

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**И ИНФОРМАТИКИ**  
Кафедра математической физики

---

**А.И. Урбанович**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

**Курс лекций**

---

МИНСК  
2008

**УДК 537-538(075)**

**ББК 22.23**

**М33**

**Урбанович А.И.**

**Электродинамика: курс лекций.**

**/А.И. Урбанович. – Минск: БГУ, 2008. – 99с.**

## Введение

Настоящий курс лекций посвящен изложению основ электродинамики.

Физика как фундаментальная естественнонаучная дисциплина предназначена для формирования у студентов физического образа мышления. Представленный курс ставит целью обучение студентов старших курсов основным законам электродинамики, построению математических моделей электромагнитных явлений, а также их анализу на основе аналитических решений ряда задач. Электромагнитные явления наиболее широко представлены в окружающем нас мире. Чрезвычайно велико значение теории электромагнитных явлений. Она сыграла решающую роль в возникновении и обосновании и обосновании теории относительности и явилась тем «полигоном», на котором проходили проверку многие новые идеи.

Существует два пути обоснования и изложения теории электромагнитных явлений, а именно: с теорией относительности или без нее. В курсе выбран второй путь, где в качестве экспериментальных основ теории взяты инвариантность элементарного заряда, закон сохранения заряда, закон Кулона, принцип суперпозиции для электрического поля, закон Био-Савара, принцип суперпозиции для магнитного поля, сила Лоренца, закон электромагнитной индукции Фарадея, закон сохранения энергии, токи смещения, система уравнений Максвелла. В соответствии с таким путем изложения материала в курсе можно выделить четыре раздела:

- электрическое поле при наличии проводников;
- энергия электрического поля и постоянный электрический ток;
- магнитное поле и электромагнитная индукция;
- электромагнитные волны.

В первом разделе дана классификация микроскопических носителей электрических зарядов и рассмотрены основные законы электростатики как в интегральной так и в дифференциальной форме. Для нахождения напряженности электрического поля используется электростатическая теорема Гаусса, а для расчета потенциалов используется уравнение Лапласа и Пуассона. Рассматривается также метод электростатических изображений, изучается электростатическое поле при наличии диэлектриков и полупроводников.

Второй раздел охватывает вопросы, связанные с энергией электрического поля и электрическим током в проводниках, рассматриваются методы расчета линейных цепей.

Третий раздел посвящен магнитным явлениям, вызываемым стационарными токами в вакууме и магнетиках, явлению электромагнитной индукции. Конечным результатом материала, изложенного в этих разделах является система уравнений Максвелла, которая затем используется в четвертом разделе

для описания волновых процессов, протекающих в вакууме, линейных диэлектриках и проводниках. Обращается внимание на вопросы о границах применимости теории и области применимости используемых в теории понятий и моделей.

Представленный курс «Электродинамика» читается для студентов факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета по специальности 1- 31.03.03 «Прикладная математика».

### Основные формулы, соотношения и теоремы

Пусть  $V$  некоторая область трехмерного пространства. Если каждой точке  $M$  области  $V$  поставлено в соответствие одно и только одно действительное число  $f(M)$ , то говорят, что в области  $V$  задано скалярное поле  $f=f(M)$ . Если же каждой точке  $M$  области  $V$  поставлен в соответствие один и только один вектор  $\vec{a}(M)$ , то говорят, что в области  $V$  задано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(M)$ . В фиксированной декартовой системе координат  $Oxyz$  задание скалярного поля равносильно заданию скалярной функции  $f=f(x,y,z)$ , а векторного поля — заданию векторной функции  $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z)$ , причем

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k},$$

где  $a_x, a_y, a_z$  — компоненты вектора  $\vec{a}$  соответственно по осям  $Ox, Oy, Oz$ .

В дальнейшем будем считать, что функция  $f(x,y,z)$  и компоненты  $Ox, Oy, Oz$  непрерывны в области  $V$  вместе со своими частными производными.

В курсе электродинамики и рассматриваются скалярные и векторные величины, зависящие в общем случае от координат  $(x,y,z)$  и времени  $t$ .

Основной характеристикой скалярного поля является градиент.

*Градиент* — это векторная функция, аргументом у которой является скалярная функция точки. Если  $f(x,y,z)$  — скалярная функция заданная в точке  $M(x,y,z)$ ,

$$\text{то } \text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Нормальная производная* или *производная вдоль нормали* — это скалярное произведение вектора  $\text{grad } f$  на вектор нормали  $\vec{n}$ , т. е.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \text{grad } f \cdot \vec{n}$  и она характеризует быстроту изменения поля  $f$  по направлению  $\vec{n}$ .

Пусть заданы два вектора:  $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z$

*Скалярное произведение:*  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$\text{Векторное произведение: } [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

*Дивергенция* — скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки. Пусть  $\vec{a}(x, y, z)$  — векторная функция и  $a_x, a_y, a_z$  — проекции

этой функции на оси координат, тогда  $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ .

*Ротор* — это векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки, т.е.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

*Оператор Лапласа в декартовой системе координат:*  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

*Оператор Гамильтона (символический вектор):*  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ .

С его помощью можно записать градиент, дивергенцию и ротор, а именно:

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{grad} f ;$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a} ;$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a} ;$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

### **Наиболее часто встречаемые формулы.**

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f ,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 ,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 ,$$

$$\operatorname{div} f \vec{a} = f \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} f ,$$

$$\operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} ,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

### Циркуляция вектора.

Пусть задана дуга АВ и произвольная точка М на ней.  $\vec{a}(M)$  векторное поле. Циркуляцией вектора  $\vec{a}$  по дуге АВ называется значение криволинейного интеграла  $\int_A^B (\vec{a} d\vec{l})$ , где  $d\vec{l}$  — элемент дуги.

Если векторное поле  $\vec{a} = \text{grad}f$ , то  $\int_A^B (\text{grad}f \cdot d\vec{l}) = f(A) - f(B)$ , т.е. циркуляция зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования.

### Поток вектора.

Пусть задана двухсторонняя поверхность S. M - переменная точка на этой поверхности. Возьмем элементарную площадку  $dS$ , содержащую точку M, и проведем вектор единичной нормали  $\vec{n}$ . Введем обозначение:  $d\vec{S} = dS\vec{n}$ . Пусть задано векторное поле  $\vec{a}(M)$ . Тогда потоком вектора  $\vec{a}$  через поверхность S, ограничивающую некоторый объем V называют значение двойного интеграла:

$$\iint_S (\vec{a} d\vec{S}) = \oint_S (\vec{a} d\vec{S}).$$

### Теорема Остроградского-Гаусса.

Теорема Остроградского-Гаусса — это теорема, выраженная формулой:

$$\iiint_V \text{div } \vec{a} dV = \iint_S (\vec{a} d\vec{S}) \quad \text{или} \quad \int_V \text{div } \vec{a} dV = \oint_S (\vec{a} d\vec{S})$$
 — интеграл от дивергенции  $\vec{a}$ ,

распространенный на объеме V, равен потоку вектора  $\vec{a}$ , направленному по внешней нормали  $\vec{n}$  через замкнутую поверхность S, ограничивающую этот объем. С физической точки зрения эта теорема может быть сформулирована так:

Если внутри объема V имеются источники, порождающие векторное поле  $\vec{a}$ , то имеются и стоки.

### Формула Стокса.

Предположим, имеется замкнутый контур l, ограничивающий поверхность S, и задано векторное поле  $\vec{a}(M)$ . Тогда циркуляция вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру равна потоку вектора  $\text{rot } \vec{a}$  через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\int_l \vec{a} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S} \quad \text{или} \quad \oint_l \vec{a} d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S}.$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где  $\theta$  — полярный угол;  $\varphi$  — азимутальный угол.

### **Фундаментальные силы в природе.**

В настоящее время в физике известны четыре вида взаимодействий материальных объектов:

- гравитационное;
- электромагнитное;
- сильное;
- слабое.

Эти взаимодействия проявляют себя в различных пространственных масштабах, т.е. для каждого из них существует свой радиус взаимодействия (расстояние, на котором данное взаимодействие заметно), и характеризуется своей интенсивностью.

Гравитационное взаимодействие заметно между телами астрономических масштабов и радиус его взаимодействия огромен.

Сильное взаимодействие обнаруживает себя между определенными частицами при их сближении на расстояние порядка  $10^{-15}$ - $10^{-14}$  м. Сильное взаимодействие связывает между собой нуклоны (протоны и нейтроны) в ядре и именно оно ответственно за различные ядерные процессы, при которых освобождается огромное количество энергии.

Слабое взаимодействие осуществляется при взаимопревращении некоторых частиц и радиус этого взаимодействия порядка  $10^{-18}$ - $10^{-17}$  м. Именно благодаря слабому взаимодействию происходит распад свободного нейтрона на электрон  $e^-$ , протон  $p^+$  и антинейтрино  $\nu^*$ , т.е.  $n \Rightarrow e^- + p^+ + \nu^*$ . Время жизни нейтрона в свободном состоянии приблизительно 17 минут.

Электромагнитное взаимодействие проявляется в тех пространственных масштабах, в которых осуществляется наша повседневная жизнь.

Практически все силы, обуславливающие физические явления вокруг нас, кроме гравитационных, являются в конечном итоге силами с электромагнитной природой (силы трения, упругости, вязкости и др.).

Электромагнитные силы проявляют себя от расстояний порядка размеров Земли до атомных расстояний, т.е. в пределах от  $10^7$  до  $10^{-10}$  (м). Электромагнетизм весьма многогранен. Его проявления мы видим в электромоторе, лазере, радиотелескопе, свет тоже имеет электромагнитную природу.

Конечно, все многообразие связи и явления, обусловленные электромагнитными взаимодействиями, не могут быть описаны законами электродинамики, поскольку на каждом уровне явления существуют свои специфические черты и закономерности, не сводимые к закономерностям другого уровня. Однако электромагнитные взаимодействия на всех уровнях являются в определенном смысле элементарной связью, с помощью которой

образуется вся цепь связей. Этим определяется практическое значение электромагнитных явлений.

Очень существенно общепhilosophическое и мировоззренческое значение электромагнетизма. Например, в рамках электромагнитных явлений отчетливо проявляются особенности полевой теории существования материи, хорошо прослеживается взаимопревращение ее различных форм и взаимопревращение различных форм энергии.

## **§1. Микроскопические носители электрических зарядов**

### **Классификация.**

Под микроскопическими носителями зарядов понимают заряженные частицы и ионы. Они могут нести как положительный, так и отрицательный заряд. По числовому значению он может быть лишь в целое число раз больше элементарного:

$$|e| \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

К настоящему времени, не смотря на значительные экспериментальные усилия, не обнаружено микроскопических носителей с дробным зарядом в свободном состоянии.

Известно более 200 частиц и громадное число ионов, атомов и молекул. Большая часть частиц после возникновения существует непродолжительное время, по истечении которого распадается на другие частицы, т.е. частицы имеют конечное время жизни. В большинстве случаев оно чрезвычайно мало и составляет ничтожные доли секунды. Но есть небольшое число заряженных частиц, имеющих бесконечное время жизни. Это электрон, протон и их античастицы: позитрон и антипротон. Протоны входят в состав ядер атомов, а электроны в состав электронных оболочек атомов. Именно эти частицы и обуславливают практически все явления, изучаемые в курсе электричества и магнетизма. В состав ядер входят также и нейтроны. Они электрически нейтральны и время их жизни в составе ядер не ограничено. Однако, вне ядер, т.е. в свободном состоянии, время их жизни порядка 17 минут. Электроны и протоны в свободном состоянии имеют бесконечное время жизни.

Заряженность ионов обуславливается тем, что в состав электронной оболочки атома или молекулы входят “лишние” электроны (отрицательные ионы), или их недостает одного или нескольких (положительные ионы). Поэтому вопрос об ионах как микроскопических носителях зарядов сводится к вопросу о зарядах электронов и протонов.

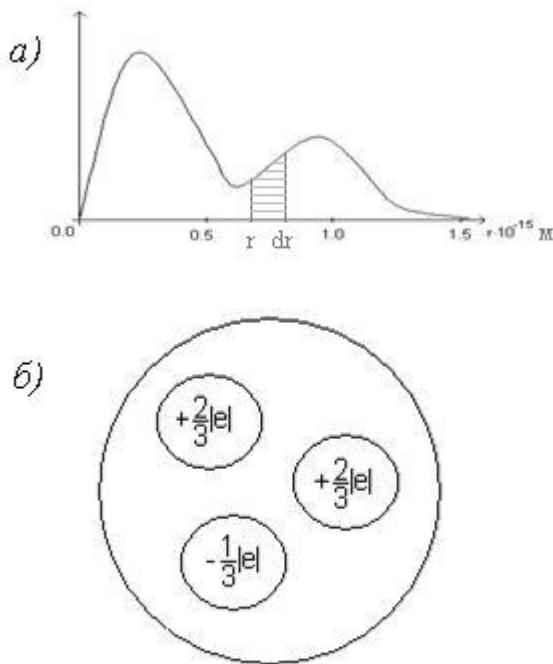
### **Электрон.**

Электрон является материальным носителем элементарного отрицательного заряда  $e^-$ . Обычно принимается, что электрон является точечной бесструктурной частицей, т.е. весь электрический заряд электрона сосредоточен в точке. Такое представление внутренне противоречиво, так как энергия электрического поля, создаваемого точечным зарядом, бесконечна, а,



следовательно, должна быть бесконечной и инертная масса точечного заряда, что противоречит эксперименту, поскольку масса электрона равна  $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Однако с этим противоречием приходится мириться вследствие отсутствия более удовлетворительного и менее противоречивого взгляда на структуру (или отсутствие структуры) электрона. Трудность бесконечной собственной массы успешно преодолевается при вычислениях различных эффектов с помощью перенормировки массы.

### Протон.



*Рис.1. Электромагнитная структура протона.*

Протон является носителем элементарного положительного заряда  $+|e|$ , но в отличие от электрона протон имеет внутреннюю структуру в распределении заряда. Экспериментами по взаимодействию быстрых заряженных частиц (электронов) с протонами было установлено, что электрический заряд внутри протона распределен по пространству. Была получена характерная кривая, содержащая два ярко выраженных максимума (Рисунок 1а). Если по оси ординат отложить плотность суммарного по всем направлениям заряда на расстоянии  $r$  от центра  $4\pi r^2 \rho(r)$  (поскольку величина  $4\pi r^2 \rho(r) dr$  – полный заряд в сферическом слое, толщиной  $dr$  при плотности  $\rho(r)$ ), то можно видеть что практически весь заряд протона

сосредоточен в шаре порядка  $10^{-15}$  м. После первого максимума  $4\pi r^2 \rho(r)$  не убывает монотонно, а имеет еще один максимум.

### Нейтрон.

Аналогичные эксперименты были проведены также по рассеянию электронов на нейтронах. Оказалось, что внутри нейтрона также имеется электромагнитная структура. Распределение заряда приведено на рисунке 2а.

Очевидно, вблизи центра нейтрона располагается положительный заряд, а дальше от центра – отрицательный. Площади, ограниченные кривыми и осью абсцисс, равны, следовательно, положительный заряд равен отрицательному, и в целом нейтрон электрически нейтрален. Отметим, что размеры областей, в которых сосредоточены электрические заряды у протона и нейтрона примерно одинаковы.

Что означает непрерывное распределение электрического элементарного заряда? Ведь до настоящего времени не удалось обнаружить физических объектов с дробным зарядом. Каков же смысл утверждения, что в объеме  $4\pi r^2 dr$  находится небольшая часть элементарного заряда?

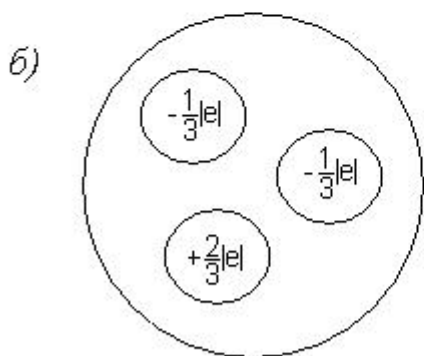
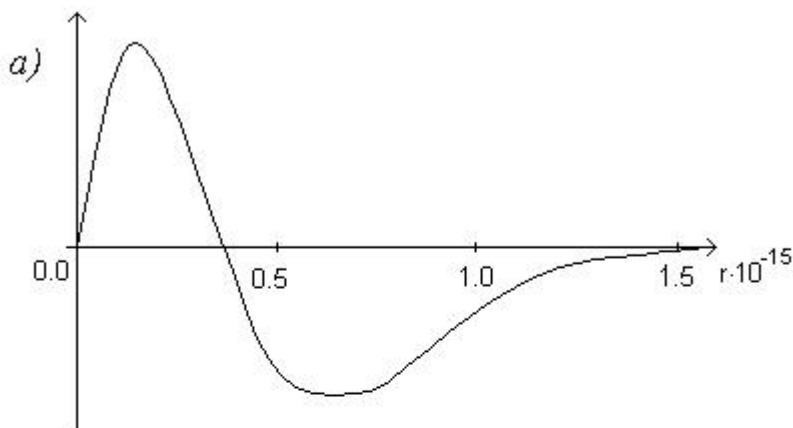


Рис.2. Электромагнитная структура нейтрона.

В настоящее время считается, что протон состоит из двух кварков с зарядами  $+2|e|/3$  и одного с зарядом  $-|e|/3$  (см. рис. 1б). Нейтрон наоборот состоит из двух кварков с зарядом  $-|e|/3$  и одного с зарядом  $+2|e|/3$  (см. рис. 2б). Кварки непрерывно движутся. Их относительное время пребывания на различных

расстояниях от центра может быть эффективно представлено в виде размазанности заряда по объему. В свободном состоянии кварки не обнаружены. В настоящее время считается, что их в принципе нельзя обнаружить в свободном состоянии, поскольку для этого надо затратить бесконечную энергию, а внутри протона и нейтрона они все же существуют. Такое допущение позволяет объяснить многие явления и поэтому принимается в качестве весьма вероятной гипотезы.

### Спин и магнитный момент.

Кроме заряда частицы могут обладать моментом импульса, который называют спином. Спин не обусловлен вращением частицы вокруг оси, ибо для такого объяснения пришлось бы допустить наличие линейной скорости вращения, большей скорости света, что невозможно. Поэтому спин рассматривается как внутреннее свойство частицы и с ним связано наличие у частицы магнитных свойств, а именно наличие магнитного момента, который также не может быть объяснен движением заряда и рассматривается как первоначальное свойство частицы. Отметим, что в классической электродинамике магнитный момент может быть лишь результатом движения зарядов по замкнутым траекториям. Поэтому спиновый магнитный момент частиц не может быть описан в классической теории электричества и магнетизма. Однако магнитное поле,

обусловленное спиновыми магнитными моментами, может быть при необходимости описано феноменологически. Как правило, напряженность этого поля очень мала. Лишь в случае постоянных магнитов оно достигает больших значений. Классическая теория не в состоянии описать механизм возникновения этого поля, но само поле вне постоянных магнитов полностью описывается классической теорией.

### Элементарный заряд и его инвариантность.

Мысль о дискретности электрических зарядов была впервые высказана Франклином в 1752 г., однако, как экспериментальный результат - дискретность электрических зарядов в принципе следует из открытых в 1834 г. М. Фарадеем (1791-1867) законов электролиза. Но этот вывод из законов электролиза был сделан лишь в 1881 г. Г.Л. Гельмгольцем (1821-1894) и Д. Стонеем (1826-1911). В 1895 г. Г. Лоренц (1853-1928) разработал теорию электромагнетизма, основывающуюся на представлении о реально существующих элементарных зарядах (электронах). Числовое значение элементарного заряда было теоретически вычислено на основании законов электролиза. А прямое экспериментальное измерение элементарного заряда было впервые выполнено Милликеном (1868-1953) в 1909 г.

### Опыт Милликена.

Схема опытов Милликена изображена на рисунке 3.

