значению *NPV* лучше выбрать вариант *B*, однако дисперсия *NPV* по варианту *B* больше, чем по варианту *A*. По величине вероятности попадания *NPV* в фиксированный интервал предпочтительнее вариант *A*.

4. Смешанный тип распределения вероятностей отдач от инвестиций. В этом пункте будем предполагать, что две последние наиболее удалённые от начала инвестиционного процесса, отдачи от инвестиций R_m и R_{m-1} имеют смешанный тип распределения вероятностей, т.е., например, R_{m-1} имеет дискретное распределение, определяемое рядом

R_{m-1}	r_1	r_2	…	r_s
P	p_1	p_2	…	p_s

Отдача R_m имеет абсолютно-непрерывное распределение, с плотностью $p_{R_m}(x)$. Остальные параметры инвестиций детерминированы. Будем использовать обозначения (3).

Теорема 3. *В условиях данного пункта плотность распределения чистого приведённого дохода* η_1 = *NPV определяется формулой*:

$$p_{\eta_1}(x)=\sum_{j=1}^{s}p_i p_{\xi_2}(\frac{x-\alpha-\beta r_i}{\gamma})\frac{1}{\gamma}. \qquad (8)$$

Доказательство. Случайные события $B_j=\{R_{m-1}=r_j\},\ j=\overline{1,s}$ образуют полную группу событий. Используя формулу полной вероятности, вычислим функцию распределения $NPV=\eta_1$:

$$F_{\eta_1}(x)=P\{\alpha+\beta\xi_1+\gamma\xi_2<x\}=\sum_{j=1}^{s}P(B_j)P\{\alpha+\beta\xi_1+\gamma\xi_2<x\mid B_j\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}p_jP\{\alpha+\beta r_j+\gamma\xi_2<x\}=\sum_{j=1}^{s}p_jP\{\xi_2<\frac{x-\alpha-\beta r_j}{\gamma}\}=\sum_{j=1}^{s}p_jF_{\xi_2}(\frac{x-\alpha-\beta r_j}{\gamma}).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем формулу (8). Теорема (3) доказана.

Следствие из теоремы 3. *Если случайная величина $\xi_2=R_m$ имеет равномерное распределение на интервале* $[a,b]$, *то формула* (8) *трансформируется в формулу*

$$p_{\eta_1}(x)=\frac{1}{(b-a)\gamma}\sum_{j=1}^{s}p_jI_{[a,b]}(\frac{x-\alpha-\beta r_i}{\gamma}), \qquad (9)$$

где $I_{[a,b]}(x)$ – индикаторная функция, равная 1, *если* $x\in[a,b]$, *и равная* 0, *в противном случае.*

Пример 5. *В условиях примера* 1 *для варианта А отдача R_5 имеет дискретное распределение*

R_5	150	200	250
P	0.2	0.5	0.3

,

а R_6 равномерно распределённая величина на интервале [200;300].

В варианте В положим, что R_7 – равномерно распределённая величина на интервале [200;350]. *Остальные параметры инвестиций в вариантах А, В фиксированы. Вычислить числовые характеристики для вариантов А, В для ставки сравнения* 10 *сложных годовых процентов.*

Для варианта инвестиций *А* плотность распределения $NPV_А$ имеет вид

$$P_{NPV_A}(x)=\begin{cases}0;x\notin[131.17471;249.71424],\\0.2;x\in[131.17471;162.22078),\\0.7;x\in[162.22078;187.62211),\\0.5;x\in[187.62211;193.26685),\\0.8;x\in[193.26685;218.66817),\\0.3;x\in[218.66817;249.71424).\end{cases}$$

Используя эту плотность, получаем: $(NPV_А)_{min}$ =131.17471 тыс., $(NPV_А)_{max}$ = 249.71424 тыс., E{$(NPV)_А$}=193.54908 тыс., D{$(NPV)_А$}=737.816, P{$155\le NPV_А\le 170$}= 0.122.

Для варианта B, в силу теоремы 2, имеем: α = 57.71351; β = 1.1^{-7}; P{155 ≤ NPV_B ≤ 170}= 0.4176; $(NPV_B)_{min}$ = 150.08197 тыс., $(NPV_B)_{max}$ = 186.00304 тыс.; E{$(NPV)_B$}=168.04251 тыс.; D{$(NPV)_B$}=107.527.

Анализируя эти данные, замечаем, что математическое ожидание NPV в варианте A больше, чем в варианте B. Однако, эти значения имеют больший разброс по сравнению с вариантом B. По вероятности попадания в интервал [155;170] предпочтительнее вариант B.

5. Марковская зависимость с трендом. В этом пункте будем полагать, что первые p отдач от инвестиций детерминированы, а остальные связаны цепной зависимостью Маркова с трендом. Значение p может равняться нулю, т.е. все отдачи от инвестиций – случайные величины.

