Доклады Академии наук БССР

1981 Том XXV № 5

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ МАТРИЦАМИ

(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)

Обозначим через P_α совокупность функций p, определенных на $[0, +\infty[$, интегрируемых на любом ограниченном промежутке положительной полуоси, и таких, что $|p|\leqslant\alpha$. Через Q_α обозначим совокупность кусочно-постоянных функций, определенных на $[0, +\infty[$ и принимающих только два значения α, $-\alpha$. Через $P_\alpha(T)$ обозначим сужение функций из P_α на промежуток T. Z_0 — множество целых неотрицательных чисел.

Приведем без доказательства несколько лемм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Для любых* $\alpha>0$, $t_0>0$, $h>0$, $l>0, q\in P_\alpha([0, t_0[)$, $p\in P_\alpha([0, t_0+l[)$ *существует* $a\in\{-\alpha, \alpha\}$ *такое, что если*

$$\left|\int_0^{t_0}(p(\tau)-q(\tau))\,d\tau\right|\leqslant h,$$

то

$$\left|\int_0^{t_0}(p(\tau)-q(\tau))\,d\tau+\int_{t_0}^{t_0+l}p(\tau)\,d\tau-al\right|\leqslant\max(h, \alpha l).$$

Лемма 2. *Для любых* $\alpha>0$, $t_0>0$, $h>0$, $l>0$, $p\in P_\alpha([0, t_0+l[)$, $q\in P_\alpha([0, t_0[)$ *существует* a, $|a|\leqslant\alpha+h/l$ *такое, что если*

$$\left|\int_0^{t_0}(p(\tau)-q(\tau))\,d\tau\right|\leqslant h,\quad \textit{то}\quad \left|\int_0^{t_0}(p(\tau)-q(\tau))\,d\tau+\int_{t_0}^{t_0+l}p(\tau)\,d\tau-al\right.=0.$$

Теорема 1. *Для любых* $\beta>0$, $\alpha>0$, $L>0$, $p\in P_\alpha$, *для любой последовательности* (t_n) *такой, что* $t_1=0$, $t_n\to+\infty$ *при* $n\to\infty$, *и для* $t_k\in[m, m+1[$, $m\in Z_0$, $t_{k+1}-t_k\leqslant L\exp(-m\beta)$, $t_{k+1}>t_k$ *существует функция* $q\in Q_\alpha$ *такая, что*

$$\left|\int_t^{\infty}(p(\tau)-q(\tau))\,d\tau\right|\leqslant M\exp(-\beta t)$$

для любого $t\in[0, +\infty[$, *где* M — *некоторое положительное число.*

Доказательство. I. Докажем, что существует кусочно-постоянная функция f такая, что имеет место неравенство

$$\left|\int_0^{t}(p(\tau)-f(\tau))\,d\tau\right|\leqslant M_1\exp(-\beta t),\tag{1}$$

где M_1 — некоторое положительное число, $t\in[0, +\infty[$.

Рассмотрим промежуток $[m, m+1[$. Он разбит точками t_{m_k}, $m \leqslant t_{m_1} < t_{m_2} < \ldots < t_{m_s} \leqslant m+1$, причем $m_{k+1} = m_k + 1$, $t_{m_{k+1}} - t_{m_k} \leqslant L \exp(-m\beta)$. Предположим, что искомая функция f уже построена на промежутке $[0, t_{m_1}[$ и такова, что

$$\left|\int\limits_0^{t_{m_1}} (p(\tau) - f(\tau))\, d\tau\right| \leqslant \alpha L \exp(-m\beta). \tag{2}$$

Функцию f на промежутке $[t_{m_1}, t_{m_s}[$ строим последовательно на каждом из $[t_{m_k}, t_{m_{k+1}}[$, $k = \overline{1, s-1}$, в соответствии с леммой 1. Тогда в силу монотонности интеграла $\int\limits_0^t (p(\tau) - f(\tau))\, d\tau$ по t на любом $[t_{m_k}, t_{m_{k+1}}[$, $k = \overline{1, s-1}$, неравенство

$$\left|\int\limits_0^t (p(\tau) - f(\tau))\, d\tau\right| \leqslant \alpha L \exp(-m\beta)$$

