где r_{ij} — вещественные числа, $r_{i0} > r_{i1} > \cdots > r_{ij} > \cdots$, $r_{ij} \to -\infty$ при $j \to \infty$, a_{ij} — комплексные числа, $j = 0, 1, \ldots$), то ФСР (2) может быть представлена в виде

$$\{x_j(t) = (1 + o(1))\, t^{k_j} \exp \int \lambda_j(t)\, dt\} \text{ при } t \to +\infty. \tag{4}$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$X' = A(t) X, \tag{5}$$

где $A(t)$ — квадратная матрица-функция n-го порядка, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')^T$ — матрица-столбец производных.

Рассмотрим линейную форму

$$x = b_1(t) x_1 + b_2(t) x_2 + \cdots + b_n(t) x_n. \tag{6}$$

Пусть $A(t) \in G$ и $b_i(t) \in G$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где G — поле типа M. Продифференцируем линейную форму (6) $n-1$ раз в силу системы (5). В результате получим линейное преобразование $Y = B(t) X$, где $Y = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})^T$, $B(t) \in G$. Можно так подобрать функции $b_i(t) \in G$, чтобы $\det B(t) \neq 0$ при $t \gg 1$. Относительно Y получим

$$Y' = F(t) Y, \tag{7}$$

где $F(t) = B'(t) B^{-1}(t) + B(t) A(t) B^{-1}(t)$ — матрица вида

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ q_n(t) & q_{n-1}(t) & q_{n-2}(t) & \ldots & q_2(t) & q_1(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вычисление компоненты x сводится к решению дифференциального уравнения (1), характеристическим уравнением которого будет

$$\det [B^{-1}(t) B'(t) + A(t) - \lambda E] = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) мы называем уточненным характеристическим уравнением системы (5).

Приведенные тождественные преобразования системы (2) обосновывают возможность применения к ней стандартной процедуры ее асимптотического интегрирования. В работе [1] описывается такая процедура и приводится пример асимптотического интегрирования системы двух линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Литература

1. Л а н ц м а н М. Х. Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, имеющими степенной порядок роста. Минск, 1985. Деп. в ВИНИТИ, № 8108—В85.

2. Л а н ц м а н М. Х. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 711—713.

Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт, г. Москва

Поступила в редакцию 29 мая 1984 г.

УДК 517.926

С. А. МАЗАНИК

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЯПУНОВА

В работах [1, 2] было показано, что для любой системы

$$\frac{dx}{dt} = Px, \; P = (p_{ij}), \; i, j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

с ограниченными коэффициентами существует асимптотически эквивалентная система

$$\frac{dy}{dt} = Qy, \; Q = (q_{ij}), \; i, j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами и ограниченными снизу длинами промежутков постоянства. Особый интерес представляет сведение системы (1) к системе с кусочно-постоянными коэффициентами и бесконечно большой последовательностью длин промежутков постоянства (см., например, [3—5]). Настоящая работа и посвящена исследованию этого вопроса.

Введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, $\mathbf{N}$ — множество натуральных, а $\mathbf{Z}_0$ — множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через Ω множество определенных на промежутке $[0, +\infty[$ функций p, интегрируемых на любом ограниченном промежутке $[\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \alpha < \beta$, и таких, что

$$\omega(p) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |p(t)| \leqslant 0.$$

Пусть Ω_a — подмножество таких функций p из Ω, что

$$|p(t)| \leqslant a, \ \forall t \in [0, +\infty[.$$

Через $\mathbf{D}$ обозначим множество кусочно-постоянных функций, последовательность точек разрывов которых является подпоследовательностью последовательности (T_n), обладающей следующими свойствами:

а) $T_{n+1} = T_n + D_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}_0$, $T_0 = 0$;

б) $D_{n+1} \geqslant D_n$, $n \in \mathbf{Z}_0$, $D_0 = 0$;

в) $\lim\limits_{n \to \infty} D_n = +\infty$; г) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{D_{n+1}}{T_n} = 0$.

Подмножество функций из $\mathbf{D}$, принимающих только два значения a и $-a$, обозначим $\mathbf{D}_a$.

Лемма 1. *Для любой функции p, $p \in \Omega_a$, существует такая функция q, $q \in \mathbf{D}_a$, что для любых t, $t \in [T_{n-1}, T_n[$, $n \in \mathbf{N}$, имеет место неравенство*

$$\left| \int_0^t (p(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| \leqslant a D_n. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим, что требуемая функция q уже построена на промежутке $[0, T_{n-1}[$, $n \geqslant 2$. Тогда для $t \in [T_{n-1}, T_n[$ положим

$$q(t) = \begin{cases} a, \text{ если } 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{T_{n-1}} (p(\tau) - q(\tau))\, d\tau + \int_{T_{n-1}}^{T_n} p(\tau)\, d\tau \leqslant a(D_{n-1} + D_n), \\ -a, \text{ если } -a(D_{n-1} + D_n) \leqslant \displaystyle\int_0^{T_{n-1}} (p(\tau) - q(\tau))\, d\tau + \int_{T_{n-1}}^{T_n} p(\tau)\, d\tau < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что при таком построении функции q соотношение (3) будет выполнено при $t = T_n$. Поскольку функция $p - q$ на промежутке $[T_{n-1}, T_n[$ оказывается знакопостоянной, то и для любого t, $t \in [T_{n-1}, T_n]$, будет выполнено (3). Соотношение (4) определяет также функцию q и на промежутке $[0, T_1[$, поскольку неравенство (3), очевидно, выполнено при $t = T_0 = 0$.

