у которой A_i — линейные отображения E в E, а остальные параметры имеют прежний смысл. Система (23) представляет собой достаточно общий объект, включающий, как частный случай, наиболее известные типы $2D$-систем. Однако без дополнительных предположений высказать какие-либо конструктивные факты об уравнении (23) представляется довольно затруднительным.

Одно из таких предположений, использованное в [4], заключается в требовании попарной коммутативности операторов A_i. Как установлено в [4], в этом случае уравнение (23) допускает представление в виде системы трех независимых уравнений, два из которых имеют такой же вид, что и (1), а третье при любом фиксированном управлении имеет единственное решение. Эти факты позволяют естественным образом распространить понятия полной управляемости и полной наблюдаемости на систему (1) и без труда получить эффективные критерии существования указанных свойств.

Литература

1. Kaczorek T. Two-Dimensional Linear Systems. Berlin, 1985.
2. Гайшун И. В., Горячкин В. В. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1989. № 4. С. 3—8.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1989.
4. Гайшун И. В., Горячкин В. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 12. С. 2047—2051.

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию 26 декабря 1989 г.

УДК 517.926.7

С. А. МАЗАНИК

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X,\ t\geqslant 0, \tag{1}$$

где элементы $n\times n$-матрицы A являются интегрируемыми и ограниченными на $[0,+\infty[$ комплекснозначными функциями. Пусть решение X уравнения (1) удовлетворяет начальному условию

$$X(0)=\exp C, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная матрица.

Известно (см., например, [1, с. 117]), что если для всех $t\geqslant 0$ выполняется условие

$$A(t)B(t)=B(t)A(t), \tag{3}$$

где

$$B(t)=C+\int_0^t A(\tau)\,d\tau,$$

то решение матричного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо в виде

$$X(t)=\exp B(t). \tag{4}$$

Решение обратной задачи, т. е. при каких условиях из выполнения соотношения (4) следует (3), почти полностью содержится в работе [2].

А именно в [2] доказано следующее утверждение: если матрица (4) является решением уравнения (1) с начальным условием (2), то

а) $A(t)$ коммутирует с $B(t)$ для всех $t \geqslant 0$, если собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы $B(t)$ таковы, что при $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ разности $\lambda_i(t)-\lambda_j(t)$ не являются решениями уравнения

$$\exp z - z - 1 = 0; \tag{5}$$

б) если матрица A непрерывна для $t \geqslant 0$, то соотношение (3) выполнено на $[0, +\infty[$, за исключением, может быть, интервалов $]t_1, t_2[$, на которых при некоторых λ_i, λ_j разность $\lambda_i - \lambda_j$ удовлетворяет уравнению (5), однако $\lambda_i \neq \lambda_j$;

в) если A аналитическая для $t \geqslant 0$, то соотношение (3) выполнено для всех $t \geqslant 0$, если существует интервал $]t_1, t_2[$, на котором разность $\lambda_i - \lambda_j$ является корнем уравнения (5) только при $\lambda_i = \lambda_j$.

Пусть матрица (4) является решением задачи (1), (2) с нулевой матрицей C. Поскольку нуль является изолированным корнем уравнения (5) и собственные значения матрицы B непрерывно зависят от ее коэффициентов (см., например, [3, с. 71]), то существует такая окрестность нуля, на которой условие (3) выполнено (см. также [4]), что в случае аналитической матрицы A гарантирует выполнение (3) на всем промежутке $[0, +\infty[$. Однако оставался открытым вопрос о существовании неаналитической матричной функции A, для которой из экспоненциального представления решения в виде (4) не следовало бы выполнения соотношения (3). Цель настоящей заметки и состоит в построении такой матричной функции.

Требуемое построение стало возможным благодаря наличию отличного от данного в [2] доказательства приведенного выше утверждения. Приводимые ниже леммы позволяют не только доказать соответствующее утверждение, но и выявить структуру некоммутируемых блоков матриц A и B.

В дальнейшем предполагаем, что матричная функция (4) является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (2), а собственные значения λ_i матрицы B таковы, что разности $\lambda_i - \lambda_j$ могут удовлетворять уравнению (5) только лишь при $\lambda_i = \lambda_j$.