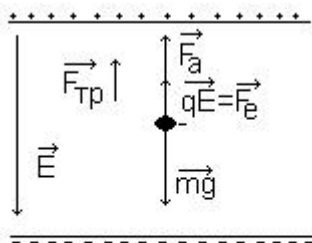


Рис.3. Схема опытов Милликена

Милликен рассматривал движение маленьких шарообразных частиц в вязкой жидкости в электрическом поле  $\vec{E}$  под действием силы тяжести  $m\vec{g}$ , силы Архимеда  $\vec{F}_a$ , электрической силы  $\vec{F}_e$  и силы вязкого трения  $\vec{F}_{тр}$ . Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_{тр} = 0 \quad (1.1)$$

Все силы, кроме  $F_e = qE$  могут быть измерены экспериментально при движении частицы без электрического поля. Значит из (1.1) можно найти  $qE$ , а зная  $E$  найти  $q$ . Заряд частицы меняется с течением времени, что отражается на движении частицы. Найдя  $q_1$  и  $q_2$  в разные моменты времени можно найти  $\Delta q = q_2 - q_1$ . Можно также изменять напряженность электрического поля и добиться, чтобы частица находилась в покое. В этом случае сила трения отсутствует, а остальные силы известны. Поэтому, зная  $E$ , можно определить  $q$ . Произведя большое число измерений зарядов, Милликен нашел, что  $\Delta q$  является всегда кратным одной и той же величине  $|e|$ ; т.е. Милликен установил, что  $\Delta q = n|e|$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $|e| \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Естественно в дальнейшем были разработаны более современные методы (резонансный метод) но результат был один - дробных зарядов в свободном состоянии не существует.

В опытах по измерению зарядов измерялся как положительный так и отрицательный элементарный заряд. В настоящее время экспериментально установлено, что отрицательный элементарный заряд электрона равен по абсолютному значению положительному заряду протона с относительной точностью  $10^{-21}$ , т.е. во всяком случае  $\frac{\|e_+| - |e_-\|}{|e_\pm|} \leq 10^{-21}$  - относительная ошибка.

### **Инвариантность заряда.**

Инвариантность заряда состоит в независимости его численного значения от скорости. Фактически инвариантность доказывается фактом нейтральности атома. Из – за различий масс электрона и протона можно заключить, что электроны в атомах движутся гораздо быстрее протонов. И если бы заряд зависел от скорости, то нейтральность была бы нарушена. В настоящее время экспериментально доказана инвариантность заряда для скоростей электронов вплоть до  $|v_e| \approx 0,5c$ , где  $c=3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме. Нет оснований предполагать, что он не инвариантен и при более высоких скоростях. Поэтому инвариантность заряда принимается в качестве одного из экспериментальных обоснований теории электричества.

## **§2. Электрический ток**

В теории электричества считается, что элементарные заряды считаются точечными, а значит и электроны, и протоны можно принимать за материальные точки.

В большинстве изучаемых макроскопических явлений участвует огромное количество зарядов, и поэтому их дискретность никакого проявления не имеет, а значит можно считать, что заряд непрерывно распределен либо по пространству с объемной плотностью  $\rho$ , или по поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma$ , или вдоль линий с линейной плотностью  $\lambda$ .

### **Объемная плотность зарядов.**

*Объемной плотностью* непрерывного распределения зарядов называется отношение суммы всех элементарных зарядов в объеме к объему:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V_\phi} \sum_{\Delta V_\phi} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V_\phi}, \quad (2.1)$$

где  $e_i$  -элементарные заряды в объеме  $\Delta V_\phi$ ,  $\Delta Q$ -полный заряд заключенный в объеме  $\Delta V_\phi$ ;

$\Delta V_\phi$  -бесконечно малый объем в физическом смысле. Это означает, что он достаточно мал и его положение в пространстве можно определять тройкой

чисел  $(x, y, z)$ , и  $\rho = \rho(x, y, z)$ , но с другой стороны в объеме  $\Delta V_\phi$  находится достаточно большое количество заряженных частиц, так что небольшое изменение числа частиц не сопровождается существенным изменением  $\rho$ , вычисленной по формуле (2.1). Переходя к интегралу можно записать что  $Q = \int_V \rho dV$ ,

$$(2.2)$$

где  $dV$  - дифференциал объема.

### **Поверхностная плотность зарядов.**

Иногда заряд находится в тонком слое вблизи некоторой поверхности. Если нас интересует действие заряда на расстояниях, много больших, чем толщина слоя, а не процессы в этом слое, то можно предположить, что весь заряд сосредоточен на поверхности, или, другими словами, этот очень тонкий слой можно считать поверхностью. В этом случае вводится поверхностная плотность зарядов:

$$\sigma = \frac{1}{\Delta S_\phi} \sum_{\Delta S_\phi} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta S_\phi}, \quad (2.3)$$

где  $\Delta S_\phi$  - бесконечно малая площадь в физическом смысле.

Полный заряд на поверхности  $S$  равен

$$Q = \int_S \sigma dS, \quad (2.4)$$

где  $dS$  – дифференциал площади поверхности.

### **Плотность тока.**

Заряды, находящиеся в объеме  $\Delta V_\phi$ , движутся с разными скоростями, отличными как по модулю, так и по направлению. Движение зарядов приводит к переносу заряда в направлении скорости. Поэтому в результате различных движений зарядов, заключенных в объеме  $\Delta V_\phi$ , образуется некоторый средний перенос заряда, заключенного в этом объеме. Интенсивность этого переноса характеризуется плотностью тока:

$$\vec{j} = \frac{1}{\Delta V_\phi} \sum_{\Delta V_\phi} e_i \vec{v}_i, \quad (2.5)$$

где  $v_i$  - скорость зарядов  $e_i$ .

Введя понятие средней скорости можно показать, что направление плотности тока положительных зарядов совпадает с направлением их средней скорости, а отрицательных - противоположно ей. Тогда

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (2.6)$$

где  $\rho$  и  $\vec{v}$  объемная плотность и средняя скорость зарядов соответственно.

### Сила тока через поверхность.

Вычислим заряд, который за  $dt$  пересекает элемент поверхности  $dS$ .

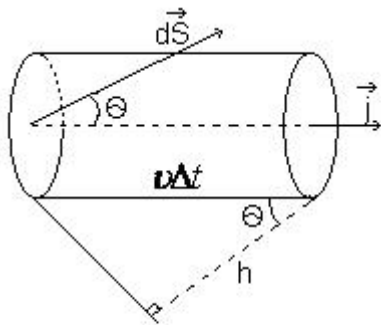


Рис.4. К вычислению силы тока

Перемещение заряда за это время равно  $v dt$ , а значит заряд пересекающий  $dS$  равен объемной плотности заряда умноженной на объем косоуго цилиндра. Площадь основания и высота косоуго цилиндра равны  $dS$  и  $h = v\Delta t \cos \theta$ . Поэтому заряд, пересекший  $dS$ , равен

$$dq = \rho v dt dS \cos \theta = dt j dS \cos \theta = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) dt.$$

Сила тока через поверхность равна отношению заряда, пересекающего поверхность, ко времени.

Поэтому бесконечно малая сила тока  $dJ$ ,

протекающего через элемент поверхности  $d\vec{S}$  равна

$$dJ = \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.7)$$

Сила тока, протекающего через поверхность  $S$  равна интегралу по этой поверхности от элементов силы тока (2.7)

$$J = \int_S dJ = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.8)$$

### **§3. Закон сохранения заряда**

Существует два аспекта понятия закона сохранения заряда:

Аспект 1. Электроны и протоны являются материальными частицами с бесконечным временем жизни, а их элементарные электрические заряды инвариантны - это означает, что при любых движениях их заряды сохраняются. Значит их заряды существуют без изменения столь долго, сколь долго существует протон и электрон независимо от того как они движутся.

Аспект 2. Кроме электронов и протонов существует большое число других заряженных элементарных частиц с конечным временем жизни. Весь громадный экспериментальный материал показывает, что при любых взаимных превращениях частиц суммарный заряд частиц сохраняется.

Соединяя эти два аспекта в один, заключаем: что заряд сохраняется во всех процессах и движениях, связанных с носителями зарядов. Однако, несмотря на относительную самостоятельность, заряд не может существовать независимо от носителей заряда или вне пространства и времени. Это означает, что заряд не является самостоятельной сущностью, независимой от материи, он выражает одно из свойств материи. Еще не ясно, почему существует только один элементарный заряд и почему он равен  $|e|$ , а не какому-то другому значению.

### Интегральная формулировка закона сохранения заряда.

Исходя из закона сохранения заряда, как экспериментального факта можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S (\vec{j} d\vec{S}). \quad (3.1)$$

Это означает: что изменение со временем заряда внутри объема  $V$  может происходить либо за счет втекания, либо за счет вытекания зарядов через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем. Напомним что у замкнутых поверхностей положительной нормалью является вектор  $\vec{n}$  т.е. изменение заряда может быть связано с потоком плотности тока

Знак (-) учитывает тот факт, что если положительный заряд внутри объема уменьшается, то плотность тока направлена под острым углом к вектору положительной нормали к поверхности.

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \quad (3.2)$$

тогда

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0$$

и в силу произвольности объема  $V$  можно заключить, что подынтегральное выражение равно нулю, т.е. справедливо соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) является записью закона сохранения заряда в дифференциальной форме и часто (3.3) называют уравнением непрерывности.

### §4. Закон Кулона. Электрическое поле

Закон Кулона сформулирован для силы взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , т.е. для зарядов, размеры которых малы по сравнению с расстоянием  $r$ , на котором рассматривается данное взаимодействие, и имеет вид:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \quad (4.1)$$

где  $q_1, q_2$  - величины зарядов,  $r$  - расстояние между ними,  $F$  - сила взаимодействия,  $k$  - коэффициент пропорциональности:  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot m^2}{Kl^2}$ . В

некоторых случаях  $k$  записывают:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Kl^2}{H \cdot m^2}$  -

электрическая постоянная, тогда

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}.$$

Он был установлен Ш.О. Кулоном (1736-1806) в 1785 г. Посредством прямых измерений сил взаимодействия между заряженными телами.

Закон Кулона (4.1) входит в число основных экспериментальных фактов, на которых построено учение об электричестве. Проверка его справедливости и установление границ применимости являются важнейшими задачами, на решение которых были направлены значительные усилия экспериментаторов.

Проверка закона (4.1) посредством прямого измерения сил взаимодействия с очень большой точностью затруднительна, поскольку в распоряжении экспериментаторов нет покоящихся точечных зарядов. Поэтому с результатами экспериментов обычно сравнивают следствия из закона Кулона и на этой основе делаются заключения о границах его применимости и точности.

Первая экспериментальная проверка закона была проведена в 1772 г. Г. Кавендишем (1731-1810) за 13 лет до открытия его Кулоном. Однако он не опубликовал своей работы и тем самым потерял приоритет на открытие. Рукопись, содержащая описания его опытов, была найдена в архивах лишь примерно в конце 60-х годов XIX столетия. Метод Кавендиша широко применялся и в последнее время позволил проверить закон кулона с большой точностью.

Закон Кулона многократно проверялся и в настоящее время достоверно установлено, что он справедлив для расстояний от  $10^{-17}$  м до  $10^7$  м. Нет сомнений, что и для больших расстояний закон Кулона так же хорошо выполняется, однако прямых экспериментальных проверок не проводилось.

### **Полевая трактовка закона Кулона.**

До работ Фарадея закон Кулона трактовался с позиции **дальнодействия**, т.е. считалось, что одно тело действует на другое как бы без посредников. Поэтому и называлась это концепция как действие на расстоянии. В первой половине XIX в. выработалась другая точка зрения на механизм взаимодействия, согласно которой **взаимодействие между телами осуществляется лишь посредством непрерывной «передачи сил» через пространство между телами**. Такое представление получило название концепции **близкодействия**. Она была введена в науку Фарадеем (1791-1867) в ряде работ, опубликованных в период с 1831 по 1855 г. *Вместе с идеей близкодействия в науку вошло представление о поле как посреднике, осуществляющем взаимодействие*. В процессе научных исследований была доказана несостоятельность теории дальнодействия. Согласно теории близкодействия взаимодействие выглядит так: заряд создает электрическое поле, которое действует на другой заряд, внесенный в это поле, т.е

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \cdot q_2 \text{ или } \vec{F}_{21} = k \frac{q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \cdot q_1$$

Пусть имеется некоторое заряженное тело с зарядом  $q_0$ , а точка  $A$  находится на некотором расстоянии от него. Если в точку  $A$  вносить пробные заряды



$q_i = q_1, q_2, \dots, q_i, (|q_i| \ll |q_0|)$  и измерять силу, которая действует на эти заряды:  $F_1, \dots, F_n$ , то можно установить что  $\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \dots = \frac{F_n}{q_n} = const$  и является величиной постоянной, зависящей лишь от заряда  $q_0$  и расстояния до точки  $A$ . Эту величину и назвали напряженностью электрического поля. Таким образом напряженность поля – это величина, равная отношению силы, действующей на заряд, внесенный в данную точку полч к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4.2)$$

Откуда следует, что

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (4.3)$$

- величина, равная отношению силы внесенной в данную точку к величине заряда.

Если оба заряда точечные, то из (4.1) и (4.2) следует

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (4.4)$$

### Принцип суперпозиции.

Экспериментально были установлены следующие факты:

- 1) сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов;
- 2) сила, действующая на точечный заряд со стороны других точечных зарядов равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны каждого из зарядов при отсутствии других, т.е.  $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ . Тогда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_k \frac{\vec{F}_k}{q} = \sum_k \vec{E}_k \quad (4.5)$$

Это утверждение называется принципом суперпозиции. Оно отражает экспериментальный факт, составляющий одну из основ учения об электричестве. По своей роли он столь же важен, как и закон Кулона.

Справедливость принципа суперпозиции установлена для полей с напряженностью до  $10^{22}$  В/м. Внутри атомов напряженность поля  $10^{11} - 10^{17}$  В/м и лишь у поверхности очень тяжелых ядер  $10^{22}$  В/м.

Если имеются заряженные тела, то напряженность поля в некоторой точке вычисляется следующим образом: тело разбивается на элементы  $dV$ ,  $dS$ ,  $dl$ , содержащие заряд  $dq$ , т.е.

$$dq = \rho dV, \quad dq = \sigma dS, \quad dq = \lambda dl, \quad (4.6)$$

где  $\lambda$  - линейная плотность зарядов.

Напряженность поля, создаваемого элементом  $dq$  в некоторой точке равна

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^3} \vec{r}, \quad (4.7)$$

Затем используя принцип суперпозиции, находим напряженность поля  $\vec{E} = \int dE$ . (4.8)

### §5. Дифференциальная формулировка закона Кулона

В электростатике изучаются электрические поля неподвижных зарядов. Предполагается, что заряды удерживаются в пространстве силами неэлектростатического происхождения. Однако, вообще говоря, неподвижных элементарных зарядов не существует, а поэтому и не существует постоянных полей, однако в большинстве изучаемых явлений наблюдается суперпозиция полей огромного количества зарядов, т.е. некоторое среднее поле. Именно это среднее поле является предметом изучения в классической теории электромагнетизма.

#### Электростатическая теорема Гаусса.

Электростатическая теорема Гаусса устанавливает математическую связь между потоком вектора напряженности через замкнутую поверхность и зарядами, находящимися в объеме, ограниченном данной поверхностью.

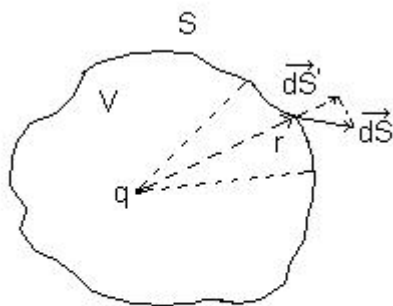


Рис.5. К вычислению потока вектора  $\vec{E}$

Предположим, что имеется некоторый объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  и точечный заряд  $q$  внутри этого объема.

Рассмотрим поток  $N$  напряженности  $\vec{E}$  сквозь эту поверхность.

$$\vec{E} = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (5.1)$$

Так как  $q$  точечный заряд. То напряженность поля равна

$$\vec{E} = k \frac{q\vec{r}}{r^3}, \quad (5.2)$$

а значит

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = kq \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}.$$

Учтем соотношение  $\frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \left| \frac{\vec{r}}{r^3} \right| |d\vec{S}| \cos(\vec{r} \wedge d\vec{S}) = \frac{dS'}{r^2}$

где  $dS'$  - проекция площади элемента  $d\vec{S}$  на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору  $\vec{r}$ , т.е.  $dS' = dS \cos(\vec{r} \wedge d\vec{S})$ .

Рассмотрим сферу, на которой выделим площадку  $dS$  и введем понятие телесного угла  $d\Omega$ , который определим так:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}. \quad (5.3)$$

Для бесконечно малых величин справедливо соотношение:  $dS' \approx dS$ , и тогда из (5.1) с учетом (5.2) и (5.3) получаем:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = kq \oint_S d\Omega \quad (5.4)$$

Полный телесный угол, под которым видна замкнутая поверхность из точек внутри объема, равен  $4\pi$  (телесный угол измеряется в стерadians: 1 стерад  $= \frac{S}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$ ), а поток

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4k\pi q = 4\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5.5)$$

Аналогичным образом можно посчитать поток  $\vec{E}$  сквозь замкнутую поверхность, если точечный заряд находится вне объема. В этом случае, как можно показать

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (5.6)$$

Объединяя (5.5) и (5.6) можно окончательно написать:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & q \in V \\ 0, & q \notin V \end{cases} \quad (5.7)$$

Утверждение, содержащееся в (5.7) и есть электростатическая теорема Гаусса для точечного заряда. Ее легко обобщить на случай, когда внутри объема находится или система точечных зарядов или непрерывно распределенный по объему заряд, используя принцип суперпозиции:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (5.8)$$

или

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (5.9)$$

Физической основой теоремы Гаусса является закон Кулона, а значит теорема Гаусса является интегральной формулировкой закона Кулона.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV$  и

предположим, что в объеме  $V$  заряд распределен непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , т.е.  $q = \int_V \rho dV$ . Тогда  $\int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ , откуда легко найти, что

$$\int_V \left( \text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad (5.10)$$

Ввиду произвольности объема, получаем:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.11)$$

Это и есть дифференциальная формулировка закона Кулона или уравнение Максвелла (1831-1879) для  $\text{div} \vec{E}$ .

Рассмотрим некоторые примеры:

### Пример 1.

Имеется точечный заряд  $q$ . Определим напряженность поля  $E = E(r)$  как функцию от  $r$ . Окружаем заряд сферой радиуса  $r$ .  $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Угол между  $E$  и  $dS$

равен нулю, следовательно  $\oint E d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . В силу симметрии  $E$ :  $E \oint d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ ,

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

### Пример 2.

Дана бесконечная нить, заряженная с линейной плотностью  $\lambda$  (Кл/м). Определить  $E = E(r)$ ,  $r$  – расстояние от нити.

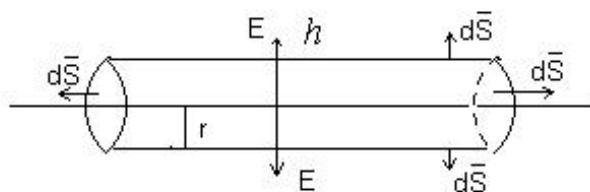


Рис.б.

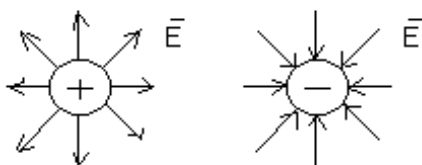
Окружаем нить цилиндром длиной  $h$  и радиусом  $r$ . Вычислим поток вектора напряженности через полную поверхность этого цилиндра. Поток через основания цилиндра равен нулю, т.к. угол между  $E$  и  $dS$  равен  $90^\circ$ . На боковой поверхности в силу симметрии  $E$  одинаково во всех точках, а значит  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = E 2\pi r l$ . Заряд, который находится внутри цилиндра, равен  $\lambda l$ .

Тогда  $E 2\pi r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ , следовательно  $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r}$ .

### Силовые линии электрического поля.

Силовой линией электростатического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с напряженностью поля  $\vec{E}$ . С помощью силовых линий удобно графически изображать поле:

1. Поле, создаваемое уединенными точечными зарядами:

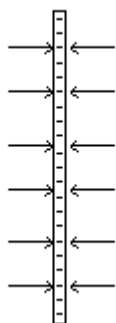


2. Поле, создаваемое двумя равными по величине и противоположными по знаку зарядами:

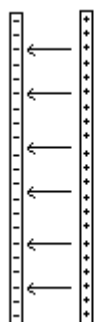
$$|q_+| = |q_-| = q$$



3. Поле, создаваемое отрицательно заряженной плоскостью:



4. Поле между двумя плоскостями:



По густоте линий можно судить о величине, по виду о характере поля. В примерах 1,2 – неоднородные поля, а в 3,4 – однородные, т.к. силовые линии параллельны.

