Доклады Академии наук Беларуси
1997 ноябрь—декабрь Том 41 № 6

УДК 517.926

С. А. МАЗАНИК

О НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ К СИСТЕМАМ ЛАППО—ДАНИЛЕВСКОГО

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Ранее было доказано [1] существование линейных дифференциальных систем, неприводимых преобразованием Ляпунова ни к треугольным системам Лаппо—Данилевского, ни к системам с функционально коммутативными матрицами коэффициентов. Целью настоящей работы является распространение этого результата на системы Лаппо—Данилевского общего вида.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$Dx = A(t)\, x,\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in [s, +\infty[, \tag{1}$$

где $D = d/dt$, $A(t)$ — матрица с ограниченными и непрерывными на промежутке $[s, +\infty[$ элементами. Обозначим $I(f; a, b) = \int_a^b f(\tau)d\tau$, где f — интегрируемая на промежутке $[a, b]$ матричная, векторная или скалярная функция. Системой Лаппо—Данилевского назовем систему

$$Dy = B(t)\, y,\ y \in \mathbf{R}^n,\ t \in [s, +\infty[, \tag{2}$$

с непрерывной и ограниченной на $[s, +\infty[$ матрицей $B(t)$, причем такой, что существует $T \geq s$, для которого

$$B(t)I(B; T, t) = I(B; T, t)B(t),\ \forall\, t \geq T. \tag{3}$$

Доказательство основного результата опирается на два следующих утверждения.

Лемма 1. *Если непрерывные на промежутке $[T, T_2[$, $T < T_2 \leq +\infty$, скалярные функции φ и ψ, таковы, что для некоторого T_1, $T \leq T_1 < T_2$, выполнено $I(\psi; T_1, t) \neq 0$, $\forall t \in [T_1, T_2[$, и*

$$\varphi(t)\, I(\psi; T, t) = \psi(t)\, I(\varphi; T, t),\ \forall\, t \in [T, T_2[, \tag{4}$$

то существует такая постоянная c, что $\varphi(t) = c\psi(t)$, $\forall\, t \in [T_1, T_2[$.

Лемма 2. *Пусть непрерывные на промежутке $[T, +\infty[$ скалярные функции φ и ψ, таковы, что выполнено условие (4). Пусть*

$$A = \{\alpha \geq T \mid I(\varphi; T, \alpha) = 0\} \text{ и } B = \{\beta \geq T \mid I(\psi; T, \beta) = 0\}.$$

Если $\sup A = \sup B = +\infty$, то $\sup \{A \cap B\} = +\infty$.

Теорема 1. *Существует такая линейная дифференциальная система (1) размерности $n = 2$, для которой ни одна система Лаппо—Данилевского (2) не является асимптотически эквивалентной.*

Доказательство. Рассмотрим систему (1) с матрицей коэффициентов

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1/t\end{pmatrix}, t\geq s=1. \qquad (5)$$

Фундаментальная нормированная при $t = T$ матрица решений такой системы будет иметь вид $X(t) = (x_{ij}(t))$, $i, j = 1, 2$, где $x_{11}(t) = 1$, $x_{12}(t) = (t^2 - T^2)/(2T)$, $x_{21}(t) = 0$, $x_{22}(t) = t/T$.

Предположим, что для системы (1) с матрицей коэффициентов (5) существует асимптотически эквивалентная система Лаппо—Данилевского (2). Пусть $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Так как система (2) — система Лаппо—Данилевского, то в силу (3) имеем

$$b_{12}(t)I(b_{21};\ T,\ t) = b_{21}(t)I(b_{12};\ T,\ t),\ \forall t \geq T; \qquad (6)$$

$$b_{12}(t)I(b_{22} - b_{11};\ T,\ t) = (b_{22}(t) - b_{11}(t))I(b_{12};\ T,\ t),\ \forall t \geq T. \qquad (7)$$

Обозначим

$$A = \{\alpha \geq T \mid I(b_{12};\ T, \alpha) = 0\} \text{ и } B = \{\beta \geq T \mid I(b_{21};\ T, \beta) = 0\}. \qquad (8)$$

