Доклады Академии наук Беларуси

1994 сентябрь-октябрь Том 38 № 5

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Рассмотрим пару линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$D^n\varphi + a_{n-1}(t)\,D^{n-1}\varphi + \ldots + a_0(t)\,\varphi = 0,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$D^n\psi + b_{n-1}(t)\,D^{n-1}\psi + \ldots + b_0(t)\,\psi = 0,\ t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $D = \dfrac{d}{dt}$, функции a_i, b_i, $i=\overline{0, n-1}$, кусочно-непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$. Уравнениям (1), (2) соответствуют линейные системы

$$D\xi = A(t)\,\xi,\ \ t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$D\eta = B(t)\,\eta,\ \ t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\xi = (\varphi,\ D\varphi,\ \ldots,\ D^{n-1}\varphi)^T$, $\eta = (\psi,\ D\psi,\ \ldots,\ D^{n-1}\psi)^T$, T — символ транспонирования, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B(t) = (b_{ij}(t))$, $i,\ j = \overline{1, n}$, причем $a_{nj} = -a_{j-1}$, $b_{nj} = -b_{j-1}$, $j = \overline{1, n}$, $a_{i(i+1)} = b_{i(i+1)} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$, и $a_{ij} = b_{ij} = 0$ для всех остальных пар $(i,\ j)$.

Назовем уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентными, если асимптотически эквивалентны [1, с. 95] соответствующие им системы (3) и (4). Из результатов работ [2, 3] непосредственно следует

Теорема 1. *Любое уравнение (1) асимптотически эквивалентно уравнению (2) с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими только два значения, причем последовательность (t_k) точек разрыва коэффициентов является подпоследовательностью возрастающей последовательности (τ_m), удовлетворяющей следующим условиям: $\tau_0 = 0$, $\tau_m \to +\infty$, при $m \to +\infty$ и для всех $\tau_m \in [s, s+1[$, $s = 0, 1, \ldots$, выполнено неравенство $\tau_{m+1} - \tau_m \leqslant L \exp(-\lambda s)$, где L, λ — некоторые положительные числа.*

Покажем, что для линейных уравнений второго порядка можно добиться отделенности от нуля длин промежутков постоянства коэффициентов, а именно имеет место

Теорема 2. *Для любого линейного уравнения второго порядка с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами существует асимптотически эквивалентное линейное уравнение второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими лишь конечное число значений, причем длины промежутков постоянства ограничены снизу некоторым положительным числом.*

Доказательство. Пусть $n=2$ и коэффициенты уравнения (1) таковы, что $|a_i(t)| \leqslant a$ при всех $t \geqslant 0$ и $i = \overline{0, n-1}$ (не нарушая общности, считаем $a \geqslant 1$). В работе [3] показано, что система (4) в этом случае может быть построена таким образом, что при некотором фиксированном l, $0 \leqslant l \leqslant 0{,}5 a^{-1} \ln 2$, $B(t) = B_m(t)$ при всех $t \in \Delta_m = [ml, ml + l[$, $m = 0, 1, \ldots$, причем матрицы B_m могут иметь один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} (-1)^i a & (-1)^r a \\ 0 & (-1)^j a \end{pmatrix}, \quad i, j, r = 0, 1. \tag{5}$$

Обозначим через b положительное число (такое число всегда существует), удовлетворяющее соотношению

$$2 \operatorname{ch} 2al + 16\pi^2 a^{-2} l^{-2} \operatorname{sh}^2 al = 2 + b^2 l^2. \tag{6}$$

Применив к системе (4) с матрицами коэффициентов вида (5) β-преобразование (см. [5, с. 248]) $\eta = \operatorname{diag}\{1, ba^{-1}\} x$, получим асимптотически эквивалентную (4) систему

$$Dx = P(t)\, x, \tag{7}$$

где $P(t) = P_m$ для $t \in \Delta_m$, причем матрицы P_m могут иметь лишь вид

$$\begin{pmatrix} (-1)^i a & (-1)^r b \\ 0 & (-1)^j a \end{pmatrix}, \quad i, j, r = 0, 1. \tag{8}$$

Положим $\delta = l/6$, $d = 2\pi\delta^{-1}$.

