ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра дифференциальных уравнений
и приближенных методов

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(междуведомственный)

Глубокоуважаемому
Валерию Борисовичу
VII 85

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1983

УДК 53:51

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Прикладные задачи математической физики: Сборник научных трудов (междуведомственный). – Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983.– 168 с.

В сборник включены статьи, посвященные вопросам решения прикладных задач математической физики. Большинство работ связано с построением численных методов решения задач, моделирующих конкретные физические процессы фильтрации жидкости, кристаллизации, гидродинамики. Исследуются также методы решения определенных классов математических задач, которые также могут встречаться при математическом исследовании физических процессов.

Сборник предназначен для математиков, физиков и специалистов, занимающихся проблемами тепло-массопереноса, а также для аспирантов и студентов старших курсов.

Илл. – 26, библ. – 90.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

П $\frac{20200-091у}{М\ 812(II)-83}$ 35.83.1702000000

ОДНОМЕРНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

Таранчук В.Б. (БГУ им.В.И.Ленина, г.Минск)

В настоящей работе изучается модельная задача о вытеснении вязкопластической нефти раствором активной примеси; построено аналитическое решение, которое может использоваться для изучения структуры и характеристик фильтрационного течения, а также в качестве эталонного при оценке точности численных решений.

Рассмотрим процесс изотермической фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде, когда вытесняемая жидкость является вязкопластической, а вытесняющая - ньютоновской жидкостью, причем содержит активную примесь, которая растворяется только в вытесняющей фазе; имеет место одномерное линейное течение в горизонтальном полубесконечном пласте; капиллярный скачок давления и диффузионный перенос примесей пренебрежимо малы; фильтрация вытесняющей жидкости описывается обобщенным законом Дарси, а движение вытесняемой жидкости описывается законом фильтрации с предельным градиентом. Из законов фильтрации, уравнений неразрывности фаз и закона сохранения массы примеси имеем (см.,например, [I, 2])

$$u_1 = -\frac{kf_1}{\mu_1}\cdot\psi_1\cdot\frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{kf_2}{\mu_2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{I}$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(msc + a) + \frac{\partial}{\partial x}(cu_2) = 0, \tag{3}$$

где индексы $i = I$ и 2 относятся к вытесняемой и вытесняющей фазам, u_i - скорость фильтрации i - й фазы, k и m -абсолютная проницаемость и пористость среды, μ_i и f_i - вязкость и относительная фазовая проницаемость i - й фазы; x и t - пространственная координата и время, $x \geq 0$; $t \geq 0$; $\psi_1 = 1 - G/|\partial p/\partial x|$, если $|\partial p/\partial x| > G$, $\psi_1 = 0$, если

$|\partial p/\partial x| \leq G$; G - предельный градиент давления; s - насыщенность пористой среды вытесняющей жидкостью, c - концентрация примеси в вытесняющей фазе, a - количество примеси, сорбированное пористым скелетом.

Преобразуем систему уравнений (I)-(3). Складывая уравнения неразрывности (2), получаем, что суммарная скорость фильтрации $u = u_1 + u_2$, которая считается неотрицательной, не зависит от координаты x , а является функцией только времени t .

Из закона фильтрации вытесняемой фазы следует, что если модуль градиента давления меньше предельного, то нефть застывает и не движется. Условие застывания $|\partial p/\partial x| \leq G$ может быть преобразовано к виду

$$f_2 \geq \varkappa, \tag{4}$$

где $\varkappa^{-1} = \pi\mu$, $\pi = kG/(u\mu_1)$, $\mu = \mu_1/\mu_2$.

Нетрудно показать, что из (I)-(3) с учетом (4) для определения насыщенности s и концентрации c , можно получить систему уравнений

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(sc + \frac{a}{m}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}(\varphi c) = 0, \tag{6}$$

где $\varphi = I$ при $f_2 \geq \varkappa$, $\varphi = F(1 + \pi f_1)$ при $f_2 < \varkappa$ и $F = \mu f_2/(f_1 + \mu f_2)$.

Заметим, что при $G = 0$ система (5), (6) является частным случаем системы, исследованной в [2] . При условии отсутствия примесей уравнение (5) совпадает с аналогичным уравнением, рассмотренным в [I] .

Методика решения задачи о вытеснении нефти раствором активной примеси, развитая в работах Ентова В.М. (см., например [2]), допускает обобщение и на рассматриваемый здесь случай, когда движение нефти описывается законом фильтрации с предельным градиентом. С целью сокращения изложения приведем решение задачи в относительно простом случае. Пусть в начальный момент в пласте имеются связанная

вода и нефть, вытесняемая водным раствором активной примеси, которая снижает остаточную нефтенасыщенность, адсорбируется скелетом пористой среды, причем $a = a(c)$, $a'' < 0$, $F_{,c} < 0$. Также считается, что на входе $x = 0$ скорость фильтрации нефти $u_1 = 0$, а скорость фильтрации водной фазы задана и постоянна $u = const > 0$.

