ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ОДНОРОДНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

Б. Б. Комраков

Псевдориманово пространство называется *пространством Эйнштейна*, если метрика g удовлетворяет уравнению Эйнштейна $R - \lambda g = 0$, где R – тензор Риччи, λ – произвольное вещественное число.

В данной работе представлена локальная классификация четырехмерных лоренцевых (допускающих инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры (3,1)) однородных неразрешимых пространств Эйнштейна. Локальная классификация всех четырехмерных лоренцевых однородных пространств Эйнштейна насчитывает 44 пространства.

Глобальная классификация в случае римановой метрики может быть найдена в [1]. Известна также полная классификация всех четырехмерных римановых однородных пространств [2], [3]. Полная локальная классификация четырехмерных псевдоримановых однородных пространств произвольной сигнатуры представлена в [4] [5].

Пусть $(\overline{\Gamma}, M)$ – однородное пространство, $G = \overline{\Gamma}_x$ – стационарная подгруппа произвольной точки $x \in M$, и $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пара алгебр Ли, соответствующая паре групп Ли $(\overline{\Gamma}, G)$. Заметим, что пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально однозначно определяет однородное пространство $(\overline{\Gamma}, M)$. Глобальное строение всех однородных пространств, соответствующих данной паре, приводится в [6].

Определение. Пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *лоренцевой*, если соответствующее однородное пространство $(\overline{\Gamma}, M)$ допускает инвариантную лоренцеву метрику.

Пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *эйнштейновой*, если эта метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна.

Пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *неразрешимой*, если алгебра $\overline{\mathfrak{g}}$ неразрешима.

Замечание.

1) Через $\mathfrak{r}_2 = \langle p, q\rangle$ мы будем обозначать следующую алгебру Ли: $[\,p, q\,] = p$.
2) Через $\mathfrak{n}_3 = \langle h, p, q\rangle$ мы будем обозначать алгебру Ли со следующим ненулевым коммутационным соотношением: $[\,p, q\,] = h$.

Теорема 1. *Любая неразрешимая симметрическая эйнштейнова лоренцева пара коразмерности* 4 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар*:

1) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1,1)$
2) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1,1)$
3) $\overline{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2,1) \leftthreetimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R},\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$
4) $\overline{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \leftthreetimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R},\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$
5) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4,1),\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1)$
6) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,2),\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1)$
7) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,1) \leftthreetimes \mathbb{R}^4,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1)$

Теорема 2. *Любая неразрешимая несимметрическая эйнштейнова лоренцева пара коразмерности* 4 *эквивалентна одной и только одной из следующих пар*:

1) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{r}_2,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1)$
2) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{r}_2,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$
3) $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{r}_2,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$
4) $\overline{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \leftthreetimes \mathfrak{n}_3,\ \ \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h, p \right\rangle$
5) $\overline{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} x+t & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix} \middle|\, x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \leftthreetimes \mathfrak{n}_3,\ \ \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h, p \right\rangle$
6) $\overline{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \leftthreetimes \mathbb{R}^3,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$
7) $\overline{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \leftthreetimes \mathbb{R}^3,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Jensen G. R. // J. Differential Geom. 1969. V. 3. P. 309–349. [**2**] Берар-Бержери Л. // Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985. С. 45–60. [**3**] Ishihara S. // J. Math. Soc. Japan. 1955. V. 7. P. 345–370. [**4**] Komrakov B., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of complex pairs II // Preprint Univ. Oslo. V. 25 (May 1995). [**5**] Komrakov B., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of real pairs. // Preprint Univ. Oslo. V. 32 (June 1995). [**6**] Mostow G. // Ann. of Math. 1950. V. 32.

Принято редколлегией
18.04.1996