Л е м м а 1. *Для всех $t \geqslant 0$, для которых выполнено соотношение*

$$\int_0^1 \exp(-B(t)s) F(t) \exp(B(t)s)\, ds = \exp(-B(t)) F(t) \exp B(t), \tag{6}$$

имеет место равенство $B(t)F(t) = F(t)B(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при $t = t_0$ соотношение (6) выполнено. Легко видеть, что утверждение леммы достаточно доказать лишь в случае, когда матрица $B(t_0)$ имеет нормальную жорданову форму (далее аргумент t_0 всюду опускаем). Пусть

$$B = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \ldots, J_m(\lambda_m)),$$

где $J_i(\lambda_i)$ — жордановы клетки размерности k_i, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Разобьем матрицу F на блоки F_{ij} размерности $k_i \times k_j$ и обозначим $H_i(s) = \exp(J_i(\lambda_i)s)$. Тогда в силу (6) для всех $i, j = \overline{1, m}$ имеем

$$\int_0^1 H_i^{-1}(s) F_{ij} H_j(s)\, ds = H_i^{-1}(1) F_{ij} H_j(1). \tag{7}$$

Покажем, что если $\lambda_i - \lambda_j$ не является ненулевым корнем уравнения (5), то матрицы F_{ij} должны иметь специальный вид, гарантирующий коммутируемость матриц F и B (см. [5, с. 204]). Обозначим через f_{lr}, $l = \overline{1, k_i}$, $r = \overline{1, k_j}$, элементы матрицы F_{ij}. Рассмотрим следующие случаи.

I. $\lambda_i = \lambda_j$ (не исключая случая $i = j$). Предположим, что $k_i = k_j = M$. В этом случае мы должны доказать, что элементы f_{lr} удовлетворяют соотношениям

$$f_{lr} = 0 \text{ для } l > r,\ r = \overline{1, M-1},\ l = \overline{2, M}, \tag{8.1}$$

$$f_{l(l+k)}=\alpha_k \text{ для } k=\overline{0, M-1},\ l=\overline{1, M-k} \tag{8.2}$$

и α_k — любые числа.

Доказательство проведем индукцией по размерности M матрицы F_{ij}. В случае $M=1$ выполнение условия (8.2) очевидно. Предположим, что соотношения вида (8.1) и (8.2) следуют из (7) в случае $k_i=k_j=M-1$. Матрицу F_{ij} размерности M представим в виде

$$F_{ij}=\begin{pmatrix} f_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$G_{12}=(f_{12}, f_{13}, \dots, f_{1M}),\quad G_{21}=(f_{21}, f_{31}, \dots, f_{M1})^{\mathrm{T}},$$

$$G_{22}=(f_{lr}),\quad l, r=\overline{2, M}.$$

Соответственно матрицу $H_j(s)$ представим в виде

$$H_j(s)=\begin{pmatrix} 1 & T(s) \\ Z & N(s) \end{pmatrix} \exp(\lambda_j s),$$

где Z — нулевая матрица размерности $(M-1)\times 1$, $N(s)=\exp(Ks)$, K — жорданова клетка размерности $M-1$ с нулями на диагонали, $T(s)=(s, s^2/2!, \dots, s^{M-1}/(M-1)!)$.

Так как $\lambda_i=\lambda_j$, то

$$H_i^{-1}(s)=H_j^{-1}(s)=\begin{pmatrix} 1 & R(s) \\ Z & N^{-1}(s) \end{pmatrix} \exp(-\lambda_i s),$$

где

$$R(s)=(-s, s^2/2!, \dots, (-1)^{M-1}s^{M-1}/(M-1)!).$$

Равенство (7), учитывая блочную структуру входящих в него матриц, запишем в виде

$$\int_0^1 (f_{11}+R(s)G_{21})\,ds=f_{11}+R(1)G_{21}, \tag{9.1}$$

$$\int_0^1 (f_{11}T(s)+R(s)G_{21}T(s)+G_{12}N(s)+R(s)G_{22}N(s))\,ds=$$
$$=f_{11}T(1)+R(1)G_{21}T(1)+G_{12}N(1)+R(1)G_{22}N(1), \tag{9.2}$$

$$\int_0^1 N^{-1}(s)G_{21}\,ds=N^{-1}(1)G_{21}, \tag{9.3}$$

$$\int_0^1 (N^{-1}(s)G_{21}T(s)+N^{-1}(s)G_{22}N(s))\,ds=$$
$$=N^{-1}(1)G_{21}T(1)+N^{-1}(1)G_{22}N(1). \tag{9.4}$$