Построим асимптотически эквивалентную (7) систему

$$Dy = Q(t)\, y \tag{9}$$

с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов Q, $Q(t) = Q_m$ для $t \in \Delta_m$, и матрицы Q_m принимают на промежутках Δ_m лишь значения матриц вида

$$U = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}, \quad W(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -\omega^2 d^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_i(c) = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & (-1)^i c \end{pmatrix}.$$

Обозначим X, Y фундаментальные нормированные в нуле матрицы решений систем (7), (9) соответственно. Кроме того, положим $X_m = X(l)$, $Y_m = Y(l)$, если $P(t) = P_m$, $Q(t) = Q_m$. Тогда

$$X(nl) = \prod_{m=n-1}^{0} X_m, \quad Y(nl) = \prod_{m=n-1}^{0} Y_m, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1^0. Пусть для некоторого m выполнено

$$P_m = \begin{pmatrix} (-1)^i a & (-1)^r b \\ 0 & (-1)^i a \end{pmatrix} \quad i, r = 0, 1.$$

Из [6, с. 258, 260] следует, что

$$X_m = \exp(P_m l) = S_m D_m R_m, \tag{11}$$

где S_m, R_m — ортогональные матрицы, $\det S_m = \det R_m = 1$, а D_m — диагональная матрица, $D_m = \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_{1m}}, \sqrt{\lambda_{2m}}\}$, λ_{1m} и λ_{2m} — собственные числа матрицы $\exp(P_m l)\exp(P_m^T l)$.

Матрицы $\exp(P_m l)\exp(P_m^T l)$ и $\exp(2V_i(c)\delta)\exp(2V_i^T(c)\delta)$ имеют при $c = 6a$ одинаковые собственные числа, так как характеристические уравнения для этих матриц, имеющие соответственно вид

$$\nu^2 - \nu(2 + b^2 l^2)\exp((-1)^i 2al) + \exp((-1)^i 4al) = 0,$$

$$\nu^2 - \nu(1 + \exp((-1)^i 4c\delta) + d^2 c^{-2}(\exp((-1)^i 2c\delta) - 1)^2) +$$
$$+ \exp((-1)^i 4c\delta) = 0,$$

совпадают при $c=6a$ и выбранном в силу (6) значении b.

Таким образом, из [6, с. 258, 260] получаем

$$\exp(2V_l(6a)\delta) = M_m D_m N_m, \tag{12}$$

где M_m, N_m — ортогональные матрицы, $\det M_m = \det N_m = 1$.

Определим теперь на промежутке Δ_m матрицу Q_m следующим образом:

$$Q_m(t) = \begin{cases} U \quad, & t \in [ml,\ ml+\delta_{1m}[, \\ W(\omega_{1m}), & t \in [ml+\delta_{1m},\ ml+2\delta[, \\ V_l(6a), & t \in [ml+2\delta,\ ml+4\delta[, \\ W(\omega_{2m}), & t \in [ml+4\delta,\ ml+l-\delta_{2m}[, \\ U \quad, & t \in [ml+l-\delta_{2m},\ ml+l[. \end{cases} \tag{13}$$

При указанном выборе матриц Q_m значение Y_m равно

$$\exp(U\delta_{2m})\exp(W(\omega_{2m})(2\delta-\delta_{2m}))M_m D_m N_m \exp(W(\omega_{1m}) \times$$
$$\times (2\delta-\delta_{1m}))\exp(U\delta_{1m}). \tag{14}$$

Величины параметров $\delta_{1m}, \delta_{2m}, \omega_{1m}, \omega_{2m}$ выберем так, чтобы

$$R_m = N_m \exp(W(\omega_{1m})(2\delta-\delta_{1m}))\exp(U\delta_{1m}), \tag{15}$$

$$S_m = \exp(U\delta_{2m})\exp(W(\omega_{2m})(2\delta-\delta_{2m}))M_m. \tag{16}$$