При сделанных предположениях естественно искать автомодельное решение

$$s = s(\xi),\ c = c(\xi),\ \xi = mx(ut)^{-1}. \tag{7}$$

Из (5), (6), переходя к переменной ξ, получаем

$$\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{d\Phi}{d\xi}, \tag{8}$$

$$\xi \frac{d(sc + a/m)}{d\xi} = \frac{d(\Phi c)}{d\xi}, \tag{9}$$

а сформулированные начальные и граничные условия приводят к соотношениям

$$s = s^*,\ c = c^0,\ \xi = 0, \tag{10}$$

$$s = s_*,\ c = 0,\ \xi \to \infty, \tag{11}$$

где s_* – насыщенность связанной воды, $1 - s^*$ – остаточная нефтенасыщенность, c^0 – концентрация примеси в закачиваемой вытесняющей жидкости.

Задача (8)-(11), как и исходная задача для системы уравнений в частных производных, не имеет непрерывных решений и следует строить разрывные решения. Соотношения на скачках после перехода к автомодельной переменной и некоторых преобразований могут быть записаны в виде [2]

$$\xi_c = \frac{\Phi^- - \Phi^+}{s^- - s^+},\ \xi_c = \frac{\Phi^\pm}{s^\pm + s_a}, \tag{12}$$

где индексы "+" и "–" обозначают функции перед и за скачком, соответственно, $s_a = (a^- - a^+)(c^- - c^+)^{-1} \cdot m^{-1}$.

Учитывая, что $a'' < 0$ нетрудно показать, что решение $c(\xi)$ является кусочно-постоянным

$$c(\xi) = c^0,\quad 0 \le \xi \le \xi_c,$$
$$c(\xi) = 0,\quad \xi > \xi_c, \tag{13}$$

после чего построение решения не вызывает трудностей.

Пусть $\tilde{\Phi}$ – функция, которая при $f_2 < \varkappa$ совпадает с Φ, а при $f_2 \ge \varkappa$ $\tilde{\Phi} = F(1 + \pi f_1)$. Заметим, что функции f_i, а следовательно и F, Φ, $\tilde{\Phi}$ зависят от s и c, μ_i – от c и, т.к. решение $c(\xi)$ – кусочно-постоянная функция необходимо знать константы $\mu(0)$, $\mu(c^c)$ и функции $f_i(s,0)$, $f_i(s,c^c)$.

Опишем основные этапы построения решения:

А. Формально решается трансцендентное уравнение $f_2(s,c^0) = \varkappa(c^c)$. Пусть $s = s_3^-$ – корень этого уравнения. Если $s_3^- < s^*(c^0)$, значение s_3^- называется насыщенностью застывания, а $1 - s_3^-$ является неуменьшаемой при данном режиме вытеснения величиной нефтенасыщенности. Если $s_3^- \ge s^*(c^0)$, застывания нефти не происходит, такой режим вытеснения по аналогии с [3] будем называть <u>режимом вытеснения Баклея-Леверетта</u>.

Б. Формально решается трансцендентное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(s,c^0)}{\partial s} = \frac{\tilde{\Phi}(s,c^0)}{s + s_a}. \tag{14}$$

Учитывая характерный вид функции $\tilde{\Phi}(s,c^0)$ очевидно, что корень уравнения (14) $s = s_{c1}^- < s^*(c^0)$. В случае, если реализуется режим вытеснения Баклея-Леверетта, $s_* < s_{c1}^- < s^*(c^0)$. Когда $s_3^- < s^*(c^0)$, возможны два случая: $s_{c1}^- < s_3^-$ и $s_{c1}^- > s_3^-$. Если корень уравнения (14) $s_{c1}^- > s_3^-$, то принимается $s_{c1}^- = s_3^-$, а такой режим вытеснения по аналогии с [3] будем называть <u>поршневым</u>. При $s_{c1}^- < s_3^-$ корень уравнения (14) определяет насыщенность за первым скачком, такой режим будем называть <u>режимом вытеснения с застыванием</u>.

В. Решается трансцендентное уравнение

$$\xi_1 = \frac{\Phi(s_{c1}^-, c^0)}{s_{c1}^- + s_a} = \frac{\Phi(s_{c1}^-, c^0) - \Phi(s_{c1}^+, 0)}{s_{c1}^- - s_{c1}^+}, \tag{15}$$

откуда определяется значение s_{c1}^+. Вычисляется координата первого скачка ξ_1.