выполняется для любого $t \in [t_{m_k}, t_{m_{k+1}}[$, $k = \overline{1, s-1}$. На промежутке $[t_{m_s}, t_{(m+1)_1}[$ функцию f строим в соответствии с леммой 2. Тогда очевидно, что для $t_{(m+1)_1}$ выполняется условие, аналогичное условию (2), а также, что

$$\left|\int\limits_0^t (p(\tau) - f(\tau))\, d\tau\right| \leqslant 4\alpha L \exp(-m\beta), \quad \forall t \in [t_{m_s}, t_{(m+1)_1}[.$$

Возьмем $M_1 = 4\alpha L \exp(2\beta)$. Тогда очевидно, что для $t \in [m, m+1[$ имеет место неравенство (1). Так как условие, аналогичное (2), выполнено для $t_{0_1} = t_1 = 0$, то по индукции получаем требуемое утверждение на всем промежутке $[0, +\infty[$.

II. Искомую функцию $q \in Q_\alpha$ строим следующим образом:

$$q(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } f(t) \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{если } f(t) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для любого $m \in Z_0$ имеем

$$\int\limits_{t_{m_1}}^{t_{m_s}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau = 0,$$

а также

$$\left|\int\limits_{t_{m_s}}^{t_{(m+1)_1}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau\right| \leqslant 2\alpha L \exp(-m\beta). \tag{3}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(-k\beta), \tag{4}$$

где $c_k \exp(-k\beta) = \int\limits_{t_{k_1}}^{t_{(k+1)_1}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau$.

В силу (3) $|c_k| \leqslant 2\alpha L$, и, следовательно, ряд (4) сходится. Так как на промежутке $[t_{m_1}, t_{(m+1)_1}[$ интеграл $\int\limits_0^t (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau$ монотонен по t, то для $t \in [t_{m_1}, t_{(m+1)_1}[$

$$\min_{i=m-1,m} \sum_{k=0}^{i} c_k \exp(-k\beta) \leqslant \int_0^t (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau \leqslant \max_{i=m-1,m} \sum_{k=0}^{i} c_k \exp(-k\beta). \quad (5)$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau$ сходится.

Остаток ряда (4) удовлетворяет неравенству

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \exp(-k\beta) \right| \leqslant 2\alpha L \exp(-n\beta)/(1 - \exp(-\beta)).$$

Поэтому, учитывая неравенство (5), получаем, что

$$\left| \int_t^{\infty} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| \leqslant M_1 \exp(-\beta t)\,(1 + 1/(2 - 2\exp(-\beta)))$$

для любого $t \in [0, +\infty[$.

Таким образом, для любого $t \in [0, +\infty[$

$$\left| \int_t^{\infty} (p(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| = \left| \int_t^{\infty} (p(\tau) - f(\tau))\, d\tau + \int_t^{\infty} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \exp(-\beta t),$$

где $M = M_1(2 + 1/(2 - 2\exp(-\beta)))$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого $\alpha > 0$ среди систем*

$$d\mathbf{y}/dt = Q\mathbf{y}, \quad Q = (q_{ij}),\ q_{ij} \in P_\alpha, \quad i,\ j = \overline{1,\ n},$$

асимптотически эквивалентных данной системе

$$d\mathbf{x}/dt = P\mathbf{x}, \quad P = (p_{ij}), \quad p_{ij} \in P_\alpha, \quad i,\ j = \overline{1,\ n},$$

всегда существует система с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов, элементы которой принимают лишь два значения, причем последовательность точек разрыва функций q_{ij} является подпоследовательностью последовательности (t_n) такой, что $t_1 = 0$, $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, и для $t_k \in [m, m+1[$, $m \in Z_0$, имеет место неравенство $t_{k+1} - t_k \leqslant L \exp(-m\beta)$, где $L > 0$ — произвольное число, а $\beta > 0$ зависит только от α.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и достаточно условия асимптотической эквивалентности (см. [1]).

Замечание. *Из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1, следует способ построения асимптотически эквивалентной системы за конечное число шагов на каждом ограниченном промежутке положительной полуоси.*

В заключение автор выражает благодарность Ю. С. Богданову за полезные советы и замечания.

Summary

For any linear differential system with finite coefficients the method is proposed for construction of an asymptotically equivalent system with a piecewise constant matrix of the coefficients. The elements of the matrix admit only two values and may only have discontinuities at the points of the prescribed sequence.

Литература

[1] Богданов Ю. С. ДУ, 1965, т. 1, № 6, с. 707—716.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 13.11.80