Следовательно, функцию q можно строить последовательно по формуле (4) на каждом промежутке $[T_{n-1}, T_n[$, $n \in \mathbf{N}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых функций p, q_1, q_2, $p \in \Omega$, $q_1 \in \mathbf{D}_a$, $q_2 \in \mathbf{D}_a$, функция q принадлежит множеству $\mathbf{D} \cap \Omega$, если для $t \in [T_{n-1}, T_n[$, $n \in \mathbf{N}$, выполнено соотношение*

$$q(t) = \frac{\displaystyle\int_{T_{n-1}}^{T_n} p(\tau) \exp\left(\int_{T_{n-1}}^{\tau} (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\, d\sigma \right) d\tau}{\displaystyle\int_{T_{n-1}}^{T_n} \exp\left(\int_{T_{n-1}}^{\tau} (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\, d\sigma \right) d\tau} = \alpha_n. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, что $|\alpha_n| \leqslant \sup\limits_{t \in [T_{n-1}, T_n[} |p(t)|$. Поскольку для любого положительного ε на промежутке $[T_{n-1}, T_n[$ существует такая точка t_n, что

$$\sup_{t \in [T_{n-1}, T_n[} |p(t)| \leqslant |p(t_n)| + \varepsilon,$$

то $|\alpha_n| \leqslant |p(t_n)| + \varepsilon$. Поэтому для $t \in [T_{n-1}, T_n[$, $n \geqslant 2$, имеем

$$\frac{\ln |q(t)|}{t} \leqslant \frac{\ln |\alpha_n|}{T_{n-1}} \leqslant \frac{\ln (|p(t_n)| + \varepsilon)}{T_{n-1}} \leqslant \frac{\ln (2 \max \{|p(t_n)|, \varepsilon\})}{T_{n-1}}.$$

В силу свойств последовательности (T_n) получаем

$$\omega(q) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln|q(t)|}{t} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(2\max\{|p(t_n)|,\ \varepsilon\})}{T_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln 2 + \ln|p(t_n)|}{t_n} \frac{t_n}{T_{n-1}};\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2\varepsilon}{T_{n-1}} \right\} \leqslant \max\{\omega(p),\ 0\} = 0.$$

Следовательно, $q \in \mathbf{D} \cap \Omega$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любых функций p, q_1, q_2, $p \in \Omega$, $q_1 \in \mathbf{D}_a$, $q_2 \in \mathbf{D}_a$, существует такая кусочно-постоянная функция q, $q \in \mathbf{D} \cap \Omega$, что функция*

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))\,d\tau\right) \int_0^t (p(\tau) - q(\tau)) \exp\left(\int_0^\tau (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\,d\sigma\right) d\tau$$

принадлежит множеству Ω.

Доказательство. Функцию q строим последовательно на промежутках $[T_{n-1}, T_n[$, $n \in \mathbf{N}$, по формуле (5). Поскольку при всех t, $t \in [T_{n-1}, T_n[$, имеем

$$F(t) = \exp\left(\int_0^{T_{n-1}} (q_1(\tau) - q_2(\tau))\,d\tau\right) \exp\left(\int_{T_{n-1}}^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))\,d\tau\right) \times$$

$$\times \left(\int_0^{T_{n-1}} (p(\tau) - q(\tau)) \exp\left(\int_0^\tau (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\,d\sigma\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{T_{n-1}}^t (p(\tau) - q(\tau)) \exp\left(\int_0^\tau (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\,d\sigma\right) d\tau\right) =$$

$$= \exp\left(\int_{T_{n-1}}^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))\,d\tau\right)\left(F(T_n) + \right.$$

$$\left. + \int_{T_{n-1}}^t (p(\tau) - q(\tau)) \exp\left(\int_{T_{n-1}}^\tau (q_2(\sigma) - q_1(\sigma))\,d\sigma\right) d\tau\right)$$

и $F(T_0) = 0$, то и при всех $n \in \mathbf{N}$ выполнено $F(T_n) = 0$. Таким образом, для всех t, $t \in [T_{n-1}, T_n[$, имеем

$$|F(t)| \leqslant \exp(4aD_n) \int_{T_{n-1}}^t (p(\sigma) - q(\sigma))\,d\sigma \leqslant 2\exp(4aD_n)\,D_n\,(|p(t_n)| + \varepsilon),$$

где ε — любое положительное число, а точка t_n, $t_n \in [T_{n-1}, T_n[$, выбрана таким образом, что

$$\sup_{t \in [T_{n-1}, T_n[} |p(t)| \leqslant |p(t_n)| + \varepsilon.$$

Следовательно, для $t \in [T_{n-1}, T_n[$, $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln|F(t)|}{t} \leqslant \frac{4aD_n + \ln 2D_n + \ln(|p(t_n)| + \varepsilon)}{T_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4aD_n + \ln 2D_n}{T_{n-1}} + \frac{\ln(2\max\{|p(t_n)|,\ \varepsilon\})}{T_{n-1}}.$$

Учитывая свойства последовательности (T_n), так же, как и при доказательстве леммы 2, получаем $\omega(F) \leqslant \max\{\omega(p),\ 0\} = 0$.