Пусть на интервале $[t_{p+1}, t_m]$ задан тренд $f(t)$, определяющий общую тенденцию изменения отдач от инвестиций. Значения отдач R_j, $j = p+1,\dots,m$ складываются из значения $f(t_j)$ и возмущения ε_{ξ_j}, т.е. $R_j = f(t_j) + \varepsilon_{\xi_j}$, где ε_{ξ_j}, $j = p+1,\dots,m$ – однородная цепь Маркова с N состояниями $\{1,2,\dots,N\}$, начальным распределением вероятностей

$$P\{\xi_{p+1} = \lambda\} = \pi_\lambda, \lambda = \overline{1,N}, \sum_{\lambda=1}^{N} \pi_\lambda = 1$$

и матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ks}), p_{ks} = P\{\xi_{j+1} = s \mid \xi_j = k\},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ – заданные состояния цепи (возмущения).

Введём обозначения:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p} R_j (1+i)^{-\tau_j} - \sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-t_j}, \beta = (1+i)^{-\tau_m}, j = p+1,\dots,m, \eta = NPV.$$

Чистый приведённый доход можно представить в виде:

$$NPV = \eta = \alpha + \sum_{j=p+1}^{m} (f(t_j) + \varepsilon_{\xi_j}) \beta_j.$$

Среднее значение η равно:

$$E\{\eta\} = \sum_{\xi_{p+1}}^{N} \dots \sum_{\xi_m=1}^{N} \eta \pi_{\xi_{p+1}} p_{\xi_{p+1},\xi_{p+2}} \dots p_{\xi_{m-1},\xi_m}.$$

Можно вычислить дисперсию η по формуле $D\{\eta\} = E\{\eta^2\} - E^2\{\eta\}$ и вероятность попадания η в заданный интервал $[N_1, N_2]$.

Пример 6. *В условиях примера* 1, *для варианта инвестиций A, на интервале времени* [4,6] *лет задан тренд* $f(t) = -150 + 75t$. *На этом интервале отдачи от инвестиций подчинены зависимости Маркова с тремя состояниями*: $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 20$, $\varepsilon_3 = -10$, вектором начальных состояний $\pi = (0.7;0.1;0.2)$, матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Для ставки 10% *годовых вычислить характеристики NPV и вероятность попадания его в интервал* [230;250].

Учитывая, что цепь Маркова, в данных условиях, может двигаться по девяти траекториям, и, изложенную выше теорию, имеем: $E\{NPV\}$ = 237.00228 тыс., $D\{NPV\}$=1194.19275, $P\{230 \le NPV_B \le 250\}$ = 0.485. Минимальное значение NPV равно 215.50711 тыс. и реализуется с вероятностью 0.05, максимальное значение равно 271.55937 тыс. и реализуется с вероятностью 0.025.

6. Общий случай распределений вероятностей от инвестиций. В общем случае доходы могут быть распределены по различным законам распределения вероятностей и число доходов может быть велико. Естественно, в этих условиях невозможно получить аналитические результаты, подобные тем, которые были получены выше. В этом случае для получения численных характеристик *NPV* необходимо использовать статистическое моделирование ожидаемых доходов с их последующей статистической обработкой [4].

Литература

1. *Четыркин, Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчётов / Е.М. Четыркин. – М.: ДелоЛтд, 1995 .

2. *Кирлица, В.П.* Финансовая математика / В.П. Кирлица. – Мн.: ТетраСистемс, 2005.

3. *Харин, Ю.С., Зуев, Н.М.* Теория вероятностей: учебное пособие / Ю.С. Харин, Н.М. Зуев. – Мн.: БГУ, 2004 .

4. *Харин, Ю.С., Малюгин, В.И., Кирлица, В.П.* и др. Основы имитационного и статистического моделирования / Ю.С. Харин, В.И. Малюгин, В.П. Кирлица. – Мн.: ДизайнПРО, 1997 .

Кирлица В. П., Пушкин А. А.

Оценивание чистого приведённого дохода инвестиций в условиях неполной информации о величине получаемого дохода

В статье рассматриваются некоторые методы оценивания величины чистого приведённого дохода инвестиций в самом начале инвестиционной операции, когда величины доходов неизвестны. Предстоящие величины доходов рассматриваются как случайные величины с заданными либо спрогнозированными законами распределения вероятностей. Это позволяет вычислить такие числовые величины чистого приведённого дохода как её среднее значение, дисперсия и вероятность попадания в заданный интервал. Инвестор, анализируя эти величины, может выбрать лучший вариант инвестиций среди некоторых вариантов.

Kirlitsa V.P., Pushkin A.A.

Estimation of the net present value of investments in the conditions of the incomplete information on size of received income.

In the article we consider some methods of estimation of the net present value of investments at the very beginning of investment operation when values of the future incomes are still unknown.

Сведения об авторах

Кирлица Валерий Петрович, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент. Домашний адрес: Минск, ул. Голубева, 5, кв. 28. Телефоны: д.т. 2713103, м.т. 8-029-6204576.

Пушкин Алексей Александрович, студент 4 курса Белорусского государственного университета. Домашний адрес: Минск, ул. Богдановича, 143, кв. 96. Телефоны: д.т. 3341071, м.т. 8-029-6844616.