Г. Определяется положение второго скачка

$$\xi_2 = \frac{\Phi(s^-_{c2},0) - \Phi(s^+_{c2},0)}{s^-_{c2} - s^+_{c2}}, \qquad (16)$$

где $s^-_{c2} = s^+_{c1}$, $s^+_{c2} = s_*$.

Д. После определения положения скачков и значений насыщенности на них определяется координата точки застывания ξ_3, и, если реализуется режим вытеснения, отличный от поршневого, то находится решение для $s^-_{c1} < s < s^-_3$. Координата точки застывания в случае, если реализуется поршневой режим вытеснения, определяется из (15). Для режима вытеснения с застыванием имеем

$$\xi_3 = \frac{\partial\Phi(s,c^0)}{\partial s}, \quad s = s^-_3. \qquad (17)$$

Для режима вытеснения Баклея-Леверетта застывания не происходит и условно можно принять $\xi_3 = 0$. Для $\xi_{c1} < \xi < \xi_3$ решение определяется из

$$\xi = \frac{\partial\Phi(s,c^0)}{\partial s}. \qquad (18)$$

Таким образом, для трех выделенных случаев решение определяется следующим образом:

поршневой режим вытеснения

$$\begin{aligned} &s(\xi) = s^-_3, \ c(\xi) = c^0, \ 0 \le \xi \le \xi_3, \\ &s(\xi) = s^+_{c1}, \ c(\xi) = 0, \ \xi_3 < \xi \le \xi_2, \\ &s(\xi) = s_*, \ c(\xi) = 0, \ \xi > \xi_2; \end{aligned} \qquad (19)$$

режимы вытеснения с застыванием и Баклея-Леверетта

$$\begin{aligned} &s(\xi) = s^-_3, \ c(\xi) = c^0, \ 0 \le \xi \le \xi_3, \\ &s = s(\xi), \ c(\xi) = c^0, \ \xi_3 \le \xi \le \xi_1, \\ &s(\xi) = s^+_{c1}, \ c(\xi) = 0, \ \xi_1 < \xi \le \xi_2, \\ &s(\xi) = s_*, \ c(\xi) = 0, \ \xi > \xi_2, \end{aligned} \qquad (20)$$

где при $\xi_3 \le \xi \le \xi_1$ насыщенность $s(\xi)$ монотонно убывает от s^-_3 до s^-_{c1} и ее изменение описывается соотношением (18).

(Заметим, что в формулах (20) в случае режима вытеснения Баклея-Леверетта подразумевается, что $s^-_3 = s^*(c^0)$ и $\xi_3 = 0$).

Для иллюстрации описанного решения рассмотрим случай вытеснения вязкопластической нефти раствором поверхностно-активного вещества (ПАВ). Предположим, что адсорбция ПАВ описывается изотермой Ленгмюра, насыщенность связанной воды при добавлении примеси не меняется, вязкость вытесняемой нефти постоянна ; относительные фазовые проницаемости, вязкость водной фазы и остаточная нефтенасыщенность определяются по аналогии с [4] , причем принимается, что концентрация соли и вытесняемой и вытесняющей фазах постоянна и равна 1%.

Некоторые решения, построенные при различных значениях вязкости нефти μ_1 и предельного градиента давления G, когда $c^0 = 0{,}05\%$, $s_{ц} = 0{,}2$, определяются с помощью данных, приведенных в таблице. Для рассмотренных случаев при

Таблица

μ_1	$\mathcal{I}$	$\varkappa(c^0)$	s^-_3	ξ_3	s^-_{c1}	ξ_{c1}	s^+_{c1}	ξ_{c2}
20	5	0,04	0,5	1,4286	—	—	0,3880	9,5486
	0,5	0,4	0,9324	0,0052	0,6788	1,0481	0,4381	4,8410
	0,05	4	—	—	0,7040	1,0028	0,4483	4,3877
2	50	0,04	0,5	1,4286	—	—	0,3915	9,2276
	5	0,4	0,9324	0,0517	0,8398	0,9261	0,5098	3,1302
	0,5	4	—	—	0,9153	0,8669	0,5583	2,5445

$\mu_1 = 20$ и 2, если $\varkappa(c^0) = 4$ реализуется режим вытеснения Баклея-Леверетта, при $\varkappa = 0{,}4$ - режим вытеснения с застыванием, при $\varkappa = 0{,}04$ - поршневой режим вытеснения.

Список литературы

1. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория

фильтрации аномальных жидкостей. М.:Наука,1975.199 с.
2. Ентов В.М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов). -Препринт ИПМ АН СССР, №161, 1980. 64 с.
3. Алишаев М.Г. Одномерное несмешивающееся вытеснение неньютоновской жидкости водой. -В кн.:Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1975, с.38-50.
4. Таранчук В.Б. О постановке и методе расчета задачи мицеллярно-полимерного заводнения. -ДАН БССР, 1981, т.25, № 3, с.232-235.