Предположим, что $\sup A = \sup B = +\infty$. Тогда из леммы 2 следует существование такой последовательности (t_n), $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, что

$$I(b_{12};\ T,\ t_n) = I(b_{21};\ T,\ t_n) = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (9)$$

Обозначим $\beta_{11}(t) = \exp I(b_{11};\ T,\ t)$, $\beta_{22}(t) = \exp I(b_{22};\ T,\ t)$. Так как система (2) — система Лаппо—Данилевского, то фундаментальная нормированная при $t = T$ матрица решений этой системы (2) имеет вид $Y(t) = \exp I(B;\ T,\ t)$. Поэтому из (9) следует, что $Y(t_n) = (y_{ij}(t_n))$, $i, j = 1, 2$, где

$$y_{11}(t_n) = \beta_{11}(t_n),\ y_{12}(t_n) = y_{21}(t_n) = 0,\ y_{22}(t_n) = \beta_{22}(t_n). \qquad (10)$$

Для асимптотической эквивалентности рассматриваемых систем необходимо и достаточно (см., например, [2]) существование такой постоянной невырожденной матрицы C, что матрица

$$L(t) = X(t)\ CY^{-1}(t) \qquad (11)$$

является матрицей Ляпунова. Пусть $L(t) = (l_{ij}(t))$, $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Тогда из (10) и (11) следует

$$l_{11}(t_n)=\frac{2Tc_{11}+c_{21}(t_n^2-T^2)}{2T\ \beta_{11}(t_n)},\quad l_{12}(t_n)=\frac{2Tc_{12}+c_{22}(t_n^2-T^2)}{2T\ \beta_{22}(t_n)},$$

$$l_{21}(t_n)=\frac{c_{21}t_n}{T\ \beta_{11}(t_n)},\ l_{22}(t_n)=\frac{c_{22}t_n}{T\ \beta_{22}(t_n)}.$$

Кроме того,

$$\det L(t_n) = \det X(t_n)\cdot\det C\cdot\det Y(t_n) = t_n \det C/(T\,\beta_{11}(t_n)\,\beta_{22}(t_n)). \qquad (12)$$

Если $c_{21} = 0$, то из $\det C \neq 0$ следует, что $c_{22} \neq 0$. Тогда ограниченность $l_{12}(t_n)$ влечет $t_n/\beta_{22}(t_n) \to 0$ при $t_n \to +\infty$, а ограниченность $l_{11}(t_n)$ влечет ограниченность функции $1/\beta_{11}(t_n)$ при всех t_n. Но тогда из (12) следует, что $\det L(t_n) \to 0$ при $t_n \to +\infty$, однако это противоречит тому, что $L(t)$ является матрицей Ляпунова, т. е. модуль ее определителя должен быть отделен от нуля на $[T, +\infty[$. Аналогичное противоречие получается и при предположении $c_{22} = 0$.

Таким образом, для асимптотической эквивалентности систем (1) и (2) необходимо $c_{21} \neq 0$ и $c_{22} \neq 0$. Однако в этом случае ограниченность функций $l_{11}(t_n)$ и $l_{12}(t_n)$ влечет $l_{21}(t_n) \to 0$ и $l_{22}(t_n) \to 0$, а следовательно, и $\det L(t_n) \to 0$ при $t_n \to +\infty$, что опять-таки невозможно.

Следовательно, если система (1) асимптотически эквивалентна системе Лаппо—Данилевского (2), то по крайней мере одно из множеств A или B (см. (8)) должно быть ограничено. Не нарушая общности, считаем, что ограничено множество A. Тогда существует такое T_1, что

$$I(b_{12};\ T,\ t) \neq 0,\ \forall\ t \in\ ]T_1,\ +\infty[.$$

Поэтому из (6), (7) и леммы 1 следует, что существуют такие постоянные a и b, что $b_{22}(t) - b_{11}(t) = ab_{12}(t)$ и $b_{21}(t) = bb_{12}(t)$. Поэтому

$$B(t) = b_{11}(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b_{12}(t)\begin{pmatrix}0 & 1\\ b & a\end{pmatrix},\ \forall\ t \in]T_1,\ +\infty[. \tag{13}$$