Это всегда можно сделать, поскольку матрицы $N_m^{-1}R_m$, $S_m M_m^{-1}$ являются ортогональными и, следовательно, представимы в виде

$$N_m^{-1}R_m = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{1m} & \sin\alpha_{1m} \\ -\sin\alpha_{1m} & \cos\alpha_{1m} \end{pmatrix},\ 0<\alpha_{1m}\leqslant 2\pi,$$

$$S_m M_m^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{2m} & \sin\alpha_{2m} \\ -\sin\alpha_{2m} & \cos\alpha_{2m} \end{pmatrix},\ 0<\alpha_{2m}\leqslant 2\pi.$$

Поэтому достаточно положить

$$\delta_{km} = \begin{cases} (\alpha_{km}+2\pi)d^{-1}, & \text{если}\ \ 0<\alpha_{km}d^{-1}\leqslant 0.5\delta, \\ \alpha_{km}d^{-1}, & \text{если}\ \ 0.5\delta<\alpha_{km}d^{-1}\leqslant\delta, \end{cases} \quad k=1,\,2.$$

В качестве ω_{1m} и ω_{2m} выберем такие числа, чтобы $\omega_{km}(2\delta-\delta_{km})=2\pi$, $k=1, 2$. При таком выборе параметров получим

$$0.5\delta\leqslant\delta_{1m},\ 2\delta-\delta_{1m},\ \delta_{2m},\ 2\delta-\delta_{2m}\leqslant 1.5\delta, \tag{17}$$

причем $N_m^{-1}R_m = \exp(U\delta_{1m})$, $S_m M_m^{-1} = \exp(U\delta_{2m})$, а матрицы $\exp(W \times \times (\omega_{km})(2\delta-\delta_{km}))$, $k=1,\,2$, являются единичными.

Окончательно из соотношений (11)—(16) получаем $X_m = Y_m$ и тогда из (10) имеем для всех натуральных n

$$X(nl) = Y(nl). \tag{18}$$

Случай 2°. Пусть теперь для некоторого m на промежутке Δ_m матрица $P(t)$ имеет вид

$$P_m = \begin{pmatrix} (-1)^i a & (-1)^r b \\ 0 & (-1)^{1-i} a \end{pmatrix},\ i,\ r=0,1.$$

Рассмотрим функцию $f(c) = 2+16\pi^2\delta^{-2}c^{-2}(\exp(c\delta)-1)^2$. При всех $c>0$ выполнено $f(c)>2+16\pi^2$ и $f(c)\to+\infty$ при $c\to+\infty$. Поэтому существует такое положительное c_1, что $f(c_1) = 2\operatorname{ch}2al + b^2a^{-2}\operatorname{sh}^2 al$, так как при выбранном в силу (6) значении b имеем $2\,\mathrm{ch}\,2al + b^2a^{-2}\,\mathrm{sh}^2 al > 2 + 16\pi^2$. Следовательно, характеристическое уравнение матрицы $\exp(P_m l)\exp(P_m^T l)$, имеющее вид $\nu^2 - \nu(2\,\mathrm{ch}\,2al + b^2a^{-2}\,\mathrm{sh}^2\,al) + 1 = 0$, совпадает с характеристическим уравнением $\nu^2 - \nu f(c_1) + 1 = 0$ матрицы $\exp(V_1(c_1)\delta)\exp(V_0\times\times(c_1)\delta)\exp(V_0^T(c_1)\delta)\exp(V_1^T(c_1)\delta)$. Таким образом, из [6, с. 258, 260] следуют представления, аналогичные (11) и (12):

$$X_m = \exp(P_m l) = \tilde{S}_m\tilde{D}_m\tilde{R}_m,\ \exp(V_1(c_1)\delta)\exp(V_0(c_1)\delta) = \tilde{M}_m\tilde{D}_m\tilde{N}_m.$$