## §6. Потенциальность электрического поля

### Работа в электрическом поле.

Так как сила, действующая в электрическом поле на точечный заряд  $q$  равна

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (6.1)$$

то при перемещении заряда  $q$  на расстояние  $d\vec{l}$  эта сила совершает работу:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}. \quad (6.2)$$

При перемещении заряда из точки 1 в точку 2 по траектории  $l$  работа равна:

$$A = q \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}. \quad (6.3)$$

### Потенциальность кулоновского поля.

Поле, созданное кулоновскими зарядами, потенциально. Поле сил называется потенциальным, если при перемещении в этом поле работа зависит лишь от начального и конечного положения точек (тела) пути и не зависит от формы пути - траектории. Вторым эквивалентным определением потенциальности поля является условие равенства нулю работы при перемещении в нем по любому замкнутому контуру.

Вся математическая часть учения о потенциале была разработана в рамках теории тяготения, а понятие о потенциале возникло в работах Ж.Л. Лагранжа (1736-1813) в 1777г. Выражение “потенциал” было введено в науку в 1828 г.

Дж. Грином и независимо К.Ф. Гауссом (1775-1855). Большой вклад в теорию потенциала был внесен П.С. Лапласом (1749-1827) и С.Д. Пуассоном (1781-1840).

На основании принципа суперпозиции из потенциальности поля точечного заряда следует потенциальность произвольного электростатического поля.

Из сказанного следует, что  $A = q \oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ , тогда условие потенциальности электрического поля

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (6.4)$$

(6.4) – интегральная формулировка потенциальности электрического поля.

### Дифференциальная формулировка потенциальности поля.

Если воспользоваться формулой Стокса

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}, \text{ то из (6.4) следует дифференциальная формулировка}$$

потенциальности поля:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (6.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\text{rot}(\text{grad} \varphi) \equiv 0. \quad (6.6)$$

Тогда сопоставляя (6.6) и (6.5) можно записать:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (6.7)$$

где  $\varphi$  - некоторая скалярная функция, которая называется потенциалом. Знак «-» выбран для того, чтобы вектор напряженности  $E$  был направлен в сторону убывания  $\varphi$ . Скалярная функция  $\varphi$  называется скалярным потенциалом электрического поля.

Если напряженность поля можно измерить экспериментально, то потенциал  $\varphi$  не имеет определенного числового значения и бессмысленно говорить об экспериментальном определении его значения. Потенциал определен с точностью до некоторого постоянного значения.

Для того, чтобы не было неоднозначности, используют процедуру нормировки потенциала. При решении пространственных задач за ноль принимают потенциал бесконечно удаленной точки. А при решении задач, связанных с изучением электрических полей вблизи поверхности Земли, за ноль принимают потенциал Земли.

### Выражение работы через потенциал.

Если заряд перемещается между точками (1) и (2), то

$$A = q \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = -q \int_{(1)}^{(2)} \text{grad} \varphi d\vec{l} = -q \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -q \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = q(\varphi(1) - \varphi(2)) \quad (6.8)$$

Если сопоставить (6.8) и (6.3), то  $q \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi(1) - \varphi(2))$ , откуда следует

$$\varphi(1) - \varphi(2) = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} \quad (6.9)$$

Таким образом, с помощью (6.9) можно вычислить разность потенциалов между двумя точками поля.

### **Потенциал поля точечного заряда.**

Будем нормировать потенциал на нуль в бесконечности. Считая, что в формуле (6.9) точка (2) находится в бесконечности, полагаем  $\varphi(2) = \varphi(\infty) = 0$  и получаем выражение для потенциала в точке (1):

$$\varphi(1) = q \int_{(1)}^{\infty} \vec{E} d\vec{l}. \quad (6.10)$$

Воспользовавшись выражением для напряженности поля точечного заряда получим:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} k \frac{q}{r^2} dr = -k \frac{q}{r} \Big|_r^{\infty} = k \frac{q}{r}. \quad (6.11)$$

Соотношение (6.11) определяет потенциал поля, создаваемого точечным зарядом.

### **Потенциал поля системы точечных зарядов.**

Если имеется система из точечных зарядов, то потенциал поля в некоторой точке А равен

$$\varphi_A = \sum_i \varphi_{iA} = \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (6.12)$$

В случае, когда заряд распределен непрерывно с объемной плотностью  $\rho = \rho(x', y', z')$ , потенциал в некоторой точке  $(x, y, z)$  поля:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (6.13)$$

$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$  - расстояние от точечного заряда  $q_i$  находящегося в точке  $(x_i, y_i, z_i)$  до точки  $(x, y, z)$  где вычисляется потенциал.

Если заряд распределен по поверхности, то потенциал определяется формулой  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}$ ,

(6.14)

где  $r$  –расстояние между элементом площадки  $dS$  и точкой, где вычисляется потенциал.

### **Бесконечность потенциала поля точечного заряда.**

Из (6.14) следует, что при  $r \rightarrow 0$  потенциал  $\varphi(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ . Это связано с тем, что точечный заряд формально имеет бесконечную объемную плотность, поскольку его объем равен нулю. Именно *бесконечная объемная плотность заряда и обуславливает обращение в бесконечность потенциала.*

При непрерывном распределении заряда с конечной плотностью потенциал нигде не обращается в бесконечность, т.е. потенциал функция конечная.

### **Конечность потенциала при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью.**

При непрерывном распределении заряда с конечной плотностью потенциал нигде не обращается в бесконечность. В этом можно убедиться при вычислении потенциала по формуле (6.13). Причем точку  $(x,y,z)$  за начало координат ( $x=y=z=0$ ) и будем вести расчет в сферической системе координат. Элемент объема в ней выражается формулой  $dx'dy'dz' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'$ , где  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ . Тогда [см. (6.13)]

$$\varphi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r', \alpha', \theta') r' \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'.$$

Следовательно, если  $\rho$  конечно, то и потенциал  $\varphi$  конечен, что и требовалось доказать.

### **Непрерывность потенциала.**

Производная от потенциала по декартовой координате дает соответствующую компоненту напряженности электрического поля. Ясно, что напряженность не может быть бесконечной, значит, производные по координатам от потенциала должны быть конечными. А это означает, что потенциал является непрерывной функцией. Таким образом, потенциал  $\varphi$  является непрерывной и конечной функцией с конечными производными по координатам. Эти условия важны при решении дифференциальных уравнений для  $\varphi$ .

### **Теорема Ирншоу.**

Эта теорема утверждает, что не существует такой конфигурации неподвижных зарядов, которая была бы устойчивой, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы. Устойчивые конфигурации неподвижных зарядов могут существовать лишь тогда, когда кроме сил электрического взаимодействия между ними имеются некоторые посторонние силы, удерживающие заряды в положении равновесия.

Доказательство теоремы Ирншоу следует из теоремы Гаусса. Допустим, что равновесие устойчиво. Тогда при смещении любого из зарядов системы из его положения равновесия в любом направлении на него должна действовать сила, стремящаяся вернуть заряд в прежнее положение. А это означает, что напряженность поля, создаваемого вблизи каждого из покоящихся зарядов всеми другими зарядами, направлена вдоль радиусов, исходящих из точки нахождения этого заряда. Поток напряженности этого поля сквозь замкнутую поверхность вокруг заряда отличен от нуля, поскольку напряженность направлена вдоль радиусов в одном направлении (вблизи положительного заряда – к заряду, вблизи отрицательного – от заряда). По теореме Гаусса поток сквозь замкнутую поверхность создается зарядом, находящимся в ограничиваемом ею объеме. Это противоречит исходному предположению о



том, что он создается зарядами, находящимися вне объема. Тем самым отвергается допущение об устойчивости конфигурации неподвижных зарядов, и теорема Ирншоу доказана.

Устойчивые конфигурации неподвижных зарядов могут существовать лишь тогда, когда кроме сил взаимодействия между ними имеются какие-то посторонние силы, удерживающие заряды в положениях равновесия. Устойчивые состояния движущихся зарядов возможны, как, например, движение двух разноименных зарядов по эллипсам вокруг центра масс (если, конечно, пренебречь излучением).

### §7. Уравнения Лапласа и Пуассона

Если имеется или конфигурация зарядов, или заряженное тело, то напряженность поля и потенциал поля могут быть найдены с помощью нормировки из формул (6.12) и (6.14). Но имеется еще один путь, когда выводится дифференциальное уравнение для потенциала, решается это уравнение, находится  $\varphi$ , а затем с помощью (6.7) можно найти  $\vec{E}$  и этот путь чаще гораздо проще. Будем исходить из (6.7) и дифференциальной формулировки закона Кулона (5.11). Чтобы его получить подставим в  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  выражение  $E = -\text{grad}\varphi$ .

Тогда  $\text{div}\text{grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ; а поскольку  $\text{div}(\text{grad}\varphi) = \Delta\varphi$ , окончательно получим:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.1)$$

Получили уравнение Пуассона. В тех областях пространства, где заряды отсутствуют  $\rho=0$ , оно превращается в уравнение:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (7.2)$$

называемое уравнением Лапласа.

Таким образом, при заданном распределении зарядов ( $\rho$  задано) можно решить (7.1), найти  $\varphi$ , а затем из (6.7) найти  $\vec{E}$ . При решении задачи используются граничные условия и решение при корректной постановке единственно. При этом отпадает необходимость в нормировке потенциала, т.к. граничные условия заменяют эту процедуру.

#### Бесконечный равномерно заряженный круглый цилиндр.

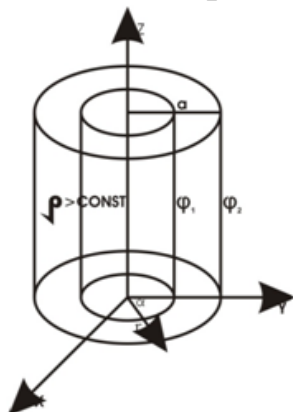


Рис.7.

Найдем с помощью уравнения Пуассона потенциал, создаваемый бесконечным цилиндром радиусом  $a$  с объемной плотностью  $\rho = \text{const}$ .

Направим ось  $z$  по оси цилиндра. Вследствие аксиальной симметрии распределения заряда потенциал  $\varphi$  также аксиально симметричен, т.е.  $\varphi = \varphi(r)$ . Поэтому

удобно использовать цилиндрическую систему координат, аксиальный угол которой обозначим  $\alpha$ .

В цилиндрической системе координат уравнение Лапласа имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Так как заряд круговой, то потенциал  $\varphi$  обладает такой симметрией, что не зависит от  $\alpha$ , а так как он бесконечномерный, то  $\varphi$  не зависит и от  $z$ , тогда  $\varphi = \varphi(r)$  и уравнение Пуассона, которое необходимо будет решать, записывается

$$\text{так } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Для решения введем две области:

1.  $r < a, \varphi = \varphi_1$
2.  $r > a, \varphi = \varphi_2$

При этом зададим граничное условие в виде:  $\varphi(0) = 0$ .

Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad 0 < r < a$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 0, \quad r > a$$

Общие решения легко находятся интегрированием:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1, \quad 0 < r < a;$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2, \quad r > a;$$

где  $A_1, A_2, B_1, B_2$  - постоянные интегрирования. Поскольку потенциал всюду должен быть конечен, а  $\ln r \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 0$ , поэтому в последнем решении необходимо положить  $A_1 = 0$ . Если учесть граничное условие  $\varphi_1(0) = 0$ , то  $B_1 = 0$ .

Таким образом,

$$\varphi_1 = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}, \quad 0 < r < a;$$

$$\varphi_2(r) = A_2 \ln r + B_2, \quad r > a.$$

Поскольку поверхностные заряды отсутствуют, напряженность электрического поля на поверхности цилиндра непрерывна, т.е. непрерывна производная от потенциала. Условие непрерывности потенциала и его производной при  $r=a$  имеет вид двух алгебраических уравнений для определения двух оставшихся пока неизвестными постоянных  $A_2$  и  $B_2$ :

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a), \varphi_1'(a) = \varphi_2'(a),$$

откуда следует система алгебраических уравнений для  $A_2$  и  $B_2$ :

$$\begin{cases} A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \\ \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a \end{cases},$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2,$$

$$B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \ln a.$$

Подставим это соотношение в  $\varphi_2(r)$ , получим

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2, \quad 0 < r \leq a \quad (7.3)$$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2, \quad r \geq a \quad (7.4)$$

Как и следовало ожидать, при  $r=a$  решения совпадают, т.е.  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ .

Чтобы найти напряженность электрического поля, воспользуемся (6.7), которое запишем в виде  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ . Тогда

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, \quad (7.5)$$

$$E_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}. \quad (7.6)$$

В принципе, для нахождения  $E$  можно было воспользоваться электростатической теоремой Гаусса. Выделяя мысленно цилиндр с радиусом

$r < a$ , можем найти, что  $E 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$ ,  $E_1 = \frac{\rho \pi r^2 h}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{r\rho}{2\varepsilon}$ , т.е. совпадает с (7.5).

Точно так же, применив теорему Гаусса для области  $r \geq a$  можно получить

$$E_2 2\pi r h = \frac{\rho \pi a^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}, \text{ что совпадает с (7.6).}$$

Таким образом, мы рассмотрели два способа расчета напряженности поля непосредственно с помощью теоремы Гаусса и с помощью решения уравнений Пуассона и Лапласа.

### Диполь и его поле.

Система, состоящая из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга называется диполем. Диполь характеризуется дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (7.7)$$

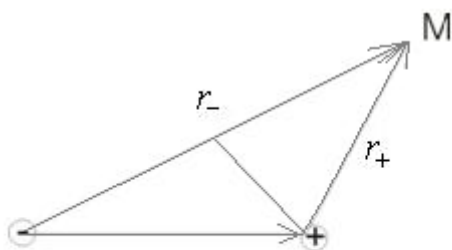


Рис.8.

Диполь имеет очень большое значение, так как различные молекулы в первом приближении моделируются диполем. Вычислим поле диполя в точке  $M$ , считая, что  $|\vec{l}| \ll |\vec{r}_{\pm}|$ .

Такой диполь будем называть точечным.

Так как  $l \ll r$ , то можно считать, что  $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$ ,  $r_- \cdot r_+ \approx r^2$  и характеризовать местоположение точки  $M$  радиусом-вектором  $\vec{r}$  с

началом в любой точке диполя

$$\varphi_M = k \frac{q}{r_+} + k \frac{q}{r_-} = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx kq \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

(7.8)

Таким образом, (7.8) определяет поле диполя на значительном расстоянии от него. Напряженность  $\vec{E}$  поля диполя равна

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = k \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (7.9)$$

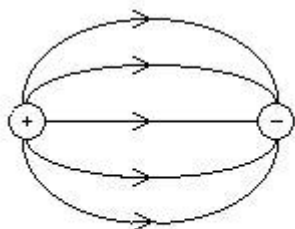


Рис.9. Силовые линии диполя

Из (7.9) видно, что напряженность поля точечного диполя убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния, т.е. быстрее, чем напряженность поля кулоновского заряда. Силовые линии диполя изображены на рисунке.

## §8. Электростатическое поле при наличии проводников

### Дифференциальная форма закона Ома.

Проводниками называются материальные тела, при внесении которых в электрическое поле в них возникает движение зарядов - электрический ток. Закон, связывающий силу тока, текущего по проводнику с разностью потенциалов (напряжением на его концах), был открыт экспериментально Г.С. Ом (1787-1854) в 1827г. и имеет вид

$$J = \frac{U}{R}, \quad (8.1)$$

где  $R$  - сопротивление проводника. Закон Ома в дифференциальной форме получается в результате записи соотношения (8.1) для плотности тока  $j_\tau$ .

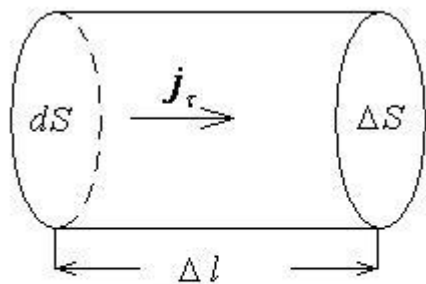


Рис.10. К выводу дифференциальной формы закона Ома

Рассмотрим бесконечно малый элемент проводника цилиндрической формы длины  $\Delta l$ , с сечением  $\Delta S$ , на концах которого приложена разность потенциалов  $\Delta \varphi$ .

Пусть  $\gamma$  - удельная электрическая проводимость вещества, которая является величиной, обратной удельному электрическому сопротивлению. Тогда выражение для  $R$  можно записать в виде:

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} \quad (8.2)$$

$$I_\tau = j_\tau \Delta S, \quad (8.3)$$

где индекс  $\tau$  означает, что берется составляющая вдоль элемента проводника. Закон Ома для этого элемента записывается так:

$$\Delta\varphi = j_{\tau}\Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{j_{\tau}}{\gamma} \Delta l \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = E_{\tau} \Rightarrow E_{\tau} = \frac{j}{\gamma} \Rightarrow j_{\tau} = \gamma E_{\tau}.$$

Полученное соотношение в векторной форме – и есть дифференциальная формулировка закона Ома.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (8.4)$$

### **Классификация материалов по способности проводить электрический ток.**

Удельная электрическая проводимость  $\gamma$  зависит от свойств материала. По ее значению все материалы делят на три класса: диэлектрики, полупроводники и проводники. Итак:

а) диэлектрики – вещества с малым значением электрической проводимости.

Идеальный диэлектрик характеризуется отсутствием проводимости. Однако это может осуществляться лишь при 0 К. При температуре, отличной от 0 К, все материалы обладают определенной проводимостью и, следовательно, идеальных диэлектриков нет; диэлектриком принято называть материал, удельная электрическая проводимость которого  $\gamma < 10^{-5} \text{ (Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}\text{)}$

б) полупроводники  $10^{-5} < \gamma < 10^3 \text{ (Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}\text{)}$

в) проводники  $\gamma > 10^3 \text{ (Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}\text{)}$ . В основном это металлы.

Наиболее хорошими проводниками являются медь и серебро, у которых  $\gamma \approx 10^7 \text{ (Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}\text{)}$ .

### **Отсутствие электрического поля внутри проводника.**

В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, когда  $\vec{j} = 0$ . Из (8.4) следует, что  $\vec{E} = 0$ , т.е. внутри проводника при электростатическом равновесии электрическое поле отсутствует.

### **Отсутствие в проводнике объемных зарядов.**

Из уравнения  $\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  при  $\vec{E} = 0$  следует  $\rho = 0$ . Это значит, что внутри проводника отсутствуют объемные заряды. Это означает, что заряд проводника концентрируется на его поверхности в слое атомарной толщины. Естественно, внутри проводника имеется как положительные, так и отрицательные заряды. Но они взаимно компенсируются и в целом внутренние области проводника нейтральны.

Установление нейтральности происходит очень быстро. Предположим, в момент  $t=0$  у нас  $\rho(0) \neq 0$ . Тогда используя уравнение непрерывности (3.3)

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0 \text{ с учетом (8.4) получим:}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0, \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0, \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} dt. \quad (8.5)$$

Введем  $t_y = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$  - время установления нейтральности. Тогда решение уравнения (8.5) имеет вид

$$\rho(t) = \rho(0) \exp\left(-\frac{t}{t_y}\right) \quad (8.6)$$

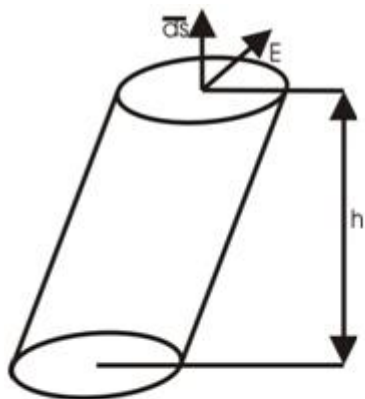
Из (8.6) следует, что объемная плотность зарядов уменьшается экспоненциально. Например, для меди ( $\gamma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ) время установления  $t_y \approx 10^{-19} \text{ с}$ . Такой промежуток времени чрезвычайно мал даже в масштабах внутриатомных процессов. Поэтому в нестационарных ситуациях, когда поля изменяются со временем, при не слишком больших частотах с большой точностью можно считать, что в проводнике свободные заряды распределены по поверхности, а объемные заряды отсутствуют. Данное заключение остается справедливым также при учете зависимости проводимости  $\gamma$  от частоты, хотя при этом получается увеличение времени релаксации на несколько порядков.

### Электрическая индукция.

Если нейтральный проводник внести во внешнее электрическое поле, то поверхностные заряды на нем перераспределяются, так что создаваемое ими внутри проводника поле полностью компенсирует внешнее поле, в результате чего суммарная напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.

Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике при его помещении во внешнее электрическое поле называется электрической индукцией. Если проводник заряжен, то под влиянием внешнего поля происходит также перераспределение заряда проводника.