Итак, $F \in \Omega$. В силу леммы 2 построенная функция q принадлежит $\mathbf{D} \cap \Omega$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что системы (1) и (2) верхнетреугольные, т.е. $p_{ij} = q_{ij} = 0$ для всех $i > j$. Обозначим через $S = (s_{ij})$ матрицу перехода от системы (1) к системе (2), которую можно представить в виде

$$S = XY^{-1},$$

где $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ — нормированные в нуле фундаментальные матрицы решений систем (1) и (2) соответственно. Известно (см., например, [2]), что элементы матрицы S удовлетворяют соотношениям:

$$s_{ii}(t) = x_{ii}(t)/y_{ii}(t),\ \forall i = \overline{1,\ n},$$

$$s_{ij}(t)=\frac{x_{ii}(t)}{y_{ii}(t)}\int_0^t\left(\sum_{k=i+1}^{j}p_{ik}(\tau)s_{kj}(\tau)-\sum_{k=i}^{j-1}q_{kj}(\tau)s_{ik}(\tau)\right)\frac{y_{jj}(\tau)}{x_{ii}(\tau)}\,d\tau,$$

$$\forall i=\overline{1,\,n-1},\ \forall j,\ i+1\leqslant j\leqslant n,$$

где

$$x_{ii}(t)=\exp\left(\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau\right),\quad y_{ii}(t)=\exp\left(\int_0^t q_{ii}(\tau)\,d\tau\right).$$

В силу леммы 1, если только $p_{ii}\in\Omega_a$, то коэффициенты q_{ii} системы (2) можно построить таким образом, что $q_{ii}\in \mathbf{D}_a$, и при этом

$$s_{ii}\in\Omega,\ \det{}^{-1}S\in\Omega.$$

Если же коэффициенты p_{ij}, $i<j$, системы (1) принадлежат множеству Ω, то коэффициенты q_{ij}, $i<j$, системы (2) можно в силу теоремы 1 выбрать такими, что $q_{ij}\in\mathbf{D}\cap\Omega$, причем $s_{ij}\in\Omega$. Так как матрица перехода S удовлетворяет уравнению

$$dS/dt=PS-SQ,$$

то все элементы производной матрицы dS/dt также будут принадлежать множеству Ω. Поэтому преобразование $x=Sy$ оказывается обобщенным преобразованием Ляпунова [6, с. 78]. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для любой треугольной системы (1) с локально интегрируемыми коэффициентами, у которой внедиагональные коэффициенты имеют неположительные показатели, а диагональные ограничены, существует обобщенное преобразование Ляпунова, переводящее систему (1) в систему (2), коэффициентами которой являются кусочно-постоянные функции с неограниченно возрастающими длинами промежутков постоянства. Более того, коэффициенты системы (2) можно выбрать таким образом, чтобы последовательность точек разрывов этих функций была подпоследовательностью заранее заданной последовательности (T_n), удовлетворяющей свойствам а)—г).*

Следствие. *Для любой системы с ограниченными локально интегрируемыми на $[0,+\infty[$ коэффициентами существует обобщенное преобразование Ляпунова, переводящее исходную систему в систему с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими разрывы разве лишь в точках последовательности (T_n).*

Доказательство этого утверждения следует из теоремы Перрона о триангуляции и теоремы 2.

Замечание. Из результатов работ [1, 2], в частности, следует, что треугольную систему, асимптотически эквивалентную системе (1), можно последовательно строить на промежутках $[T_{n-1},T_n[$, $n\in\mathbf{N}$, в явном виде, а поэтому и указанную в следствии кусочно-постоянную систему, как это следует из приведенных выше доказательств, можно строить в явном виде последовательно на промежутках $[T_{n-1},T_n[$, $n\in\mathbf{N}$.

Автор выражает благодарность проф. Ю. С. Богданову за внимание к работе.

Литература

1. Богданов Ю. С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 6. С. 707—716.
2. Мазаник С. А. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 923—926.
3. Изобов Н. А. // Тр. II Респ. конф. математиков Белоруссии. Минск, 1969. С. 182—185.
4. Былов Б. Ф., Тихонова Э. А. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 12. С. 2115—2122.
5. Мазаник С. А. // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ., мат. и мех. 1983. № 2. С. 65—67.
6. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники / Мат. анализ. М., 1974. Т. 12. С. 71—146.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 30 ноября 1984 г.