Из уравнений (9.1) и (9.3) находим, что G_{21} — нулевой столбец. Тогда уравнение (9.4) приобретает вид

$$\int_0^1 N^{-1}(s)G_{22}N(s)\,ds=N^{-1}(1)G_{22}N(1).$$

По предположению индукции элементы f_{lr}, $l, r=\overline{2, M}$, матрицы G_{22} удовлетворяют соотношениям

$$f_{lr}=0 \text{ для } l>r, \tag{10.1}$$

$$f_{l(l+k)}=\alpha_k \text{ для } k=\overline{0, M-2},\ l=\overline{2, M-k}, \tag{10.2}$$

где α_k — любые числа.

Рассмотрим теперь систему (9.2) относительно элементов f_{1r}, $r=\overline{1, M}$. Эта система с учетом (10.1), (10.2) имеет вид

$$\int_0^1 \sum_{r=1}^{k} (f_{1r}-\alpha_{r-1}) \frac{s^{k-r+1}}{(k-r+1)!}\, ds =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (f_{1r}-\alpha_{r-1}) \frac{1}{(k-r+1)!}, \quad k=\overline{1, M-1}. \tag{11}$$

Поэтому $f_{1r}=\alpha_{r-1}$ для $r=\overline{1, M-1}$ и $f_{1M}=\alpha_{M-1}$ любое, т. е. для элементов f_{lr}, $l, r=\overline{1, M}$, выполнены соотношения (8.1) и (8.2).

Рассмотрим теперь случай $M=k_i>k_j=N$. Дополним матрицу F_{ij} слева нулевой матрицей Z_1 размерности $M\times(M-N)$ и вновь полученную матрицу обозначим V_{ij}, $V_{ij}=(Z_1, F_{ij})$. В прежних обозначениях выполнение равенства (7) равносильно выполнению равенства

$$\int_0^1 H_i^{-1}(s)\, V_{ij} H_i(s)\, ds = H_i^{-1}(1)\, V_{ij} H_i(1),$$

где размерности матриц H_i и V_{ij} уже совпадают. По ранее доказанному элементы матрицы V_{ij} должны удовлетворять соотношениям (8.1) и (8.2), но тогда блок F_{ij} матрицы F имеет структуру, обеспечивающую (см. [5, с. 204]) коммутируемость матриц F и B.

Аналогично рассматривается и случай $N=k_i<k_j=M$, при этом матрица F_{ij} дополняется снизу нулевой матрицей размерности $(M-N)\times M$.

II. $\lambda_i\neq\lambda_j$. В этом случае требуется доказать, что матрица F_{ij} нулевая. Обозначим элементы матрицы $H_i^{-1}(s) F_{ij} H_j(s)$ через $\varphi_{qp}(s)$, $q=\overline{1, k_i}$, $p=\overline{1, k_j}$. Тогда для всех $q=\overline{1, k_i}$, $p=\overline{1, k_j}$ имеем

$$\varphi_{qp}(s) = \sum_{l=q}^{k_i} \frac{(-1)^{l-q} s^{l-q}}{(l-q)!} \sum_{r=1}^{p} f_{lr} \frac{s^{p-r}}{(p-r)!} \exp((\lambda_j-\lambda_i)s). \tag{12}$$

При $p=1$ получаем

$$\varphi_{q1}(s) = \sum_{l=q}^{k_i} \frac{(-1)^{l-q} s^{l-q}}{(l-q)!} f_{l1} \exp((\lambda_j-\lambda_i)s). \tag{13}$$

Следовательно, $\varphi_{k_i1}=f_{l1}\exp((\lambda_j-\lambda_i)s)$. Используя (7), находим

$$f_{k_i1}(\exp(\lambda_j-\lambda_i) - (\exp(\lambda_j-\lambda_i)-1)/(\lambda_j-\lambda_i))=0.$$

Так как по условию $\lambda_i-\lambda_j$ не является корнем уравнения (5), то $f_{k_i1}=0$. Подставляя полученное значение f_{k_i1} в (13), находим $\varphi_{(k_i-1)1}(s)=f_{(k_i-1)1}\exp((\lambda_j-\lambda_i)s)$. Аналогично предыдущему $f_{(k_i-1)1}=0$. Продолжая этот процесс для всех $q=k_i-2, k_i-3, \dots, 1$, убеждаемся в том, что все $f_{q1}=0$, $q=\overline{1, k_i}$. Используя этот факт, получаем

$$\varphi_{q2}(s) = \sum_{l=q}^{k_i} \frac{(-1)^{l-q} s^{l-q}}{(l-q)!} f_{l2} \exp((\lambda_j-\lambda_i)s).$$