### Поле вблизи поверхности проводника.



*Рис.11. К выводу формулы для нормальной составляющей напряженности электрического поля вблизи поверхности проводника*

Выделим на поверхности проводника элемент поверхности  $\Delta S$  и построим цилиндр высотой  $h$ . Применим к этому цилиндру теорему Гаусса:

$$\int_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \text{ где } S - \text{ поверхность цилиндра, } Q -$$

заряд в объеме цилиндра. Но внутри цилиндра заряд имеется только на поверхности проводника и характеризуется поверхностной плотностью  $\sigma$ , т.е.  $Q = \sigma \Delta S$ . Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , а значит поток  $\vec{E}$  через часть поверхности, находящейся в объеме цилиндра

равен нулю. Остается отличным от нуля лишь поток через основание цилиндра и через боковую поверхность находящегося вне проводника. Но в пределе высоту  $h$  цилиндра можно взять сколь угодно малой ( $h \rightarrow 0$ ), а значит  $S_{бок} \rightarrow 0$  и поток вектора  $\vec{E}$  через  $S_{бок}$  будет стремиться к нулю. Поэтому остается отличным от нуля лишь поток вектора  $\vec{E}$  через основание цилиндра:

$$\int_{\Delta S} \vec{E} dS = E_n \Delta S, \text{ где } E_n - \text{ нормальная компонента } \vec{E}. \text{ Тогда}$$

$$E_n \Delta S = \sigma \frac{\Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (8.7)$$

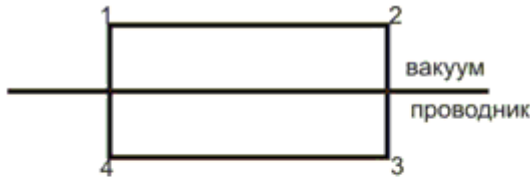


Рис.12. К док-ву отсутствия тангенциальной составляющей напряженности электрического поля вне проводника

Таким образом у поверхности проводника, заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma$ , нормальная составляющая поля определяется (8.7), т.е. поверхностной плотностью зарядов. Найдем тангенциальную составляющую поля, т.е. составляющую, направленную вдоль поверхности.

Рассмотрим замкнутый контур  $L$ , пересекающий поверхность проводника, верхняя часть которого идет параллельно поверхности вне проводника, а внутренняя часть – внутри проводника.

Будем перемещать по этому контуру некоторый заряд. В следствии потенциальности электрического поля работа по перемещению заряда по этому контуру будет равна 0, т.е.  $0 = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ . Можно сжать контур, чтобы участки 1-4 и 2-3 стремились к нулю, тогда  $A_{41} = A_{23} = 0$ , и мы получаем  $0 = qE_t l + A_{34}$ , но внутри проводника поля нет, поэтому  $A_{34} = 0$ , а значит

$$E_t = 0,$$

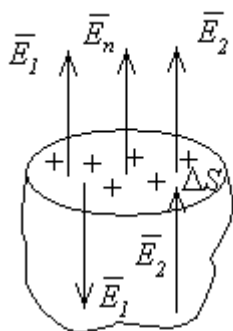


Рис.13. Механизм образования поля вблизи поверхности проводника

(8.8)

т.е. тангенциальная составляющая напряженности поля у поверхности проводника равна нулю. В образовании нормальной составляющей напряженности поля в данной точке у поверхности проводника участвуют заряды, находящиеся в некоторой элементарной площадке.

$\Delta S$ , которые создают поле  $\vec{E}_1$ , и все остальные заряды проводника, которые создают  $\vec{E}_2$ . Внутри проводника поле равно нулю, значит  $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ : откуда следует, что  $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ .

Следовательно

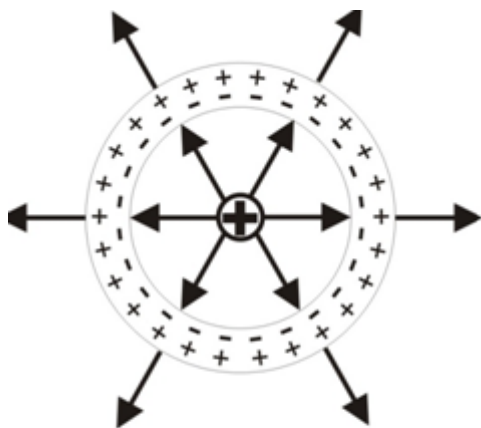
$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (8.9)$$

Таким образом, напряженность поля вблизи поверхности проводника состоит из двух равных частей: одна часть создается поверхностными зарядами, прилегающего элемента поверхности, а другая – всеми остальными зарядами, лежащими вне этого элемента поверхности.

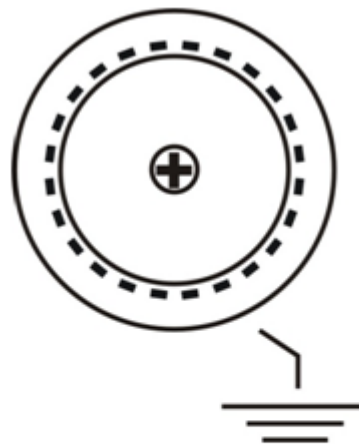
Отметим, что (8.7) определяет поле заряженной плоскости.

### Экранирование. Металлический экран.

Механизм уничтожения поля внутри проводника распределением зарядов на его поверхности показывает, что внутренние части проводника к нему не имеют никакого отношения, а, значит, их можно удалить. В этом случае мы получаем пространство, окруженное оболочкой проводника и электрическое поле внутри оболочки равно нулю. Такая замкнутая оболочка называется экраном. Она экранирует внутренне пространство от внешних электрических полей. Экран используется для защиты технических устройств от влияния внешних полей. В целях экономии материала и уменьшения веса используются металлические сетки с мелкими ячейками. Если взять сферическую оболочку и внутри расположить положительный заряд, поле внутри оболочки  $E=0$ . Но если эту оболочку заземлить, то все заряды из внешней части уйдут на бесконечность, т.е. в землю и оболочка будет экранировать внешнее пространство от полей, находящихся внутри оболочки.



*Рис.14.Заряд, окруженный замкнутой проводящей оболочкой*



*Рис.15.Заземленная замкнутая оболочка экранирует внешнее пространство от зарядов внутри объема*

### Потенциал проводника.

Разность потенциалов между двумя точками  $\phi(1) - \phi(2) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ . Если эти точки принадлежат проводнику, то из условия  $E=0$  внутри проводника следует, что



$\varphi(1) - \varphi(2) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow$  и  $\varphi(1) = \varphi(2)$ , т.е. потенциал во всех точках проводника одинаков, и можно говорить о потенциале проводника, т.е. проводник есть эквипотенциальное тело – тело, с одинаковыми потенциалами во всех точках. Потенциал проводника вычисляется по формуле

$$\varphi = \int_{\substack{\text{по поверхности} \\ \text{проводника}}}^{\infty} \vec{E} d\vec{l}. \quad (8.10)$$

## §9. Электроемкость проводника. Потенциальные и емкостные коэффициенты

### Уединенный проводник.

Электроемкостью проводника называется величина, измеряемая отношением заряда  $q$ , сообщенного этому проводнику к потенциалу этого проводника

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (9.1)$$

Электроемкость измеряется в фарадах:  $1\text{Ф} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{В}}$ .

Фарад – очень большая величина, поэтому на практике пользуются более мелкими величинами  $1\text{мкФ} = 10^{-6}\text{Ф}$ ,  $1\text{пФ} = 10^{-12}\text{Ф}$ .

Вычислим электроемкость шара радиусом  $R$ . Так как  $\varphi_{ш} = k \frac{Q}{R}$ , то

$$C_{ш} = \frac{Q}{\varphi} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

### Система проводников.

Если имеется система проводников, то потенциал каждого из них зависит не только от заряда проводника, но и от напряженности полей, создаваемых другими проводниками, т.е. от зарядов других проводников, причем по принципу суперпозиции он прямо пропорционален этим зарядам.

Потенциалы первого и второго проводников можно записать в виде

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 \quad (9.2)$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  называют потенциальными коэффициентами. Они зависят от формы, размеров, взаимного расположения проводников. Если вначале заряды на проводниках  $Q_1$  и  $Q_2$ , а потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2$ , а затем заряды стали  $Q'_1, Q'_2$ , а потенциалы  $\varphi'_1, \varphi'_2$ , то можно показать, что справедливо соотношение

$$Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 = Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2, \quad (9.3)$$

которое называется теоремой взаимности. Из нее непосредственно получается условие, которому удовлетворяют коэффициенты  $\alpha_{ij}$ : они симметричны относительно своих индексов. Теорему взаимности в общем случае для системы из  $n$  проводников можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^n Q'_i\varphi_i = \sum_{i=0}^n Q_i\varphi'_i. \quad (9.4)$$

Если теперь обобщить (9.2) на систему из  $n$  заряженных проводников, т.е.

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Q_j, \quad (9.5)$$

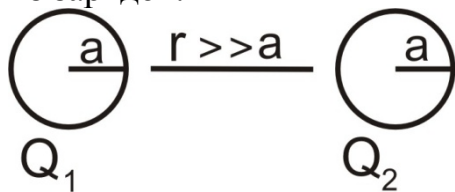
то непосредственно после подстановки (9.5) в (9.4) легко получить, что  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Соотношение (9.5) можно рассматривать как систему, решение которой можно записать в виде уравнений относительно  $Q_j$  при заданных потенциалах

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \quad (9.7)$$

где  $c_{ij}$  – емкостные коэффициенты.  $c_{ii}$  – емкостной коэффициент  $i$ -го проводника,  $c_{ij}$  – коэффициент взаимной емкости  $i$ -го и  $j$ -го проводников. Поскольку положительный заряд на уединенном проводнике создает положительный потенциал, то все емкостные коэффициенты  $c_{ii} > 0$ .

### Емкостные коэффициенты двух проводящих шаров.

Предположим, имеется два проводящих шара с радиусами  $a$ , центры которых расположены на расстоянии  $r$ , содержащие заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  и пусть  $r \gg a$ . Последнее условие позволяет сохранить сферическую симметрию поля каждого из зарядов.



$$\varphi_1 = k \left( \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{r} \right), \quad \varphi_2 = k \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{a} \right)$$

$$\begin{cases} Q_1 r + Q_2 a = \frac{\varphi_1 a r}{k} \\ Q_1 a + Q_2 r = \frac{\varphi_2 a r}{k} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на  $r$ , второе на  $(-a)$  и после преобразований получим:

$$\begin{cases} Q_1 (r^2 - a^2) = \frac{\varphi_1 a r^2}{k} - \frac{\varphi_2 a^2 r}{k} \\ Q_2 (r^2 - a^2) = \frac{\varphi_2 a r^2}{k} - \frac{\varphi_1 a^2 r}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\varphi_1 a r^2}{k(r^2 - a^2)} - \frac{\varphi_2 a^2 r}{k(r^2 - a^2)}, \\ Q_2 = \frac{\varphi_2 a r^2}{k(r^2 - a^2)} - \frac{\varphi_1 a^2 r}{k(r^2 - a^2)} \end{cases}$$

Но  $Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2$ , а  $Q_2 = c_{12}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2$ . Сопоставляя эти выражения с полученными для  $Q_1$  и  $Q_2$  легко найти, что

$$c_{11} = c_{22} = \frac{ar^2}{k(r^2 - a^2)} > 0, c_{12} = c_{21} = -\frac{ra^2}{k(r^2 - a^2)} < 0$$

Если емкостную связь разорвать, т.е. устремить  $r$  к бесконечности, то емкостные коэффициенты  $c_{11} = c_{22} = c = \frac{a}{k}$  что совпадает с выражением для емкости уединенного шара, а коэффициенты  $c_{12} = c_{21} = 0$ .

### Конденсаторы.

Конденсатор – совокупность двух любых проводников, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, пространство между которыми обычно заполняют диэлектриком. Заряжают проводники равными по величине, но противоположными по знаку зарядами. Проводники называют обкладками конденсатора, а сам конденсатор – это устройство, позволяющее накапливать электрическую энергию и отдавать ее в нужный момент времени. Вернемся к (9.2), где положим  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = -Q$ , тогда  $\varphi_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})Q$ ,  $\varphi_2 = (\alpha_{12} - \alpha_{22})Q$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})Q$$

Емкостью системы двух проводников, будет величина

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})^{-1}. \quad (9.9)$$

Так как  $\alpha_{12} < 0$ , то  $C > 0$ .

Емкость конденсатора можно выразить и через емкостные коэффициенты:

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2,$$

$$Q_2 = c_{12}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2$$

Достаточно положить  $Q_1 = Q, Q_2 = -Q$ , найти  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , затем  $\Delta\varphi$  и можно

$$\text{получить } C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

(9.10)

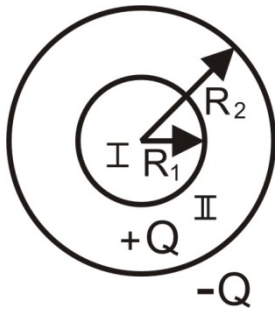
В большинстве случаев форма обкладок конденсатора и их взаимное расположение подбирают таким образом, чтобы внешние поля не влияли существенно на электрическое поле между ними, и силовые линии, начинающиеся на одной из обкладок, обязательно заканчивались на другой. Благодаря этому всегда обеспечивается равенство абсолютных значений зарядов на обкладках. В зависимости от формы обкладок конденсаторы бывают сферическими, цилиндрическими и плоскими. Вычисление емкости конденсатора производится следующим образом: мысленно заряжаем обкладки равными по величине и противоположными по знаку зарядами  $Q$ , затем

вычисляем разность потенциалов между обкладками  $\Delta\varphi$ . И затем вычисляем емкость  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ .

Фактически вычисление емкости конденсатора сводится к определению разности потенциалов между обкладками при известном заряде на обкладках.

### Сферический конденсатор.

Даны 2 сферы с общим центром. Пусть на внутренней обкладке сферического конденсатора имеется заряд  $+Q$ , на внешней  $-Q$ .



Используя Электростатическую теорему Гаусса легко видеть, что

Напряженность полей  $E_I = E_{III} = 0$ . Напряженность поля между внешней и внутренней обкладкой равна:

$$E_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \frac{Q}{r^2}.$$

Разность потенциалов между обкладками :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r} = k \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q dr}{r^2} = kQ \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = kQ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Тогда емкость:

$$C_{сф} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (9.11)$$

### Цилиндрический конденсатор.

Рассмотрим два коаксиальных цилиндра с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ .  $E_I = E_{III} = 0$ .

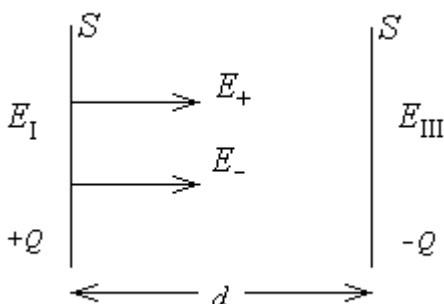
Согласно теореме Гаусса  $E_{II} = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{2kQ}{lr}$ , где  $l$  – длина цилиндров.

$$\Delta\varphi = \int \vec{E} d\vec{l} = \frac{2kQ}{l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{2kQ}{l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Тогда емкость цилиндрического конденсатора:

$$C_{ц} = \frac{l}{2k} \ln^{-1} \frac{R_2}{R_1}. \quad (9.12)$$

### Плоский конденсатор.



Даны 2 проводящие пластины площадью  $S$ , расстояние между которыми  $d$

$$E_I = E_{III} = 0.$$

Поле внутри конденсатора

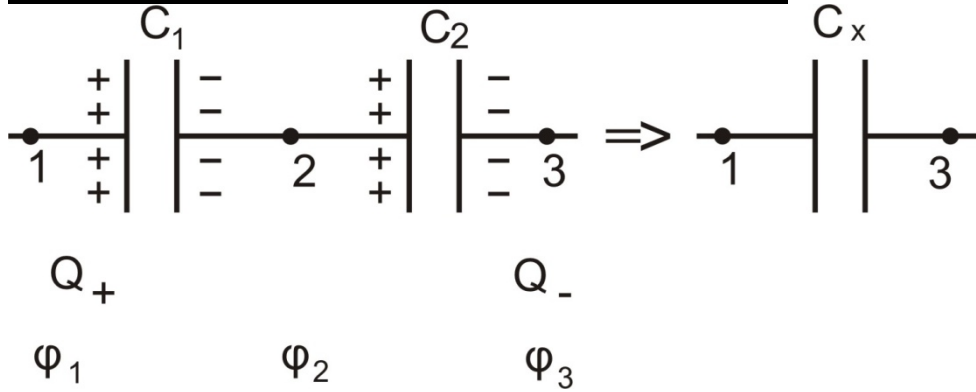
$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon S}.$$

$$\Delta\varphi = \int \bar{E}d\bar{l} = \int_0^d \bar{E}d\bar{l} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Тогда емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (9.13)$$

**Последовательное соединение конденсаторов.**



Очевидно:

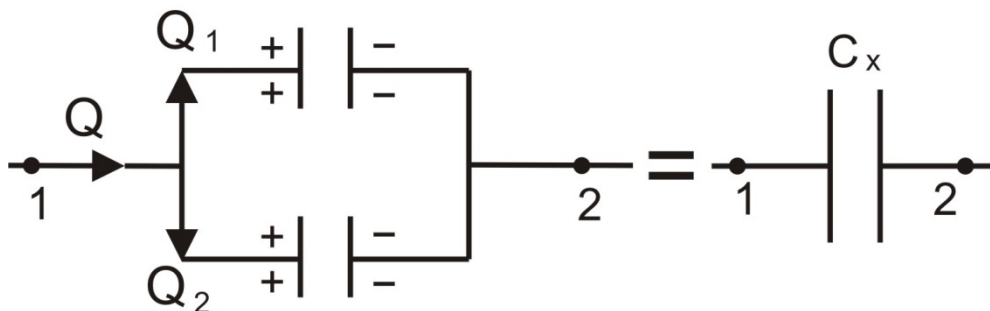
$$\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{u_1} + \underbrace{\varphi_2 - \varphi_3}_{u_2} = \underbrace{\varphi_1 - \varphi_3}_{u_3}.$$

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_x} \Rightarrow \frac{1}{C_x} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ или, обобщая, получим:}$$

$$\frac{1}{C_x} = \sum_k \frac{1}{C_k}. \quad (9.14)$$

Формула (9.14) определяет электроемкость  $k$  параллельно соединенных конденсаторов.

**Параллельное соединение конденсаторов.**



На основании закона сохранения заряда  $Q_1 + Q_2 = Q$ ,  $C_1 u + C_2 u = C u$ , т.к. напряжение на каждом конденсаторе равно  $U$ , следовательно  $C_1 + C_2 = C_x$ .

Обобщить систему из  $k$  конденсаторов, получаем:

$$C_x = \sum_k C_k. \quad (9.15)$$

## § 10. Метод электростатических изображений.

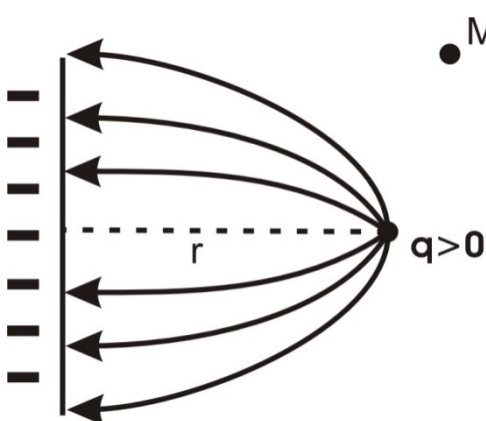
В теории электромагнетизма доказано, что решение корректно поставленных задач единственно. Существует наглядный метод нахождения поля, удовлетворяющего условиям задачи, называемый методом изображений.

Его суть состоит в следующем. Поле точечного заряда хорошо известно. Стараются подобрать такую систему точечных зарядов, суммарное поле которых удовлетворяет всем условиям задачи. Из теоремы об единственности решения заключаем, что это поле дает искомое решение. Математически задача сводится к нахождению потенциала, удовлетворяющего условиям задачи. Напряженность  $\mathbf{E}$  направлена перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям и вычисляется как взятый с обратным знаком градиент от потенциала. Получить форму эквипотенциальных поверхностей системы точечных зарядов в принципе легко.

Фактически сказанное означает, что если нарисовать картину силовых линий поля, создаваемого системой заряженных объектов, и она совпадает с картиной силовых линий поля, создаваемого системой точечных зарядов, то это означает, что эти поля одинаковы. И сложный расчет поля в первом случае изменится на довольно простой во втором. Еще раз отметим, что в графической интерпретации это означает, что у этих полей одинаковая картина силовых линий.