Определим теперь на промежутке Δ_m матрицу Q_m следующим образом:

$$Q_m(t) = \begin{cases} U\ , & t\in[ml,\ ml+\tilde{\delta}_{1m}[,\\ W(\tilde{\omega}_{1m}), & t\in[ml+\tilde{\delta}_{1m},\ ml+2\delta[,\\ V_0(c_1), & t\in[ml+2\delta,\ ml+3\delta[,\\ V_1(c_1), & t\in[ml+3\delta,\ ml+4\delta[,\\ W(\tilde{\omega}_{2m}), & t\in[ml+4\delta,\ ml+l-\tilde{\delta}_{2m}[,\\ U\ , & t\in[ml+l-\tilde{\delta}_{2m},\ ml+l[, \end{cases} \tag{19}$$

где числа $\tilde{\delta}_{1m}$, $\tilde{\delta}_{2m}$, $\tilde{\omega}_{1m}$, $\tilde{\omega}_{2m}$ выбраны тем же способом, что и аналогичные им параметры в предыдущем случае. Поэтому, во-первых,

$$0.5\delta \leqslant \tilde{\delta}_{1m},\ 2\delta - \tilde{\delta}_{1m},\ \tilde{\delta}_{2m},\ 2\delta - \tilde{\delta}_{2m} \leqslant 1.5\delta, \tag{20}$$

во-вторых, при всех m будет выполнено $X_m = Y_m$, где

$$Y_m = \exp(U\tilde{\delta}_{2m})\exp(W(\tilde{\omega}_{2m})(2\delta - \tilde{\delta}_{2m}))\tilde{M}_m\tilde{D}_m\tilde{N}_m\times$$

$$\times\exp(W(\tilde{\omega}_{1m})(2\delta - \tilde{\delta}_{1m}))\exp(U\tilde{\delta}_{1m}).$$

Следовательно, соотношение (18) выполнено и в рассматриваемом случае.

Покажем теперь, что система (7) асимптотически эквивалентна системе (9) с матрицей Q, построенной по формулам (13), (19). Для этого рассмотрим матрицу $L(t) = X(t)Y^{-1}(t)$.

Из соотношения (18) следует, что при всех натуральных n матрица $L(nl)$ является единичной. Кроме того, поскольку существует лишь конечное число различных матриц P_m вида (8), то конечным будет и число различных матриц Q_m. Поэтому матрицы $L(t)$ и $L^{-1}(t)$ ограничены при всех $t\geqslant 0$. В силу ограниченности матриц $P(t)$ и $Q(t)$ ограниченной будет также и матрица $DL(t)$. Таким образом, матрица L является матрицей Ляпунова, откуда и следует асимптотическая эквивалентность систем (7) и (9), а следовательно, асимптотически эквивалентны будут системы (9) и (3).

Воспользуемся еще раз β-преобразованием, применив его к системе (9), $y = \mathrm{diag}\,\{1, d^{-1}\}z$. При этом полученная система

$$Dz = F(t)z \tag{21}$$

будет асимптотически эквивалентна системе (9), а следовательно, и системе (3), которая соответствует исходному уравнению (1). Кроме того, кусочно-постоянные коэффициенты системы (21) принимают лишь конечное число значений, а длины их промежутков постоянства в силу (17) и (20) ограничены снизу положительным числом $\delta/2$, причем структура матрицы F такова, что система (21) соответствует некоторому линейному уравнению второго порядка. Теорема доказана.

Summary

An asymptotical equivalence of linear differential equations is studied. It is show
that for any second order linear differential equation with bounded coefficients there exis
the asymptotically equivalent equation with piecewise constant coefficients and a speci
sequence of points of discontinuity.

Литература

1. Изобов Н. А. // Математический анализ. Т. 12. М., 1974. 2. Богдано Ю. С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 6. С. 707—716. 3. Мазаник С. А. Доклады АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 399—401. 4. Мазаник С. А. // Дифферен уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 220—226. 5. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э Гробман Д. М., Немыцкий В. В. // Теория показателей. М., 1967. 6. Гантм хер Ф. Р. // Теория матриц. М., 1967.

Белорусский государственный университет

Поступило 17.06.9