Так как для φ_{q2} получили соотношения, аналогичные (13), то, применяя тот же подход, показываем, что $f_{q2}=0$, $q=\overline{1, k_i}$. Аналогично $f_{qp}=0$ для всех $q=\overline{1, k_i}$, $p=\overline{1, k_j}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для почти всех $t\geqslant 0$ выполнено*

$$A(t)B(t)-B(t)A(t)=A(t)-X(t)A(t)X^{-1}(t). \tag{14}$$

Доказательство. Так как почти для всех $t\geqslant 0$ производные функций

$$\int_0^t A(\tau)X(\tau)d\tau - B(t)X(t) + \int_0^t B(\tau)A(\tau)X(\tau)d\tau + C\exp C,$$

$$\int_0^t X(\tau)A(\tau)d\tau - X(t)B(t) + \int_0^t A(\tau)X(\tau)B(\tau)d\tau + C\exp C$$

равны нулю, то (см. [6, с. 374]) сами функции тождественно равны нулю на $[0, +\infty[$. Поэтому для всех $t \geqslant 0$ с учетом коммутируемости матриц $B(t)$ и $X(t)$ будет выполнено равенство

$$\int_0^t (A(\tau)X(\tau) - X(\tau)A(\tau) + (B(\tau)A(\tau) - A(\tau)B(\tau))X(\tau))d\tau = 0,$$

откуда и следует (см. [6, с. 376]) выполнение (14) для почти всех $t \geqslant 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Матрица*

$$G(t) = \int_0^1 \exp(-B(t)s)A(t)\exp(B(t)s)ds - X^{-1}(t)A(t)X(t)$$

коммутирует с $B(t)$ *для почти всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_0^1 \exp(-B(t)s)A(t)\exp(B(t)s)ds.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\Phi(t)B(t) = \int_0^1 \exp(-B(t)s)A(t)B(t)\exp(B(t)s)ds =$$

$$= X^{-1}(t)A(t)X(t) + B(t)\Phi(t) - A(t).$$

Поэтому из (14) для почти всех $t \geqslant 0$ получим

$$G(t)B(t) - B(t)G(t) = (\Phi(t) - X^{-1}(t)A(t)X(t))B(t) -$$

$$-B(t)(\Phi(t) - X^{-1}(t)A(t)X(t)) = X^{-1}(t)A(t)X(t) -$$

$$-A(t) - X^{-1}(t)(A(t)B(t) - B(t)A(t))X(t) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для почти всех* $t \geqslant 0$, *всех* $k \geqslant 0$ *и* $m \geqslant k$ *выполнено*

$$B^k(t)A(t)B^{m-k}(t) + B^{m-k}(t)A(t)B^k(t) = A(t)B^m(t) + B^m(t)A(t). \quad (15)$$

Доказательство. В силу леммы 3 для почти всех $t \geqslant 0$ и всех $m \geqslant k \geqslant 0$ имеем

$$\int_0^1 \exp(-B(t)s)(A(t)B^{m-k}(t) - B^{m-k}(t)A(t))\exp(B(t)s)ds -$$

$$-X^{-1}(t)(A(t)B^{m-k}(t) - B^{m-k}(t)A(t))X(t) = G(t)B^{m-k}(t) -$$

$$-B^{m-k}(t)G(t) = 0.$$

Поэтому из леммы 1 при $F(t) = A(t)B^{m-k}(t) - B^{m-k}(t)A(t)$ для почти всех $t \geqslant 0$ и всех $m \geqslant k \geqslant 0$ получаем

$$B^k(t)(A(t)B^{m-k}(t) - B^{m-k}(t)A(t)) = (A(t)B^{m-k}(t) -$$

$$-B^{m-k}(t)A(t))B^k(t),$$

откуда и следует выполнение соотношения (15). Лемма доказана.

Лемма 5. *Для почти всех* $t \geqslant 0$ *имеет место равенство*

$$A(t)X(t) = X(t)A(t).$$

Доказательство. Покажем, что при всех $m \geqslant 1$ и почти всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\frac{dB^m(t)}{dt} = \frac{m}{2}\left(A(t)B^{m-1}(t) + B^{m-1}(t)A(t)\right). \tag{16}$$

Рассмотрим два возможных случая.