### Пример 1.

Дана проводящая бесконечная плоскость и заряд  $q > 0$  на расстоянии  $r$  от плоскости. Найти поле в точке  $M$ .



- $M$  На плоскости будут индуцироваться заряды с плотностью  $\sigma < 0$ , убывающей до нуля в бесконечности. Тогда потенциал в точке  $M$ , согласно принципу суперпозиции, равен

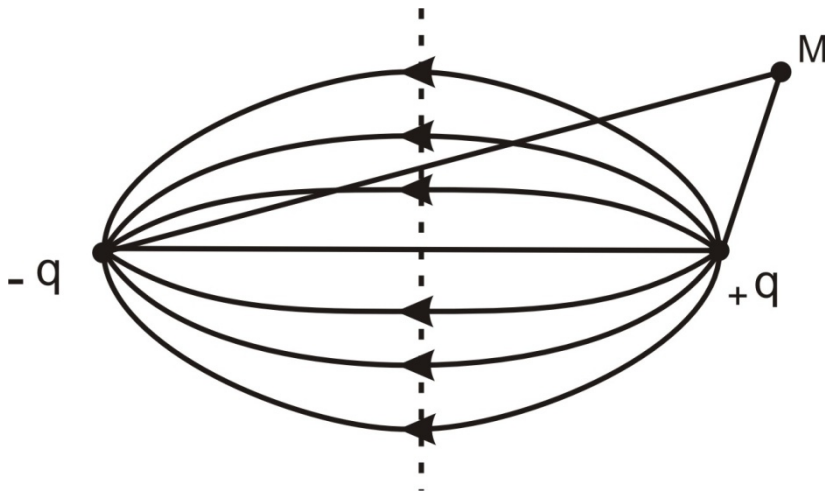
$$\varphi_M = \varphi_q + \varphi_{nl}. \quad (10.1)$$

Отметим, что сам потенциал проведенной плоскости будет равен 0.

Если строго решать эту задачу, необходимо найти закон распределения  $\sigma$  и вычислить  $\varphi_{nl}$  в точке  $M$ , а затем воспользоваться принципом

суперпозиции (10.1).

Рассмотрим поле, создаваемое двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$ , расположенными на расстоянии  $2r$  друг от друга.



Если провести плоскость, перпендикулярную линии  $2r$ , то это будет эквипотенциальная поверхность, как легко видеть, с потенциалом, равным 0. Картина силовых линий справа на двух рисунках одинакова. Значит «действие» бесконечной отрицательно заряженной плоскости совместно с положительным точечным зарядом  $+q$  справа от эквипотенциальной поверхности может быть заменено на «действие», обусловленное двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$ , находящимися на расстоянии  $2r$ . В этом случае можно считать, что поле в первом случае создается зарядом  $q$  и его «изображением»  $-q$ , «как в зеркале».

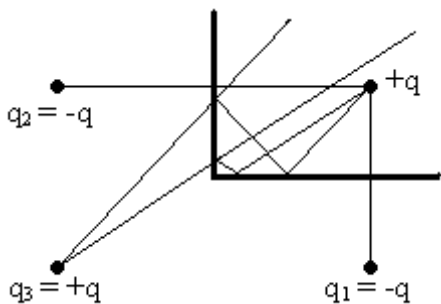
Следовательно, можно заключить, что потенциал поля в точке  $M$  во втором случае  $\varphi_M = k \frac{q}{r_+} - k \frac{q}{r_-}$ . Но тогда этой же формулой можно представить

потенциал поля в точке  $M$  в первом случае, если ввести понятие изображения заряда  $q$  в плоскости, как в зеркале, т.е. заряд  $-q$  – фиктивный заряд, который называется изображением заряда  $q$  в плоскости. Не нужно решать никакую сложную задачу, а поле в точке  $M$  находится как суперпозиция полей заряд  $q$  и его изображения  $-q$ .

Сила взаимодействия между зарядом  $q$  и бесконечной проводящей плоскостью будет равна силе взаимодействия заряда  $q$  и его изображения, т.е.  $F = \frac{kq^2}{4r^2}$ .

### Пример 2.

Даны 2 перпендикулярные проводящие полуплоскости и заряд  $+q$ . Найти  $\varphi_M$ .



Метод изображений позволяет сразу вычислить поле в точке  $M$ . Найдем изображение  $q$  в этих плоскостях. Если оптически построить изображение точки  $+q$  в двух перпендикулярных зеркалах, то изображений будет три:  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  – третье изображение из-за переотражений в зеркалах. Очевидно, что  $q_1 = -q$ ;  $q_2 = -q$ , а  $q_3 = -(-q) = q$ . И тогда потенциал

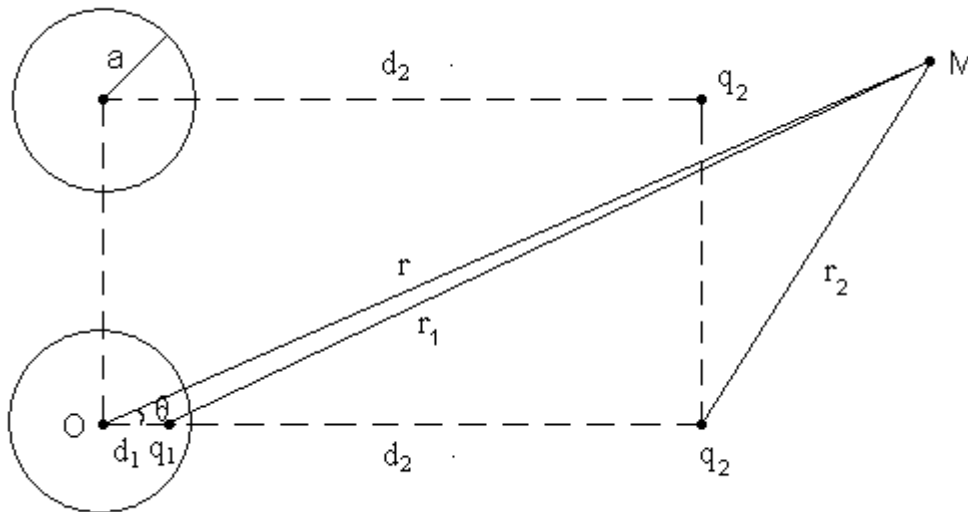
поля в точке  $M$  можно найти как суперпозицию полей заряда  $q$  и трех его «изображений». Естественно, количество таких ситуаций ограничено.

Метод изображений, конечно, не сводится во всех случаях в буквальном смысле к нахождению зеркального изображения зарядов. В курсе уравнений математической физики метод изображений, например, используется для построения функции точечного источника (функции Грина) I краевой задачи для уравнения Лапласа. Там же мы встречаем изображение на круге, изображение на сфере.

В заключение рассмотрим еще один пример.

**Пример 3.**

Определим силу взаимодействия между проводящей заземленной сферой радиуса  $a$  и точечным зарядом  $q_2$  расположенном на расстоянии  $d_2$  от центра сферы и поле этой системы в точке  $M$ .



В этом случае потенциал сферы равен 0.

Рассмотрим сначала поле, создаваемое двумя точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , расположенными с точкой  $O$  на одной прямой на расстоянии  $d_1$  и  $d_2$  от точки  $O$ .

$$\varphi_M = \varphi(r, \theta) = \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta}} \right).$$

Найдем эквипотенциальную поверхность, удовлетворяющую условию  $\varphi(a, \theta) = 0$ . Пусть  $q_1 = |q_1|$ ,  $q_2 = -|q_2|$ . Тогда

$$q_2^2 (a^2 + d_1^2 - 2ad_1 \cos \theta) = q_1^2 (a^2 + d_2^2 - 2ad_2 \cos \theta).$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$-2a \cos \theta (q_1^2 d_2 - q_2^2 d_1) + a^2 (q_1^2 - q_2^2) + q_1^2 d_2^2 - q_2^2 d_1^2 = 0.$$

Чтобы равенство нулю выполнялось для всех  $\theta$ , необходимо потребовать:

$$\begin{cases} q_1^2 d_2 - q_2^2 d_1 = 0 \\ a^2 (q_1^2 - q_2^2) + q_1^2 d_2^2 - q_2^2 d_1^2 = 0 \end{cases}$$

Тогда получим  $q_1 = -q_2 \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$ ,  $a^2 = \frac{(q_2^2 d_1^2 - q_1^2 d_2^2)}{q_1^2 - q_2^2}$ . Подставим  $q_1$  в  $a^2$ :



$a^2 = d_1 d_2$ . Следовательно, если  $d_1 = \frac{a^2}{d_2}$ , а  $q_1 = -q_2 \frac{a}{d_2}$ , то потенциал на воображаемой сфере радиуса  $a$  будет равен нулю. Причем  $a = \sqrt{d_1 d_2}$ .

Теперь проведем сопоставление исходной задачи и рассмотренного примера. В обоих случаях имеется сфера с потенциалом равным нулю. Поле в пространстве вне сферы, очевидно, будет одинаково, так как во втором случае тот же заряд и та же сфера. Таким образом, можно сделать следующий вывод:

Если ввести изображение заряда  $q_1$  на сфере радиуса  $a$ , то этот заряд  $q_1 = -q_2 \frac{a}{d_2}$ .

В этом случае поле, создаваемое сферой и зарядом  $q_2$ , будет точно таким же, как поле, создаваемое зарядом  $q_2$  и его изображением на сфере  $q_1$ , т.е. потенциал в точке М:

$$\varphi_M = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2}.$$

А сила взаимодействия между проводящей заземленной сферой и зарядом  $q_2$  будет определяться законом Кулона как сила взаимодействия между зарядом  $q_2$  и его изображением на сфере – зарядом  $q_1$ , т.е. легко найти, что

$$F = -k \frac{d_2 a q_2^2}{(d_2^2 - a^2)^2}.$$

## § 11. Электростатическое поле при наличии диэлектриков

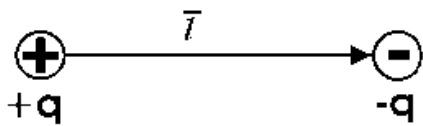
### Дипольный момент непрерывного распределения зарядов.

Влияние вещества на электрическое и магнитное поля было открыто и исследовано Фарадеем. Результаты этих работ привели Фарадея к идее близкодействия и концепции электрического поля. Электростатическая индукция была им открыта в 1837г. Тогда же он ввел в науку термины «диэлектрик» и «диэлектрическая постоянная».

Пусть в некотором объеме  $V$  имеется непрерывно распределенный заряд с объемной плотностью  $\rho$ , но пусть в целом объем электрически нейтральный, тогда

$$\int_V \rho dV = 0 \tag{11.1}$$

Если  $\rho = 0$  во всех точках объема, то эта система электрически нейтральна, а именно на нее не действует внешнее поле и сама она не способна создавать поле. Если же  $\rho$  в одних частях объема положительна, а в других отрицательна, то хотя в целом заряд объема равен нулю, такая система способна создавать электрическое поле и на нее действует внешняя электрическая сила. В первом приближении электрические свойства нейтральной системы характеризуются ее дипольным моментом. Если взять два точечных заряда  $q$  и  $(-q)$  и расположить их на расстоянии  $l$ , то такая система будет обладать дипольным моментом (см.(7.7))  $\vec{p} = ql \vec{e}$ .



При непрерывном распределении заряда по объему  $V$  дипольный момент

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{r} dV, \quad (11.2)$$

где радиус-вектор отсчитывается от точки  $O$ , принятой за начало отсчета.

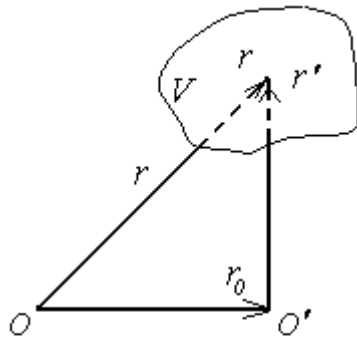


Рис.16. К определению дипольного момента непрерывного распределения зарядов

Величина (11.2) не зависит от того, какая точка выбрана за начало системы отсчета. Если за начало отсчета выбрать точку  $O'$ , положение которой относительно точки  $O$  характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}_0$ , то дипольный момент непрерывного распределения зарядов относительно этой точки будет равен

$$\vec{p}' = \int_V \rho \vec{r}' dV = \int_V \rho (\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \int_V \rho \vec{r} dV - \vec{r}_0 \int_V \rho dV = \vec{p} \quad (11.3)$$

Если взять два сколь угодно малых элементарных объема  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  с зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ , то дипольный момент

$$\vec{p} = \int_{\Delta V_1} \rho_1 \vec{r} dV_1 + \int_{\Delta V_2} \rho_2 \vec{r} dV_2 = \vec{r}_1 \int_{\Delta V_1} \rho_1 dV_1 + \vec{r}_2 \int_{\Delta V_2} \rho_2 dV_2 = \vec{r}_1 Q_1 + \vec{r}_2 Q_2, \quad (11.4)$$

где  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  - радиус-векторы этих объемов. Если, например, в объеме  $\Delta V_2$  находится положительный заряд  $Q_2 = q$ . Тогда вследствие электрической нейтральности системы  $Q_1 = -q$  и формула (11.4) принимает вид:

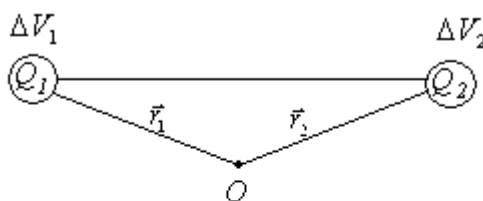


Рис.17. К вычислению дипольного момента двух точечных зарядов по формуле для непрерывного распределения зарядов

$\vec{p} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{l}$ , что совпадает с (7.7).

### Поляризация диэлектриков.

Диэлектриками называются вещества, в которых под действием поля не возникает перемещение зарядов, как, например, в проводниках. В диэлектриках они сдвигаются, но не перемещаются на

большие расстояния.

Рассмотрим электрически нейтральный объем диэлектрика. Внешнее электрическое поле стремится сдвинуть положительные заряды в направлении  $\vec{E}$ , а отрицательные – в противоположном. В результате в одних областях пространства появляются положительные заряды, а в других – отрицательные, в результате чего диэлектрик приобретает дипольный момент. Этот процесс называется поляризацией. Степень поляризации характеризуется

поляризованностью, определяемой как отношение дипольного момента  $\Delta\vec{p}$  элемента диэлектрика к его объему  $\Delta V$ :

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \quad (11.4)$$

### Молекулярная картина поляризации.

Диэлектрик состоит из атомов и молекул, причем любой его бесконечно малый физический элемент объема является электрически нейтральным. Положительный заряд сосредоточен в ядрах атомов, а отрицательный – в электронных оболочках атомов и молекул. Положительные и отрицательные заряды расположены в различных точках пространства, и, следовательно, атомы и молекулы могут обладать электрическими дипольными моментами, которые изменяются с частотой колебаний электронов в атомах порядка  $\approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Если в атоме при отсутствии внешнего электрического поля электронное облако распределено сферически симметрично относительно ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом. Аналогично, в молекулах положительные и отрицательные заряды могут обладать такой симметрией распределения, когда у них не возникает дипольный момент. Такие молекулы и атомы называются **неполярными**, например атом гелия, двухатомные молекулы, состоящие из одинаковых атомов ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , ...), симметричные многоатомные молекулы  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$  и др. При отсутствии внешнего поля такой диэлектрик не поляризован.

Молекулы и атомы, обладающие электрическим дипольным моментом при отсутствии внешнего поля, называются **полярными**, например  $\text{CO}$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{SO}_2$  и др. Постоянный дипольный момент у них имеет порядок  $10^{-29} - 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ . Это соответствует диполю, состоящему из двух элементарных зарядов  $1,6 \cdot 10^{-29} \text{ Кл}$ , расстояние между которыми  $10^{-10} \text{ м}$ , т.е. порядка атомных размеров.



Рис.18.

При отсутствии внешнего электрического поля постоянные дипольные моменты отдельных молекул ориентированы беспорядочно и, следовательно, их сумма в физически бесконечно малом объеме равна нулю, т.е. диэлектрик неполяризован.

Во внешнем электрическом поле положительные заряды стремятся сместиться по направлению напряженности поля, а отрицательные – противоположно.

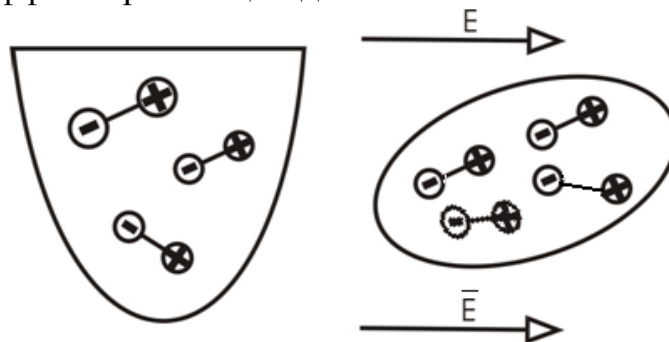
В результате неполярные молекулы приобретают дипольный момент и диэлектрик поляризуется. Полярные молекулы также приобретают дополнительный индуцированный внешним полем дипольный момент и

благодаря этому также поляризуются, но эта поляризация играет для них лишь незначительную роль. Главный механизм поляризации для них другой: во внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил, стремящиеся ориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля. В результате молекулы переориентируются так, что бесконечно малые физические элементы объема диэлектрика приобретают дипольные моменты, т.е. диэлектрик поляризуется. Поляризованность за счет переориентации молекул значительно больше, чем вследствие образования дополнительных дипольных моментов, индуцированных внешним полем.

Наряду с этими механизмами поляризации существует еще один. В ионных кристаллах под влиянием внешнего электрического поля положительные ионы смещаются в направлении напряженности поля, а отрицательные – противоположно. В результате происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, что приводит к возникновению в диэлектрике дипольных моментов, т.е. поляризация диэлектрика. Такая поляризация называется **ионной решеточной поляризацией**.

Во всех случаях поляризация количественно характеризуется поляризованностью  $P$ . Механизм поляризации проявляется лишь при изучении зависимости  $P$  от напряженности внешнего поля и других факторов. При этом формула, связывающая между собой напряженность электрического поля, электрическое смещение и поляризованность остается неизменной.

При внесении диэлектрика, состоящего из полярных молекул, в электрическое поле происходит эффект ориентации дипольных моментов



В этом случае поляризованность

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = N \langle \vec{p} \rangle \quad (15.5)$$

где  $\langle \vec{p} \rangle$  - среднее значение дипольных, равных друг другу по абсолютному значению, но различно направленных в пространстве.



При внесении неполярного диэлектрика в электрическое поле под действием поля положительные заряды смещаются по полю, а отрицательные –

противоположно поля и молекула приобретает небольшой дипольный момент, а сам диэлектрик характеризуется вектором поляризации

$$\vec{P} = N\vec{p}_0$$

$$|\vec{p}_0| \ll \langle \vec{p} \rangle$$

(11.6)

В общем случае и у полярных молекул тоже происходит небольшой сдвиг зарядов, который увеличивает степень поляризации диэлектриков. В общем случае зависимость  $\vec{P}$  от напряженности поля  $\vec{E}$  носит вид функционала, т.е.  $\vec{P} = f(\vec{E})$ , но во многих случаях эту зависимость можно представить в виде ряда по степеням  $\vec{E}$ , в котором каждый последующий член меньше предыдущего.

Диэлектрики с такой зависимостью  $P(\vec{E})$  называются нелинейными и нелинейность их проявляется лишь в сильных полях. В слабых полях зависимость  $P(\vec{E})$  носит линейный характер и может быть записана в виде

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (11.7)$$

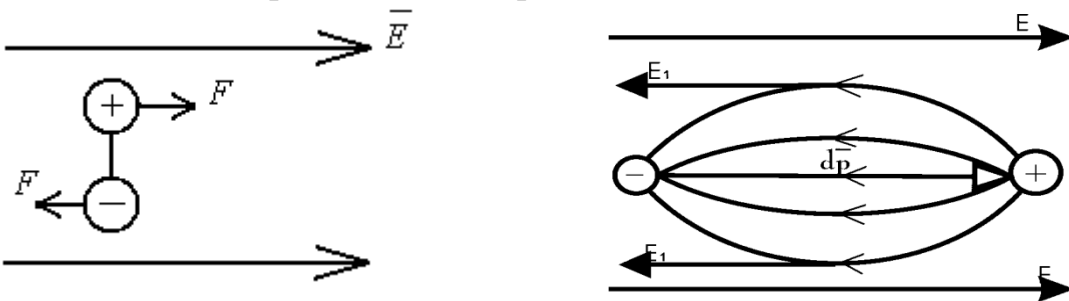
где  $\varepsilon$  – диэлектрическая восприимчивость.