Последнее равенство означает, что матрица $B(t)$ является функционально коммутативной на $]T_1,\ +\infty[$. Однако, в силу результатов работы [1], система (1) не может быть асимптотически эквивалентной системе (2) с матрицей (13). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Полученный результат переносится на системы любой размерности $n \geq 2$. А именно, имеет место

Т е о р е м а 2. *При любом $n \geq 2$ существует такая линейная дифференциальная система* (1), *для которой ни одна система Лаппо—Данилевского* (2) *не является асимптотически эквивалентной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему (1) с матрицей коэффициентов

$$A(t) = \operatorname{diag}\{A_0(t),\ A_1(t)\}, \tag{14}$$

где $A_0(t)$ — матрица (5), $A_1(t) = E$ — единичная $(n-2)\times(n-2)$-матрица. Предположим, что для такой системы существует асимптотически эквивалентная система Лаппо—Данилевского (2). Поскольку из теоремы Ляпунова [3, с. 141] следует, что система (1) с матрицей коэффициентов (14) является правильной, то и система (2) также будет правильной и, в силу результатов работы [4], в свою очередь будет асимптотически эквивалентна системе

$$Dz = G(t)\ z, \tag{15}$$

где $G(t)$ такова, что при некотором $T_0 \geq s$,

$$G(t) = \operatorname{diag}\{G_0(t),\ G_1(t)\},\ \forall\ t \geq T_0, \tag{16}$$

причем, как 2×2-матрица G_0, так и $(n-2)\times(n-2)$-матрица G_1 являются матрицами Лаппо—Данилевского.

Обозначим через X_i фундаментальную нормированную при $t = T_0$ матрицу решений системы $Dx = A_i(t)x$, а через Z_i фундаментальную нормированную при $t = T_0$ матрицу решений системы $Dz = G_i(t)z$, $i = 0,1$. Из асимптотической эквивалентности системы (1) с матрицей (14) и системы (15) с матрицей (16) следует, что существует такая постоянная невырожденная матрица C_0, что матрица

$$L_0(t) = \operatorname{diag}\{X_0(t),\ X_1(t)\}\cdot C_0\cdot\operatorname{diag}\left\{Z_0^{-1}(t),\ Z_1^{-1}(t)\right\}$$

является матрицей Ляпунова. Представим матрицы L_0 и C_0 в блочном виде:

$$L_0(t) = \begin{pmatrix}L_{11}(t) & L_{12}(t)\\ L_{21}(t) & L_{22}(t)\end{pmatrix},\ C_0 = \begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда $L_{11}(t) = X_0(t) \cdot C_{11} \cdot Z_0^{-1}(t)$, $L_{21}(t) = X_1(t) \cdot C_{21} \cdot Z_0^{-1}(t)$. Так как L_0 — матрица Ляпунова, то матрица L_{21} является ограниченной на полуоси $[s, +\infty[$. Поскольку $X_1^{-1}(t) = \exp(-t)E$, а из [5] следует, что показатели столбцов матрицы Z_0 не больше нуля, то матрица $C_{21} = X_1^{-1}(t) \cdot L_{21}(t) \cdot Z_0(t)$ стремится к нулевой матрице при $t \to +\infty$. Поскольку матрица C_{21} — постоянная матрица, то это означает, что сама матрица C_{21} — нулевая. Поэтому невырожденность матрицы C_0 влечет [6, с. 57] невырожденность матрицы C_{11}, а следовательно, матрица L_{11} должна быть матрицей Ляпунова. Однако, в силу теоремы 1, это невозможно ни для какой матрицы Лаппо—Данилевского $G_0(t)$. Теорема доказана.

Summary

An asymptotic equivalence of linear differential systems and Lappo—Danilevski systems is investigated. It is proved that there exist linear systems which are not asymptotically equivalent to Lappo—Danilevski systems.

Литература

1. Мазаник Л. А., Мазаник С. А. // Вестник БГУ. Сер. 1. 1997. № 3. С. 42—46.
2. Богданов Ю. С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 6. С. 707—716.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.
4. Сурин Т. Л. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 842—848.
5. Сурин Т. Л. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 3. С. 543—545.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.

Белорусский государственный университет

Поступило 15.01.97