I. $m=2s+1$, $s \geqslant 0$. Поскольку

$$\frac{dB^{2s+1}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{2s} B^k(t)A(t)B^{2s-k}(t) = B^s(t)A(t)B^s(t) +$$

$$+\sum_{k=0}^{s-1}\left(B^k(t)A(t)B^{2s-k}(t) + B^{2s-k}(t)A(t)B^k(t)\right),$$

то из леммы 4 следует

$$\frac{dB^{2s+1}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left(A(t)B^{2s}(t) + B^{2s}(t)A(t)\right) +$$

$$+s\left(A(t)B^{2s}(t) + B^{2s}(t)A(t)\right).$$

II. $m=2s$, $s \geqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю

$$\frac{dB^{2s}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{s-1}\left(B^k(t)A(t)B^{2s-1-k}(t) + B^{2s-1-k}(t)A(t)B^k(t)\right) =$$

$$= s\left(A(t)B^{2s-1}(t) + B^{2s-1}(t)A(t)\right).$$

Таким образом, формула (16) справедлива при всех $m \geqslant 1$ и почти всех $t \geqslant 0$.

Следовательно,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m(t)}{m!}\right) = \frac{1}{2}A(t)\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B^{m-1}(t)}{(m-1)!} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B^{m-1}(t)}{(m-1)!}A(t).$$

Утверждение леммы следует теперь из полученного соотношения и того факта, что X является решением уравнения (1). Лемма доказана.

Справедливость утверждения, сформулированного в начале работы, непосредственно следует из результатов лемм 2 и 5, а также аналитических свойств матрицы A.

Теорема. *Для любого $n \geqslant 3$, любой постоянной действительной матрицы C существует матричное дифференциальное уравнение (1) с неаналитической, действительной матрицей коэффициентов A, для которой не выполнено условие (3), хотя решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо в виде (4).*

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай нулевой матрицы C при $n=3$. В уравнении (1) в качестве матрицы A возьмем матрицу

$$\begin{pmatrix} -\mu a(t) & 0 & -\nu a(t) \\ c(t) & 0 & 0 \\ \nu a(t) & 0 & -\mu a(t) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\mu + i\nu$ — корень (любой отличный от нуля) уравнения (5), a и c — некоторые интегрируемые ограниченные неаналитические функции, обладающие следующими свойствами:

$$\int_0^{t_0} a(\tau)d\tau=1,\ a(t)=0 \text{ для } t\geqslant t_0>0, \tag{18}$$

$$c(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,t_0],\\ c_k(t)\neq 0, & t\in\,]t_{2k},t_{2k+1}[,\\ 0, & t\in[t_{2k+1},t_{2k+2}],\ k=0,1,\ldots,\end{cases} \tag{19}$$

и $\{t_k\}$ — любое множество положительных чисел, $t_{k+1}>t_k$, причем в случае конечного множества, $k=\overline{0,K}$, имеем $t_K=+\infty$, в случае же бесконечного множества $t_k\to+\infty$ при $k\to\infty$.

Обозначим

$$b(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau,\ d(t)=\int_0^t c(\tau)d\tau. \tag{20}$$

При нулевой матрице C для $t\geqslant 0$ имеем

$$\exp B(t)=\begin{pmatrix} \exp(-\mu b(t))\cos\nu b(t) & 0 & -\exp(-\mu b(t))\sin\nu b(t)\\ d(t)\exp(-\mu b(t))\cos\nu b(t) & 1 & -d(t)\exp(-\mu b(t))\sin\nu b(t)\\ \exp(-\mu b(t))\sin\nu b(t) & 0 & \exp(-\mu b(t))\cos\nu b(t)\end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление с учетом следующего из (18)—(20) условия $a(t)d(t)=0$ для всех $t\geqslant 0$ показывает, что

$$\frac{d}{dt}\exp B(t)=A(t)\exp B(t).$$

Так как, кроме того, $\exp B(0)$ является единичной матрицей, то матрица (4) является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (2).