### Влияние поляризации на электрическое поле

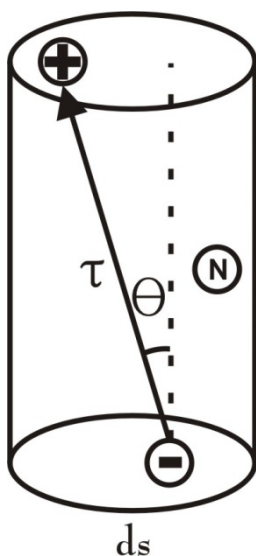
Дипольный момент элемента объема  $dV$  в соответствии с (11.5) равен

$$d\vec{p} = \vec{P}dV = \kappa\varepsilon_0\vec{E}dV \quad (11.8)$$

и совпадает по направлению с напряженностью поля  $\vec{E}$ , т. к.  $\varepsilon > 0$ .



Поэтому напряженность поля, создаваемого диполем, направлена противоположно вектору напряженности электрического поля и ослабляет его. Следовательно, роль поляризации при этом сводится лишь к разделению положительных и отрицательных зарядов, в результате в объеме и на поверхности диэлектрика образуются поляризационные или связанные заряды.



Эти заряды как бы привязаны в различных местах диэлектрика и не могут свободно перемещаться по его объему или поверхности. Они порождают электрическое поле так же как и свободные заряды.

Рассмотрим элемент поверхности  $dS$  внутри неполяризованного диэлектрика. При поляризации электрические заряды приходят в движение сквозь этот элемент поверхности. Вычислим заряд, пересекающий элемент  $dS$  при возникновении поляризованности  $\vec{P}$ . Для

упрощения формул будем считать, что движутся лишь положительные заряды. Обозначим

$q$  - заряд диполя,  $l$  - плечо диполя, соответствующее поляризованности  $\vec{P}$ ,  $N$  - концентрация зарядов. Площадку  $dS$  при возникновении поляризованности  $\vec{P}$  пересекут все положительные заряды, которые до движения, обусловленного поляризацией, находились в объеме  $dV = dS \cdot h = dSl \cos \Theta$ , следовательно

$$dQ = \cos \Theta dSNql = PdS \cos \Theta = \vec{P}d\vec{S} \quad (11.9)$$

Формула (11.9) определяет заряд, который покинет элементарный объем, и тогда в этом объеме останутся заряды противоположного знака, т.е. связанные заряды

$$dq_{св} = -\vec{P}d\vec{S} \\ q_{св} = -\int \vec{P}d\vec{S} \quad (11.10)$$

Если к (11.9) применить теорему Остроградского-Гаусса, то получим

$$\int (\rho_{св} + \text{div}\vec{P})d\vec{V} = 0, \quad (11.11)$$

$$\rho_{св} = -\text{div}\vec{P}. \quad (11.12)$$

Таким образом, объемные связанные заряды могут возникать только в диэлектриках, где поляризация изменяется от точки к точке, т.е. в неоднородных диэлектриках. Выясним, в каком случае в диэлектрике объемная плотность связанных зарядов равна нулю.

$$\int \vec{P}d\vec{S} = -q_{св}$$

Учитывая (11.6):  $\varepsilon \int \varepsilon_0 \vec{E}d\vec{S} = -q_{св}$ , и используя теорему Гаусса, получим

$$\varepsilon(q + q_{св}) = -q_{св}$$

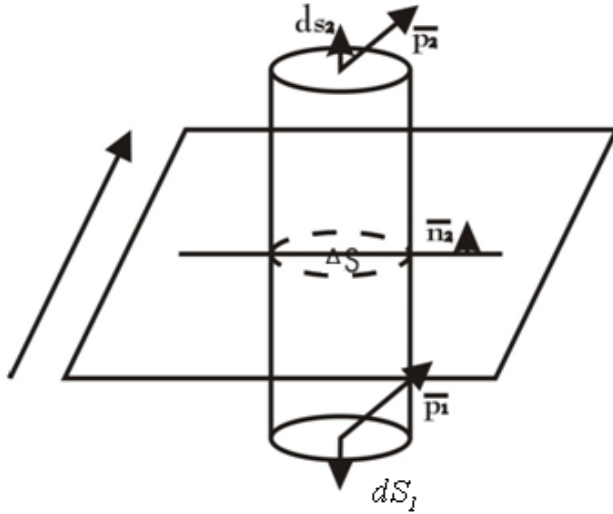
$$q_{св} = -\frac{\varepsilon q}{1 + \varepsilon} \Rightarrow \rho_{св} = -\frac{\varepsilon \rho}{1 + \varepsilon} \quad (11.13)$$

Объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике равна нулю, если он однородный и в нем не должно быть свободных зарядов с плотностью  $\rho$ . В этом случае у диэлектрика могут быть только поверхностные связанные заряды, с поверхностной плотностью  $\sigma_{св}$ .

### Граничное условие для P.

Граничными условиями называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. Эта поверхность может быть, вообще говоря, просто воображаемой поверхностью в однородной среде. Во всех случаях граничные условия позволяют определить изменение векторов поля при переходе через границу. Они выводятся с помощью уравнений для поля.

Пусть имеется граница раздела двух диэлектриков, находящихся во внешнем электрическом поле.



Построим на границе раздела диэлектриков цилиндр. Далее

$$dq_{cв} = -\vec{P}d\vec{S} \Rightarrow q_{cв} = -\int \vec{P}d\vec{S};$$

$$\int_S \vec{P}d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{P}_2 d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \vec{P}_1 d\vec{S}_1.$$

$$\Delta q_{cв} = P_{1n} \Delta S - P_{2n} \Delta S$$

$$(11.14)$$

$$\Delta q_{cв} = \sigma_{cв} \Delta S \Rightarrow \sigma_{cв} \Delta S = P_{1n} \Delta S - P_{2n} \Delta S =$$

$$\sigma_{cв} = -(P_{2n} - P_{1n})$$

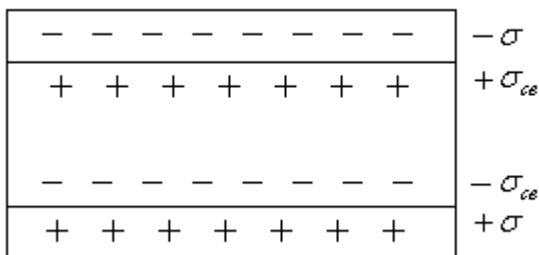
$$\sigma_{cв} = -\vec{n}_2 (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

$$(11.15)$$

Полезно заметить, что вакуум также можно рассматривать как диэлектрик, поляризованность которого равна нулю. Формула (11.15) может быть применена к границе между диэлектриком и вакуумом. В этом случае  $P_{2n}=0$  и  $\sigma_{cв}=P_{1n}$ , где  $P_{1n}$  - нормальная компонента поляризованности диэлектрика.

Сформулируем основную идею учета влияния вещества на электрическое поле, которая была прослежена на примере проводников и диэлектриков, вносимых в это поле, а именно: при наличии внешнего поля вещество само становится источником электрического поля, в результате чего внешнее поле изменяется.

**Пример:**



Рассмотрим этот процесс в случае образования электрического поля в плоском конденсаторе, пространство между обкладками которого заполнено однородным диэлектриком.

На обкладках конденсатора расположены поверхностные заряды с плотностью

$\sigma_+, \sigma_-, |\sigma_+| = |\sigma_-| = \sigma$ . В результате поляризации диэлектрика на границе диэлектрик-проводник образуются связанные заряды, т.е.  $\sigma_{cв}^+ = |\sigma_{cв}^-| = \sigma_{cв}$ .

Так как поле у поверхности проводника  $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , то поле внутри диэлектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_{cв}, \text{ откуда получаем } E = \frac{\sigma - \sigma_{cв}}{\epsilon_0}.$$

С учетом (11.14) поляризованность в проводнике равна нулю

$$\begin{aligned} \sigma_{св} &= P_n = \varepsilon_0 E \alpha \\ \vec{E} &= \frac{\sigma - \alpha \varepsilon_0 \vec{E}}{\varepsilon_0} \\ E \varepsilon_0 &= \sigma - \varepsilon_0 E \alpha \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{(1 + \alpha) \varepsilon_0} \end{aligned} \quad (11.16)$$

Если ввести величину

$$\varepsilon = 1 + \alpha, \quad (11.17)$$

$$\text{то напряженность поля в конденсаторе } E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (11.18)$$

Таким образом, при наличии диэлектрика поле в конденсаторе уменьшается  $\varepsilon$  раз. Смысл величины  $\varepsilon$ : она показывает, во сколько раз напряженность поля в диэлектрике меньше, чем напряженность поля в вакууме.

### Электрическое смещение.

Уравнение, дающее дифференциальную формулировку закона Кулона, имеет вид

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

т.е. оно показывает, что источником напряженности электрического поля являются свободные заряды. В диэлектриках это уравнение должно быть изменено с учетом того, что в образовании поля участвуют и связанные заряды

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{св}}{\varepsilon_0} \quad (11.19)$$

Так как  $\rho_{св} = -\operatorname{div} \vec{P}$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P} \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho \end{aligned} \quad (11.20)$$

Определим новый вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (11.21)$$

который называется вектором смещения. Он не является чисто полевым вектором, ибо учитывает влияние вещества на поле. Для него можно записать уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (11.22)$$

т.е. источником вектора  $\vec{D}$  являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается, а поле, связанное со связанными зарядами, уже учтено в векторе  $\vec{D}$ .

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (11.23)$$



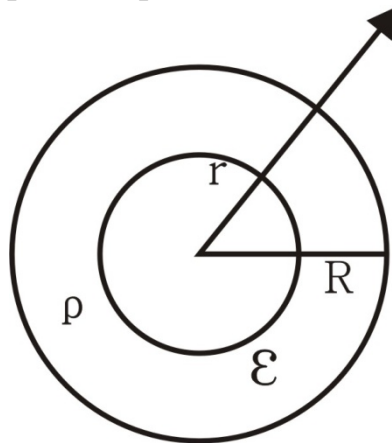
где  $\varepsilon$  определяется (11.17). Для диэлектриков электростатическая теорема Гаусса формулируется для вектора  $\vec{D}$ . Так как  $\text{div}\vec{D} = \rho$ , то, проинтегрировав обе части по объему  $\int_V \text{div}\vec{D}dV = \int_V \rho dV$  и применив теорему Остроградского-

Гаусса, получим электростатическую теорему Гаусса для диэлектриков:

$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = Q. \quad (11.24)$$

### Пример

Дан диэлектрический шар радиуса  $R$ , в котором заряд распределен равномерно с объемной плотностью  $\rho$ .



Будем рассматривать две области:  $r < R$  и  $r > R$

1.  $r < R$

Применяя теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$  (11.24) получаем

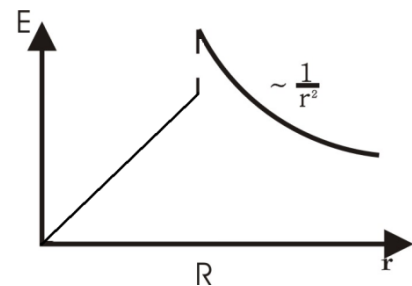
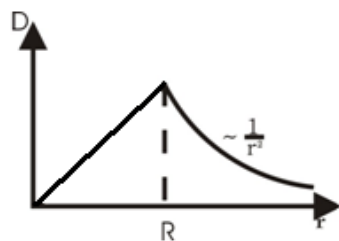
$$D4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow D = \frac{\rho^2 r}{3}$$

Напряженность поля найдем из (11.23):

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

2.  $r > R$

$$D4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho; \quad D = \frac{\rho R^3}{3r^2}; \quad E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$



Функция  $D(r)$  непрерывна, а  $E(r)$  на границе терпит разрыв.

### Граничное условие для вектора $\vec{D}$ .

Рассмотрим границу двух диэлектриков. Когда мы получали граничные условия для вектора  $\vec{P}$ , мы исходили из уравнения  $\text{div}\vec{P} = -\rho_{св}$  и нашли, что  $\sigma_{св} = -(P_{2n} - P_{1n})$ , где  $\sigma_{св}$  - поверхностная плотность заряда на границе двух диэлектриков.

Исходя из уравнения  $\text{div}\vec{D} = \rho$ , где  $\rho$  - плотность свободных зарядов, можем аналогичным образом получить граничные условия для вектора  $\vec{D}$ , т.е.

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (11.25),$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность свободных зарядов на границе двух диэлектриков.

Если имеется граница диэлектрик-проводник, то в проводнике  $\vec{E} = 0 \Rightarrow D = 0$ , тогда  $D_{2n} = \sigma$ , где  $\sigma$  - поверхностная плотность зарядов, расположенных на проводнике. С учетом определения вектора  $\vec{D}$ , получаем

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (11.26)$$

Если рассмотреть границу проводник-диэлектрик, то

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (11.27)$$

т.е. в диэлектрике напряженность поля в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме.

### Граничные условия для тангенциальной составляющей вектора E.

Рассмотрим границу диэлектриков, находящихся в электрическом поле. Выберем замкнутый контур ABCD. Вследствие потенциальности электрического поля

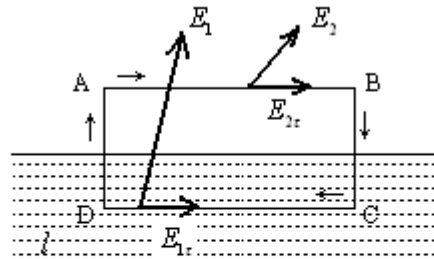


Рис.19. К выводу граничного условия для тангенциальной составляющей вектора E

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (11.28)$$

Если контур сжать, то AD и BC можно сделать сколь угодно малыми (см. §8), но тогда (11.28) будет иметь вид

$$\int E_{1r} dl - \int E_{2r} dl = 0 \Rightarrow \int (E_{1r} - E_{2r}) dl = 0 \Rightarrow E_{1r} = E_{2r} \quad (11.29)$$

т.е. тангенциальная составляющая на границе двух диэлектриков непрерывна.

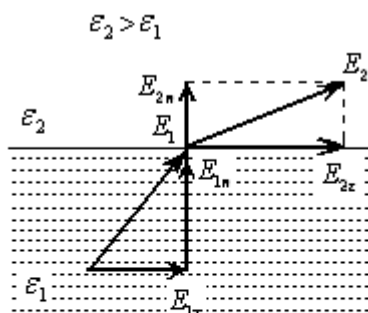


Рис.20. Преломление силовых линий на границе между диэлектриками

Рассмотрим преломление силовых линий электрического поля на границе двух диэлектриков с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ .

Пусть на границе нет свободных зарядов, т.е.  $\sigma = 0$ .

Тогда из (11.25) имеем, что  $D_{2n} = D_{1n}$ , т.е.  $\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}$ , т.е.  $\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$

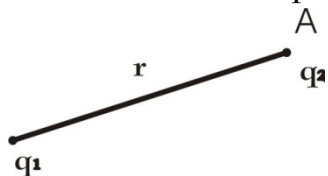
Так как  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , то  $E_{2n} < E_{1n}$ . А так как тангенциальная составляющая напряженности непрерывна, т.е.  $E_{1r} = E_{2r}$ , то на границе двух диэлектриков силовые линии преломляются.

## §12. Энергия электростатического поля

### Энергия взаимодействия дискретных зарядов.

Если имеются два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , то потенциал точки А  $\varphi_A = \frac{W}{q_2}$ , где

$W$  - потенциальная энергия  $q_2$  в поле заряда  $q_1$ .



С другой стороны  $\varphi_A = k \frac{q_1}{r}$ .

Приравнявая левые и правые части имеем

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (12.1)$$

Эта формула определяет потенциальную энергию взаимодействия двух точечных зарядов.

Пусть даны две сферы очень малого радиуса, несущие заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ . Тогда по аналогии с точечными зарядами

$$W' = k \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (12.2)$$

т.е.  $W'$  равна работе сил поля, если один заряд унести от другого в бесконечность.

Перепишем (12.2):

$$W' = \frac{1}{2} \left( k \frac{Q_2}{r} Q_1 + k \frac{Q_1}{r} Q_2 \right) = \frac{1}{2} (\varphi'_1 Q_1 + \varphi'_2 Q_2) \quad (12.3)$$

где  $\varphi'_i$  - потенциал, созданный вторым зарядом в том месте, где находится первый заряд.

Если эту формулу обобщить на систему зарядов, то

$$W' = \frac{1}{2} \sum_i \varphi'_i Q_i. \quad (12.4)$$

Полученная формула определяет энергию взаимодействия системы зарядов.

### Энергия взаимодействия при непрерывном распределении заряда.

Пусть в элементе объема  $dV$  находится заряд  $dq = \rho dV$ . Для определения энергии взаимодействия всех элементов  $dq$  в объеме  $V$  можно использовать формулу (12.4), перейдя в ней от суммы к интегралу:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV, \quad (12.5)$$

где  $\varphi$  - потенциал, создаваемый всеми зарядами в точке нахождения заряда  $dq$ .

### Собственная энергия.

На первый заряд формулы (12.4) и (12.5) кажутся аналогичными, тем более что (12.5) “выведена” из (12.4). Однако между ними существует принципиальное

различие. Формула (12.4) учитывает лишь энергию взаимодействия между заряженными шарами, но не учитывает энергию взаимодействия между элементами зарядов, находящихся на каждом шаре. А (12.5) учитывает и первое, и второе.

Учитывая сказанное, энергию взаимодействия зарядов можно записать в виде:

$$W = W' + W_{\text{соб}} \quad (12.6)$$

Величина  $W_{\text{соб}}$  - это энергия заряженных шаров, учитывающая взаимодействие зарядов между собой на каждом шаре. Собственная энергия зависит от законов распределения зарядов шара и значений зарядов. Если имеется уединенный шар, то  $\varphi = k \frac{Q}{R}$ .

$$\text{Тогда } W_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{kQ^2}{2R} \quad (12.7)$$

Это означает, что собственная энергия точечного заряда равна бесконечности, т.е. при  $R \rightarrow 0$   $W_{\text{соб}} \rightarrow \infty$ . Это приводит к серьезным трудностям при использовании модели точечных зарядов.

### Плотность энергии электрического поля и энергия электрического поля.

Воспользовавшись уравнением

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

Запишем (12.5) в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \int_V \varphi \text{div} \vec{D} dV$$

Учитывая формулу векторного анализа

$$\text{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \text{div} \vec{D} + \vec{D} \text{grad} \varphi = \varphi \text{div} \vec{D} - \vec{E} \vec{D}$$

$$\varphi \text{div} \vec{D} = \vec{E} \vec{D} + \text{div}(\varphi \vec{D}) \quad (12.8)$$

получим:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV + \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV, \quad (12.9)$$

Применим ко второму интегралу в (12.9) теорему Остроградского-Гаусса и оценим его:

$$\int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV = \int_S \varphi \vec{D} d\vec{S} \quad (12.10)$$

Если в некотором объеме сосредоточены заряды, их плотность равна  $\rho$ , то на далеких расстояниях  $r$  от зарядов, а мы смотрим поле на значительном расстоянии от объема, можно провести оценку:

$$\varphi \sim \frac{1}{r} \quad D \sim \frac{1}{r^2}, \text{ т.е. } \varphi D \sim \frac{1}{r^3} \quad S \sim r^2.$$

Значит при интегрировании по всему объему второй интеграл в (12.9) имеет порядок  $\frac{1}{r}$ , значит при удалении поверхности интегрирования на бесконечность, т.е. при  $r \rightarrow \infty$  он стремится к нулю. Учитывая это из (12.9) получаем

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \vec{D} dV, \quad (12.11)$$

где интегрирование происходит по всему пространству.

Формула (12.11) и определяет энергию электрического поля. Но эта формула связана с формулой

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV. \quad (12.12)$$

Формула (12.12) утверждает, что энергия поля локализована на элементарных зарядах и определяется через них. Эти заряды создают поле в пространстве, а его характеристики – векторы  $\vec{E}, \vec{D}$ . Энергия поля выражается через них с помощью (12.11). Но и (12.11) и (12.12) количественно дают одинаковый результат. Рассмотрим шар радиуса  $R$  с зарядом  $Q$ , тогда из (12.12) следует (12.7).

По теореме Гаусса

$$E = \frac{kq}{\varepsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

Тогда  $W = \frac{1}{2} \int_R^\infty k \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 dr = [\varepsilon = 1] = \frac{kq^2}{2R}$ , что совпадает с (12.7)

Плотность энергии электрического поля определяется соотношением

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \quad (12.13)$$

### Энергия поля поверхностных зарядов.

Если заряды располагаются не только по объему, но и на поверхности, то энергия в данном случае

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS \quad (12.14)$$

### Энергия заряженных проводников.

Поскольку на проводниках имеются лишь поверхностные заряды, а сами проводники являются эквипотенциальными телами, то при наличии системы разряженных шаров

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \quad (12.15)$$

где  $Q_i = \int_{S_i} \sigma_i dS_i$ .

Если учесть выражение для потенциалов  $\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Q_j$ , то (12.15) можно записать

в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} Q_i Q_j \quad (12.16)$$

Если выразить заряды через потенциалы, то

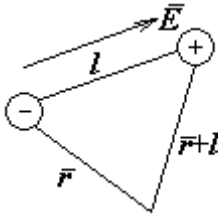
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (12.17)$$

Формулы (12.15), (12.16), (12.17) определяют энергию взаимодействия системы заряженных шаров.

Рассмотрим заряженный конденсатор. Его энергия согласно (12.3) равна:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2) = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{C (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad (12.18)$$

### Энергия диполя во внешнем поле.



Энергия диполя равна сумме энергий зарядов диполя, т.е.

$$W = q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q\varphi(\vec{r}).$$

Учитывая, что  $|\vec{l}| \ll |\vec{r}|$  и разлагая  $\varphi(\vec{r} + \vec{l})$  в ряд, получаем

$$\varphi(\vec{r} + \vec{l}) \approx \varphi(\vec{r}) + l_x \frac{d\varphi}{dx} + l_y \frac{d\varphi}{dy} + l_z \frac{d\varphi}{dz} = \varphi(\vec{r}) - l_x E_x - l_y E_y - l_z E_z = \varphi(\vec{r}) - \vec{l}\vec{E} - \dots$$

Тогда энергия диполя во внешнем поле определится соотношением

$$W = -q\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E} \quad (12.19)$$

### §13. Силы в электрическом поле.

Все силы, возникающие в электростатическом поле, являются в конечном итоге силами, действующими на заряд.

Сила, действующая на точечные заряды:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\text{grad}\varphi \quad (13.1)$$

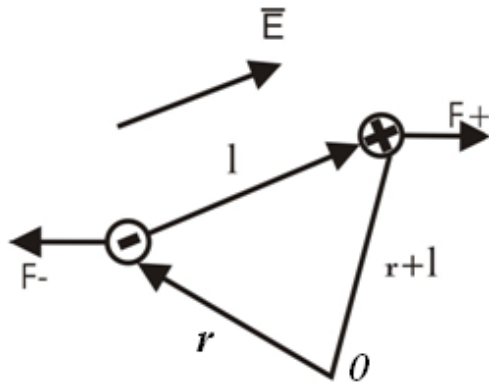
Если заряд распределен непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , то сила, действующая на непрерывно распределенный заряд

$$d\vec{F} = \rho\vec{E}dV \quad (13.2)$$

Объемная плотность этой силы равна

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} = -\rho\text{grad}\varphi \quad (13.3)$$

Сила, действующая на диполь:



На каждый из зарядов действует  $F_+$  и  $F_-$  и результирующая сила равна их векторной сумме:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{E}\vec{r}_2(r)) \approx E(r) + l_x \frac{dE}{dx} + l_y \frac{dE}{dy} + l_z \frac{dE}{dz} + \dots = -\vec{E}(r) + (\vec{\nabla}\vec{l})\vec{E} + \dots,$$

тогда

$$\vec{F} \approx q(\vec{l}\vec{\nabla})\vec{E} = (\vec{p}\vec{\nabla})\vec{E} \quad (13.4)$$

Если поле однородное, то сила равна нулю, поскольку к зарядам диполя приложены противоположно направленные и равные по модулю силы.

### Момент сил, действующих на диполь.

Силы, приложенные к зарядам диполя, составляют пару сил с моментом

$$\vec{M} = [\vec{l} \times \vec{F}] = [\vec{l} \times q\vec{E}] = [\vec{p} \times \vec{E}]. \quad (13.5)$$

### Объемная сила, действующая на диэлектрик.

Это сила, приложенная к объему  $dV$  диэлектрика. Она равна сумме сил, действующих на элементарные диполи внутри этого объема, т.е.

$$d\vec{F} = \sum_{\Delta V} \vec{F}_i = \sum_{\Delta V} (\vec{p}_i \vec{\nabla}) \vec{E}_i, \text{ где } \Delta V \text{ означает суммирование по всем элементарным}$$

диполям в объеме  $\Delta V$ .

В макроскопическом случае можно считать, что каждый диполь находится в одном и том же поле и  $\vec{E}_i \approx \vec{E}$ .

$$d\vec{F} = \sum_{\Delta V} (\vec{p}_i \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Можно записать  $\sum_{\Delta V} \vec{p}_i = \vec{P}\Delta V$ , тогда  $d\vec{F} = (\vec{P}\vec{\nabla})\vec{E}\Delta V$ .

Объемная плотность этих сил

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = (\vec{P}\vec{\nabla})\vec{E} \quad (13.6)$$

Если учесть, что вектор  $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ rot}$ , а  $(\vec{E}\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{2} \text{grad}\vec{E}^2 - \vec{E} \text{rot}\vec{E}$ , и  $\text{rot}\vec{E} = 0$ , тогда

объемная плотность сил, действующих на диэлектрик

$$\vec{f} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0}{2} \text{grad}\vec{E}^2 \quad (13.7)$$

Эта формула показывает, что в диэлектрике на элементарный объем действуют силы, стремящиеся сдвинуть объем в направлении максимальной скорости возрастания квадрата напряженности поля. Иногда это выражают в виде

утверждения, что элемент объема диэлектрика увлекается в направлении роста модуля напряженности.

Наряду с объемными у диэлектриков имеются также и поверхностные силы, которые возникают в поверхностном слое диэлектрика. Они действуют наряду с объемными.

### **Силы, действующие на проводник.**

На заряд  $\Delta q = \sigma \Delta S$ , находящийся на элементе поверхности  $\Delta S$  проводника, действуют лишь половина напряженности поля, имеющегося у поверхности проводника, т.е. напряженность со стороны всех остальных зарядов, поскольку вторая половина  $S$ , создается самим зарядом элемента поверхности и не может на него действовать (см. §8).

Напряженность поля у поверхности проводника граничащего с диэлектриком определяется формулой

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (13.9)$$

Половину  $E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0}$  дают все остальные заряды, находящиеся на проводнике вне

$\Delta S$ . Тогда

$$\vec{f}_{нов} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{dq \frac{E_n}{2}}{dS} = \frac{\sigma E_n}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \vec{n}. \quad (13.10)$$

Из последней формулы следует, что на поверхности проводника сила всегда действует в направлении внешней нормали и как бы стремится увеличить этот объем. Результирующая сила, действующая на проводник в целом, будет равна

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{n} dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} d\vec{S}, \quad (13.11)$$

где  $S$  – поверхность проводника.

Выражение (13.11) позволяет сразу же вычислить силу, приходящуюся на участок площадью  $S$  обкладки плоского конденсатора, заполненного диэлектрика:

$$F = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} S, \quad (13.12)$$

поскольку поле при этом однородно, т.е.  $\sigma$  и  $\varepsilon$  в подынтегральном выражении (13.11) являются постоянными.

## **§14. Постоянный электрический ток.**

### **Электрическое поле при наличии постоянных токов.**

Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (14.1)$$

При наличии тока в проводнике внутри проводника имеется электрическое поле. Плотность тока по сечению проводника различна и распределена неравномерно. Максимальный ток течет в поверхностном слое, внутри он



практически равен нулю, но мы рассматриваем проводники с очень малой площадью поперечного сечения – линейные проводники. Для них считаем, что плотность тока по сечению одинакова и направлена вдоль элемента длины проводника  $dl$ .

$$\vec{I} = \vec{j}\Delta S \quad (14.2)$$

Таким образом, в общем случае вопрос о напряженности электрического поля и плотности постоянного тока внутри толстых проводников является сложным. Распределение плотности тока по сечению зависит от ряда факторов и, в частности, от формы проводника. О напряженности поля вблизи поверхности проводника можно высказать более определенные суждения. Вблизи поверхности как напряженность поля, так и плотность тока направлены касательно поверхности. Нормальные к поверхности составляющие этих величин внутри проводника отсутствуют. Из граничного условия заключаем, что (11.29) *вблизи поверхности вне проводника имеется электрическое поле, тангенциальная составляющая напряженности  $E_\tau$  которого равна тангенциальной составляющей напряженности  $E_\tau$  поля внутри проводника* (рис. 22). Однако о нормальной составляющей напряженности электрического поля вне проводника отсюда никаких выводов сделать нельзя.

### **Вопрос об источниках поля.**

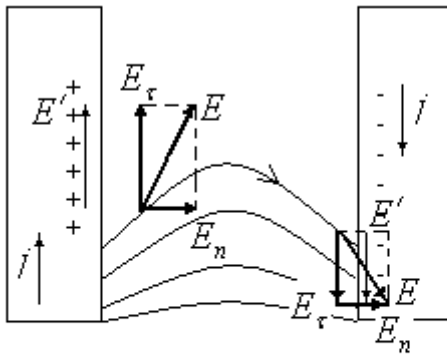
Чем же порождается электрическое поле внутри проводника, что является источником этого поля? Так как существование постоянного тока в цепи обеспечивается соответствующим источником постоянного тока, например гальваническим элементом, то ясно, что он имеет какое-то отношение к порождению электрического поля. Однако непосредственно он не может породить это поле. Такое утверждение очевидно в случае очень длинного проводника для участков цепи, удаленных от батареи на очень большое расстояние, например на сотни километров. Напряженность электрического поля, которую могут создать заряды полюсов батареи, на этом расстоянии ничтожно мала. Следовательно, батарея не может быть непосредственным источником электрического поля внутри проводника.

Единственным источником постоянного электрического поля может быть только электрический заряд. Поэтому обсуждаемая проблема сводится к вопросу о том, какими зарядами порождается поле внутри проводника и где эти заряды находятся?

### **Поле вне проводника.**

Для ответа на этот вопрос необходимо изучить электрическое поле вне проводника. Оказывается, что вне проводника вблизи его поверхности наряду с тангенциальной составляющей напряженности  $E_\tau$  электрического поля имеется также нормальная составляющая  $E_n$ . Однако внутри проводника  $E_n = 0$ . Следовательно, заключаем, что *на поверхности проводника должны существовать заряды, поверхностная плотность которых*

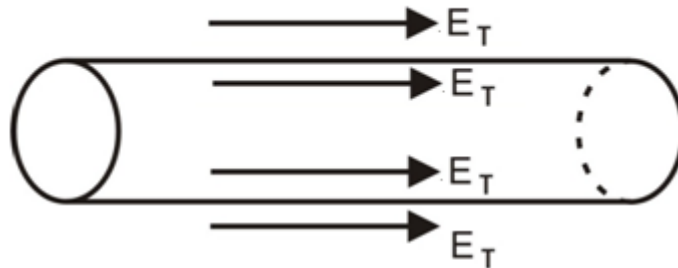
$$\sigma = \varepsilon_0 E_n. \quad (14.3)$$



*Рис.21. Демонстрация наличия нормальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника*

В формуле (14.3) предполагается, что проводник находится в вакууме. Если его погрузить в диэлектрическую среду, то вместе с  $\varepsilon_0$  в формулу (14.3) войдет диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  среды. Таким образом, на поверхности проводника, по которому течет постоянный электрический ток, имеются электрические заряды. Они и являются источниками электрического поля, которое существует в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока. Поверхностная плотность заряда на различных участках проводника может

иметь различные знаки. В однородных проводниках имеются только поверхностные заряды. Следовательно, вблизи поверхности проводника, как напряженность поля, так и плотность тока направлены касательно поверхности, поэтому вблизи поверхности проводника, вне его, имеется электрическое поле, тангенциальная составляющая которого  $E_t$  направлена вдоль поверхности проводника.



*Рис.22. Поле внутри проводника и тангенциальная составляющая напряженности поля вблизи поверхности вне проводника*

Такая же составляющая имеется и вблизи поверхности, и внутри проводника. Существование тока в проводнике обеспечивается тем, что на его концах в течение длительного времени поддерживается ненулевая разность потенциалов. Но сам источник тока не в состоянии обеспечить это поле внутри проводника.

### **Механизм существования постоянного тока.**

Источник тока называется источником сторонних электродвижущих сил (сторонних э.д.с.). По результатам своего действия он представляет собой процесс или устройство, отделяющее положительные заряды от отрицательных. После разделения заряды перемещаются на электроды и по закону Кулона

действуют на другие заряды, и т.д. В результате этих коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает такое распределение зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводника соответствующего электрического поля. Таким образом, роль зарядов на полюсах источника сторонних э. д. с. состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно соответствующее электрическое поле, а в том, чтобы обеспечить такое распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них. А это и обеспечивает существование постоянного тока. Поскольку взаимодействие между зарядами осуществляется посредством электромагнитных сил, процесс образования постоянного тока в цепи после ее замыкания характеризуется скоростью распространения электромагнитных волн, зависящих от распределения емкостей, индуктивностей и других характеристик цепи. В свободном пространстве скорость распространения электромагнитных взаимодействий равна скорости света.

Следовательно, при его подключении к проводнику на поверхности появляются электрические заряды, которые служат источниками электрического поля, причем эти заряды находятся на поверхности проводника и плотность их определяется

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n . \quad (14.3)$$

### **Изменение потенциала вдоль проводника с током.**

Поскольку в проводнике при наличии постоянного тока  $E \neq 0$ , потенциал изменяется вдоль проводника, т.е. в отличие от электростатики потенциал не является постоянным во всех точках проводника. Однако поле внутри проводника создается неподвижными, постоянными по времени поверхностными зарядами и поэтому так же, как в электростатике, является потенциальным.

Так как в проводнике  $E \neq 0$ , то потенциал изменяется вдоль проводника и разность потенциалов между двумя точками равна

$$\varphi(1) - \varphi(2) = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} . \quad (14.4)$$

Считаем, что поле постоянно по сечению, тогда  $\varphi(1) - \varphi(2) = El$ , где  $l$  - длина проводника от точки (1) до точки (2).

Величину  $\varphi(1) - \varphi(2) = \varphi_{12} = U$  называют напряжением.

Напряженность поля  $E = \frac{j}{\gamma} = \frac{jS}{\gamma S} = \frac{I}{\gamma S}$ , но  $U = El = \frac{Il}{\gamma S} = IR_{12} = IR$ , где

$$R = R_{12} = \frac{l}{\gamma S} . \quad (14.5)$$

Формула (14.5) определяет омическое сопротивление участка проводника или просто сопротивление участка проводника.

Закон Ома для участка однородной цепи имеет вид

$$I = \frac{U}{R}. \quad (14.6)$$

Для поддержания постоянного тока в цепи в течение длительного времени используются источники постоянного тока. Это аккумуляторы.

Источник тока характеризуется электродвижущей силой (ЭДС)

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q}. \quad (14.7)$$

Если рассмотреть замкнутую цепь, то благодаря наличию ЭДС в этой цепи существует ток и закон Ома для замкнутой цепи имеет вид



$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (14.8)$$

где  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.

Мы различаем участок однородной цепи, как участок, не содержащий электродвижущей силы и неоднородный участок как участок, содержащий источник тока.

### Линейные цепи. Правила Кирхгофа.

Правила Кирхгофа служат для составления системы уравнений, из которой находятся силы тока для разветвленной цепи любой сложности. Они являются записью закона Ома (14.8) для каждого из замкнутых контуров и закона сохранения заряда в каждом узле. Правила знаков для сил тока и э. д. с. В каждом из замкнутых контуров такие же, как для изолированного контура. Направление положительного обхода для всех контуров выбирается одинаковым. Закон сохранения заряда в узлах требует, чтобы сумма сил токов, входящих в узел, была равна сумме сил токов, выходящих из него, иначе говоря, сумма алгебраических значений сил токов в узле должна быть равной нулю. При составлении суммы силы токов, изображаемых стрелками в направлении от узла, берутся, например, со знаком минус, а силы токов, изображаемых стрелками с направлением к узлу, со знаком плюс. Можно, конечно, брать обратные знаки, это не изменит соответствующих уравнений, важно лишь для всех узлов применять одно и то же правило.

Таким образом, правила Кирхгофа гласят:

1. сумма алгебраических значений сил токов в каждом узле, равна нулю:

$$\sum_k (\pm I_k) = 0. \quad (14.9)$$

2. сумма произведений алгебраических значений сил токов на сопротивление соответствующих участков каждого из замкнутых контуров равна сумме алгебраических значений сторонних э. д. с. в каждом замкнутом контуре:

$$\sum_k (\pm I_k R_k) = \sum_i (\pm \varepsilon_i) \quad (14.10)$$

Можно показать, что получающаяся при этом система уравнений является полной и позволяет определить все токи. Эти законы вывел Кирхгоф (1824-1887).

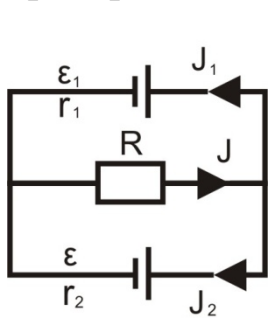
Правила Кирхгофа служат для составления систем уравнений, из которых могут быть найдены силы тока для разветвленной цепи любой сложности.

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда – (14.9). Причем токи, входящие в узел со знаком ‘+’, выходящие – ‘-’.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии.

Записав эту систему уравнений для любой разветвленной цепи всегда получаем на одно уравнение больше, чем нужно, т.к. это уравнение является линейно зависимым, т.е. является линейной комбинацией остальных уравнений.

**Пример.**



Дано:  $\varepsilon_1, r_1, \varepsilon_2, r_2, R$

Найти:  $I_1, I_2, I$

1)  $I_1 - I + I_2 = 0$

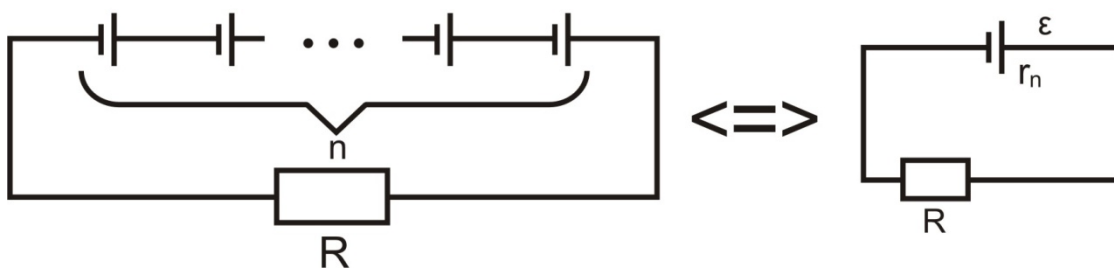
2)  $-I_1 r_1 + IR = -\varepsilon_1$

3)  $-I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$

Можно составить еще одно уравнение  $IR + I_2 r_2 = -\varepsilon_2$ , которое является линейной комбинацией уравнения (2) и (3).

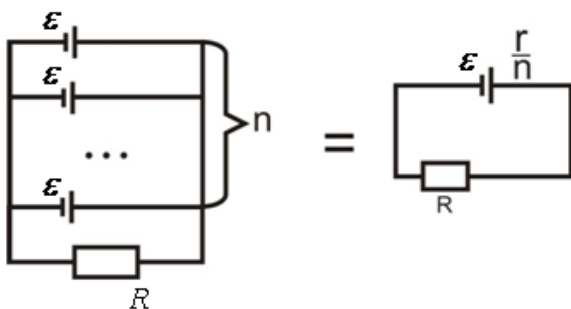
При соединении источников в батарею руководствуются следующими соотношениями:

1) последовательное соединение



$$I = \frac{n\varepsilon}{R + nr}; \tag{14.7}$$

2) параллельное соединение



$$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}}. \tag{14.8}$$

### §15. Закон Джоуля-Ленца. Работа и мощность тока.

Если между двумя точками с напряжением  $U$  перенести заряд  $dq$ , то совершается работа  $dA = Udq$ . Сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , а значит  $dq = Idt$  и  $dA = IUdt$ .

Работа тока

$$dA = IUdt. \quad (15.1)$$

Ток, проходя по проводнику, совершает работу (15.1) в результате чего в проводнике выделяется тепло Джоуля-Ленца.

$$dQ = dA = I^2 Rdt \quad (15.2)$$

$$dQ = IUdt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 Rdt$$

Мощность, развиваемая током

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \quad (15.3)$$

В истории законом Джоуля-Ленца называют формулу (15.3), а не формулу (15.2). Закон был открыт в 1841 г. Дж. Джоулем (1818–1889) и в последующем подробно исследован Ленцем.