Элементы первых и третьих строк матриц $A(t)B(t)$ и $B(t)A(t)$ совпадают, однако вторые строки этих матриц имеют соответственно вид

$$(-c(t)b(t)\mu\quad 0\quad -c(t)b(t)\nu) \text{ и } (-a(t)d(t)\mu\quad 0\quad -a(t)d(t)\nu).$$

Поэтому в силу (18)—(20) для $t\in\bigcup_k[t_{2k+1},t_{2k+2}]\cup[0,t_0]$ имеем $A(t)B(t)=B(t)A(t)$. Поскольку уравнение (5) не имеет действительных (за исключением нуля) и чисто мнимых корней, то $\mu\nu\neq 0$. Следовательно, $A(t)B(t)\neq B(t)A(t)$ для всех $t\in\bigcup_k\,]t_{2k},t_{2k+1}[$, за исключением нулей функций c_k.

Таким образом, выбирая удовлетворяющие условиям (18) и (19) неаналитические функции a и c с любой наперед заданной гладкостью, получим матричное уравнение, для которого матрица коэффициентов не коммутирует со своим интегралом, однако решение этого уравнения представимо в виде интеграла от матрицы коэффициентов.

В частности, если

$$a(t)=\begin{cases}\exp(-(t-t_0)^{-2})\left(\int_0^{t_0}\exp(-(\tau-t_0)^{-2})d\tau\right)^{-1}, & t\in[0,t_0[,\\ 0, & t\in[t_0,+\infty[,\end{cases} \tag{21}$$

$$c_k(t)=\exp(-(t-t_{2k})^{-2}(t_{2k+1}-t)^{-2}),\ k=0,1,\ldots, \tag{22}$$

то матрица A будет бесконечно дифференцируемой и ограниченной на промежутке $[0,+\infty[$, при этом соотношение (3) не имеет места для всех $t\in\bigcup_k\,]t_{2k},t_{2k+1}[$, хотя матрица (4) и является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (2) с нулевой матрицей C.

В случае произвольного $n > 3$ выбор матрицы A очевиден, для этого достаточно в качестве матрицы A использовать блочно-диагональную матрицу $\operatorname{diag}(A_1, A_2)$, где 3×3-матрица A_1 имеет вид (17), а $(n-3)\times\times(n-3)$-матрица A_2 — любая постоянная матрица. Теорема доказана.

Отметим, что в случае действительных коэффициентов у уравнения (1) и действительных начальных условий значение $n=3$ является минимально возможным значением размерности матрицы коэффициентов, при котором существует матричное уравнение (1) с указанным в теореме свойством, поскольку для любых действительных 2×2-матриц A и C матрица B будет иметь сопряженные комплексные или действительные собственные значения, поэтому их разность не может являться ненулевым решением уравнения (5). Таким образом, для уравнения с 2×2 действительными матрицами A и C соотношение (3) всегда будет выполнено, если решение задачи (1), (2) представимо в виде (4). Другие случаи равносильности выполнения (3) и (4) см. в [2].

Если же элементы матрицы A — комплекснозначные функции, то в качестве матрицы A можно взять матрицу

$$\begin{pmatrix} -\gamma a(t)/2 & 0 \\ c(t) & \gamma a(t)/2 \end{pmatrix},$$

где γ — любой отличный от нуля корень уравнения (5). Если функции a и c удовлетворяют тем же условиям (21), (22), то и в этом случае решение задачи (1), (2) с нулевой матрицей C представимо в виде (4), однако соотношение (3) выполнено на $\bigcup\limits_k [t_{2k+1}, t_{2k+2}] \cup [0, t_0]$ и не выполнено на $\bigcup\limits_k]t_{2k}, t_{2k+1}[$, при этом в отличие от [7] матрица A не является функционально коммутативной.

Литература

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
2. Martin J. F. P. // Journal of Differential Equations. 1968. N 4. P. 257—279.
3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.
4. Лаптинский В. Н. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 2. С. 249—253.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
6. Титчмарш Е. Теория функций. М., 1980.
7. Чеботарев Г. Н. // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1956. Т. 31. С. 107—111.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 22 ноября 1989 г.

УДК 517.928

В. И. РОЖКОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С НЕКОТОРЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Настоящая работа распространяет довольно общие результаты, полученные автором в [1, 2] на случай некоторых особенностей линейных систем.

Как обычно, через C_ω будем обозначать пространство непрерывных ω-периодических функций, вектор-функций $(n\times 1)$ или матриц $(n\times n)$ с нормой

$$\|f\| = \sup_t |f(t)|,\ |f(t)| = \max_i |f_i(t)|,\ |A(t)| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}(t)|.$$