Применим закон Джоуля-Ленца к бесконечному круглому цилиндру сечением  $\Delta S$ .



Рис.23. К выводу закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Учитывая, что сопротивление бесконечно малого цилиндра равно  $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$ .

Из (15.3) можем получить, что  $\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}$ .

Введем объемную плотность тепловой мощности, выделяемой в проводнике:

$$P_V = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta l} = \frac{j^2}{\gamma}. \quad (15.4)$$

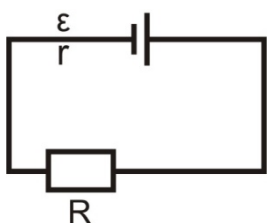
Формула (15.4) выражает закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме, поскольку все величины относятся к одной и той же точке.

Преобразуем (15.4):

$$P_V = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{(\gamma E)^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \gamma E E = j E = \bar{j} \bar{E}. \quad (15.5)$$

Любое из этих равенств является записью закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

**Пример.**



Рассмотрим замкнутую цепь, содержащую источник тока и нагрузку  $R$ . Энергия, вырабатываемая источником тока  $dA = I\epsilon dt$

Эта работа по закону Джоуля-Ленца  $dA = dQ$ ,

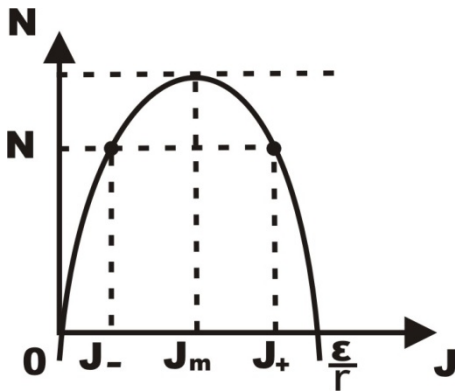
$$I\epsilon dt = I^2 Rdt + I^2 rdt$$

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r$$

$$N = I^2R$$

$$I\varepsilon - I^2r - N = 0$$

$$N = I\varepsilon - I^2r$$



Для мощности  $N$  существуют два тока

$$I_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4rN}}{2r}$$

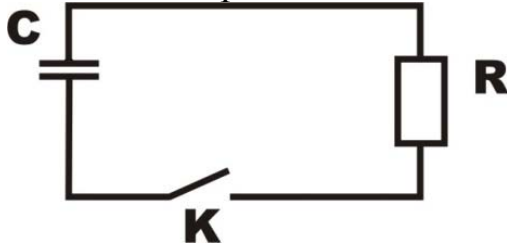
При той же полезной мощности меньшая энергия вырабатывается источником тока при меньшем токе. При этом и меньшие потери на источнике тока:

$$КПД = \eta \cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{I^2R}{I^2R + I^2r} = \frac{R}{R+r}$$

### Переходные процессы.

Рассмотрим переходные процессы, которые могут происходить в цепи при ее замыкании и размыкании.



В некоторый момент времени  $t < 0$  подключили конденсатор к источнику постоянного напряжения и зарядили его, т.е. на конденсаторе имеется заряд  $q_0 = U_0C$ .

В момент  $t=0$  замыкаем ключ  $k$ , тогда в цепи появляется ток  $I = -\frac{dq}{dt}$ .

Напряжение  $U = IR$  и  $U = \frac{q}{C}$ , приравняв правые части, получим

$$\frac{q}{C} = (-\frac{dq}{dt})R$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$q = C_0 e^{-\frac{t}{t_x}}$ , где  $t_x = RC$  ( $t_x$ -характерное время установления тока)

$$t = 0 \Rightarrow q = q_0 \Rightarrow C_0 = q_0 \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{t_x}}$$

$$I = \frac{q_0}{t_x} e^{-\frac{t}{t_x}} = I_m e^{-\frac{t}{t_x}}$$

Количество теплоты  $dQ = I^2 R dt$

$$dQ = I_m^2 R e^{-\frac{2t}{t_x}}$$

Интегрируя последнее соотношение, находим

$$Q(t) = I^2 R \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{I_m^2 R \tau_x}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_x}}) = \frac{q_0^2}{2C} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_x}})$$

При  $t \rightarrow \infty$  вся энергия заряженного конденсатора превращается в теплоту, т.е.

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = Q.$$

### §16. Магнитное поле. Закон взаимодействия токов

Взаимодействие неподвижных зарядов описывается законом Кулона. Однако закон Кулона недостаточен для анализа взаимодействия движущихся зарядов. В опытах Ампера впервые появилось сообщение о том, что движущиеся заряды (токи) создают в пространстве некоторое поле, приводя к взаимодействию этих токов. Было установлено, что токи противоположных направлений отталкиваются, а одного направления – притягиваются. Поскольку оказалось, что поле тока, действует на магнитную стрелку точно так же, как и поле постоянного магнита, то это поле тока называли магнитным. Поле тока называется магнитным полем. Впоследствии было установлено, что у этих полей одна и та же природа.

#### Взаимодействие элементов тока.

Закон взаимодействия токов был открыт экспериментально задолго до создания теории относительности. Он значительно сложнее закона Кулона, описывающего взаимодействие неподвижных точечных зарядов. Этим и объясняется, что в его исследовании приняли участие многие ученые, а существенный вклад внесли Био (1774 - 1862), Савар (1791 - 1841), Ампер (1775 - 1836) и Лаплас (1749 - 1827).

В 1820 г. Х. К. Эрстед (1777 - 1851) открыл действие электрического тока на магнитную стрелку. В этом же году Био и Савар сформулировали закон для силы  $dF$ , с которой элемент тока  $I dl$  действует на магнитный полюс, удаленный на расстояние  $r$  от элемента тока:

$$dF \cong I dl \varphi(\alpha) f(r), \quad (16.1)$$

где  $\alpha$  – угол, характеризующий взаимную ориентацию элемента тока и магнитного полюса. Функция  $\varphi(\alpha)$  вскоре была найдена экспериментально.

Функция  $f(r)$  теоретически была выведена Лапласом в виде

$$f(r) \cong 1/r^2. \quad (16.2)$$

Таким образом, усилиями Био, Савара и Лапласа была найдена формула, описывающая силу действия тока на магнитный полюс. В окончательном виде закон Био-Савара-Лапласа был сформулирован в 1826г. В виде формулы для силы, действующей на магнитный полюс, поскольку понятия напряженности поля еще не существовало.

В 1820г. Ампер открыл взаимодействие токов – притяжение или отталкивание параллельных токов. Им была доказана эквивалентность соленоида и постоянного магнита. Это позволило четко поставить задачу исследования: свести все магнитные взаимодействия к взаимодействию элементов тока и

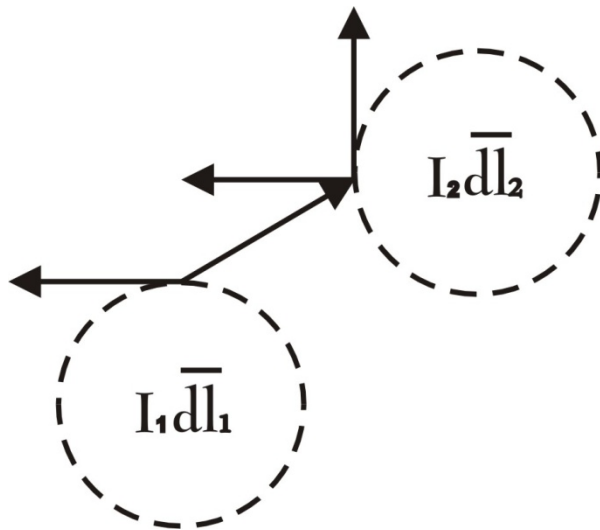


найти закон, играющий в магнетизме роль, аналогичную закону Кулона в электричестве. Ампер по своему образованию и склонностям был теоретиком и математиком. Тем не менее при исследовании взаимодействия элементов тока он выполнил очень скрупулезные экспериментальные работы, сконструировав ряд хитроумных устройств. Станок Ампера для демонстрации сил взаимодействия элементов тока. К сожалению, ни в публикациях, ни в его бумагах не осталось описания пути, каким он пришел к открытию. Однако формула Ампера для силы отличается от (16.2) наличием в правой части полного дифференциала. Это отличие несущественно при вычислении силы взаимодействия замкнутых токов, поскольку интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Учитывая, что в экспериментах измеряется не сила взаимодействия элементов тока, а сила взаимодействия замкнутых токов, можно с полным основанием считать Ампера автором закона магнитного взаимодействия токов. Используемая в настоящее время формула для взаимодействия токов. Используемая в настоящее время формула для взаимодействия элементов тока была получена в 1844г. Грассманом (1809 - 1877).

Если ввести 2 элемента тока  $J_1 dl_1$  и  $J_2 dl_2$ , то сила, с которой элемент тока  $J_1 dl_1$  действует на элемент тока  $J_2 dl_2$  будет определяться следующей формулой:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_2 d\vec{l}_2 \times [J_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}, \quad (16.2)$$

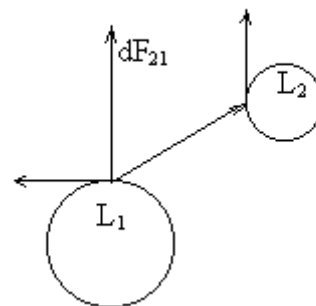
где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$



Точно также можно записать:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_1 d\vec{l}_1 \times [J_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}]}{r_{21}^3} \quad (16.3)$$

Легко видеть:



Так как векторы  $d\vec{F}_{12}$  и  $d\vec{F}_{21}$  имеют между собой угол не равный  $180^\circ$ , то очевидно  $d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} \neq 0$ , т.е. III-ий закон Ньютона для элементов тока не выполняется. Но если вычислить силу, с которой ток  $J_1$ , текущий по замкнутому контуру  $L_1$ , действует на ток  $J_2$ , текущий по замкнутому контуру  $L_2$ :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 J_1 J_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}, \quad (16.4)$$

а затем вычислить  $\vec{F}_{21}$ , то  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ , т.е. для токов Ш-ий закон Ньютона выполняется.

### Описание взаимодействия токов с помощью магнитного поля.

В полной аналогии с электростатикой взаимодействие элементов тока представляется двумя стадиями: элемент тока  $J_1 d\vec{l}_1$  в месте нахождения элемента  $J_2 d\vec{l}_2$  создает магнитное поле, которое действует на элемент  $J_2 d\vec{l}_2$  с силой  $d\vec{F}_{12}$ . Поэтому элемент тока  $J_1 d\vec{l}_1$  создает в точке нахождения элемента тока  $J_2 d\vec{l}_2$  магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (16.5)$$

На элемент  $J_2 d\vec{l}_2$ , находящийся в точке с магнитной индукцией  $d\vec{B}_{12}$ , действует сила

$$d\vec{F}_{12} = J_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12} \quad (16.6)$$

Соотношение (16.5), которое описывает порождение магнитного поля током, называется законом Био-Савара. Проинтегрировав (16.5) получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{J d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (16.7)$$

где  $r$  - радиус-вектор, проведенный от элемента тока  $J dl$  к точке, в которой вычисляется индукция  $\vec{B}$ .

Для объемных токов закон Био-Савара имеет вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j \times \vec{r}}{r^3} dV, \quad (16.8)$$

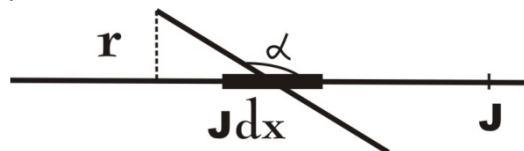
где  $j$  – плотность тока.

Из опыта следует, что для индукции магнитного поля справедлив принцип суперпозиции, т.е.

$$\vec{B} = \sum_j \vec{B}_j \quad (16.9)$$

### **Пример.**

Дан прямой бесконечный ток  $J$ . Вычислим индукцию магнитного поля в точке  $M$  на расстоянии  $r$  от него.

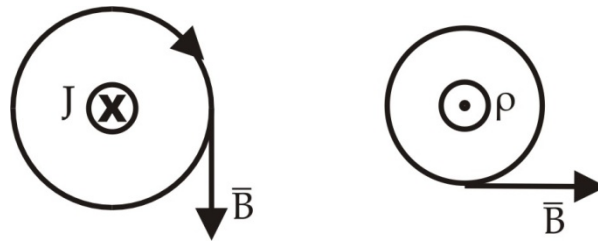


$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_1 dx \sin \alpha \cdot r_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_1 dx \sin \alpha}{r_{12}^2}.$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \int \frac{dx \sin \alpha}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 J_1}{2\pi r}. \quad (16.10)$$

Формула (16.10) определяет индукцию магнитного поля, созданного прямым током.

Направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  приведено на рисунках.



### Сила Ампера и сила Лоренца.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, называется силой Ампера. Фактически эта сила

$$d\vec{F}_A = Jd\vec{l} \cdot \vec{B} \quad (16.11)$$

или  $dF_A = Jd\vec{l} \cdot B \sin \alpha$ , где  $\alpha = (\vec{J}d\vec{l} \epsilon \vec{B})$

Перейдем к силе, действующей на проводник с током длиной  $l$ . Тогда  $F_A = \int_l dF_A$

и  $dF_A = JB \cdot \sin \alpha$ .

Но ток можно представить как  $J = \nu qns$ , где  $\nu$  - средняя скорость,  $n$  - концентрация частиц,  $S$  - площадь поперечного сечения. Тогда

$$F_A = \nu qns l B \sin \alpha, \text{ где } \alpha = (\vec{\nu} \epsilon \vec{B}). \quad (16.12)$$

Так как  $sl = V$ ,  $nV = N$ . Тогда  $F_A = Nq\nu B \sin \alpha = NF_\Lambda$ , где  $F_\Lambda = q\nu B \sin \alpha$  - сила Лоренца, т.е. сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле. В векторном виде

$$\vec{F}_\Lambda = q[\vec{\nu} \cdot \vec{B}] \quad (16.13)$$

При  $\alpha = 0$  сила Лоренца равна нулю, т.е. она не действует на заряд, который движется вдоль направления  $\vec{B}$ . При  $\alpha = 90^\circ$   $F_\Lambda = q\nu B$ , т.е. сила Лоренца перпендикулярна скорости:  $\vec{F}_\Lambda \perp \vec{\nu}$ .

Как известно из механики, если сила перпендикулярна скорости, то частицы движутся по окружности радиуса  $R$ , т.е.  $F_\Lambda = ma_{\text{цс}}$ ,  $a_{\text{цс}} = \frac{\nu^2}{R}$

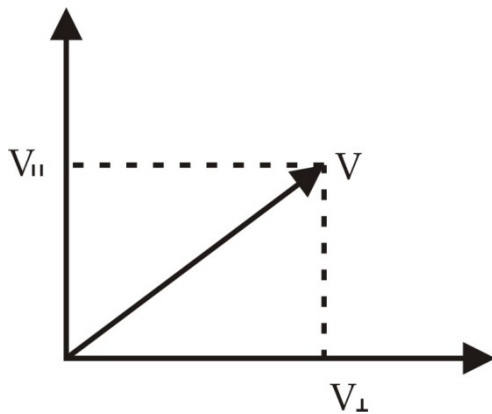
Из уравнения  $q\nu B = \frac{m\nu^2}{R}$  найдем  $R$ :  $R = \frac{m\nu}{qB}$ .

Время одного оборота (период вращения) отдельной формулой равен

$$T = \frac{2\pi R}{\nu} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (16.14)$$

Отметим, что время обращения  $T$  не зависит от  $R$ . Это свойство используется в ускорителях заряженных частиц - циклотронах, когда при движении частиц по окружности в магнитном поле в узкой полоске создается электрическое поле, которое сталкивает на окружности большего радиуса при том же периоде обращения. В результате скорость частицы сильно возрастает перед столкновением ее с мишенью.

Если частица влетает в магнитное поле под углом  $\alpha$  к направлению индукции  $\vec{B}$  со скоростью  $V$ , то она движется по винтовой линии, радиус которой  $R$  и шаг  $h$ .



Разложим скорость на две составляющие:  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  и  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ . Тогда

сила Ампера  $F_{\Lambda} = qvB \sin \alpha = qv_{\perp}B$ . По II закону

Ньютона  $F_{\Lambda} = ma_{\text{цс}}$ , где  $a_{\text{цс}} = \frac{v_{\perp}^2}{R}$ , т.е.

$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

Начиная двигаться по окружности с радиусом  $R$ , частица движется при этом равномерно с  $v_{\parallel}$  вдоль направления  $\vec{B}$ .

Второй параметр винтовой линии – это ее шаг  $h$  – смещение вдоль направления  $\vec{B}$  за время оборота  $T = \frac{2\pi m}{qB}$ , т.е.  $h = v_{\parallel}T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$ .

Если заряженная частица влетает с некоторой скоростью в электрическое и магнитное поле, то результирующая сила, действующая на частиц равна

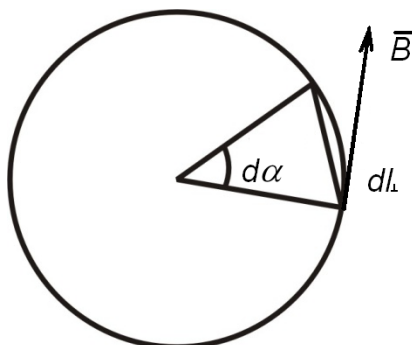
$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}] \quad (16.14)$$

В зависимости от ориентации векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  частица может двигаться по разным траекториям, например, по циклоиде.

### §17. Закон полного тока

Также как и в электростатике нам необходимо получить дифференциальную формулировку закона магнитного поля. В электростатике это было сделано исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции. Их интегральная формулировка дается теоремой Гаусса, из которой следует уравнение для дивергенции  $\vec{E}$ . В случае магнитного поля будем исходить из закона Био-Савара и принципа суперпозиции для магнитного поля как экспериментального факта, а также воспользуемся формулой для индукции магнитного поля прямого тока.

Линии индукции магнитного поля, порождаемого током текущим по бесконечно длинному тонкому проводнику, являются концентрическими



окружностями, ось которых лежит на линии тока. Окружим ток некоторым замкнутым контуром  $l$  и вычислим циркуляцию  $\oint \vec{B} d\vec{l}$  (рис. а)

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B} \cdot d\vec{l}) = B dl_{\perp},$$

$$dl_{\perp} = dl \cos(\vec{B} \cdot d\vec{l}).$$

Учтем также, что  $B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}$ , и тогда получим:

$$\begin{aligned} \bar{B}d\bar{l} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi r} dl_{\perp}, \\ dl_{\perp} &\approx rd\alpha. \quad \bar{B}d\bar{l} \approx \frac{\mu_0 J}{2\pi} \cdot \frac{rd\alpha}{r} = \frac{\mu_0 J d\alpha}{2\pi} \\ \oint \bar{B}d\bar{l} &= \oint \frac{\mu_0 J}{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \oint d\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi} 2\pi = \mu_0 J. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Следовательно, циркуляция  $\bar{B}$  по замкнутому контуру не зависит от вида этого контура, а определяется силой тока. Если замкнутый контур не охватывает ток (рис. б), то можно показать, что

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = 0 \quad (17.2)$$

Объединяя (17.1) и (17.2) получим закон полного тока

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \begin{cases} \mu_0 J, & \text{если контур охватывает ток} \\ 0, & \text{если контур не охватывает ток} \end{cases} \quad (17.3)$$

эту формулу можно обобщить на несколько токов в учетом их направления. Достаточно в (17.3) силу тока  $J$  заменить на сумму по  $k$ :

$$J \rightarrow \sum_k \pm J_k.$$

Если, например, в контуре оказались 2 тока равные по величине, текущие в противоположных направлениях, то циркуляция вектора  $\bar{B}$  будет равна нулю. Формула (17.3) и есть интегральная формулировка закона, по которому магнитное поле порождается токами.

Получим дифференциальную формулировку этого закона. Обозначим через  $S$  поверхность, охватываемую контуром  $L$ . Как обычно положительная нормаль к поверхности связана с направлением обхода контура  $L$  правилом правого вина. Сила тока  $J$  равна:

$$J = \int_s \bar{j}d\bar{s}.$$

$$\text{Тогда } \oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 \int_s \bar{j}d\bar{s}.$$

Воспользуемся формулой Стокса:

$$\int_s \text{rot}\bar{B}d\bar{s} = \mu_0 \int_s \bar{j}d\bar{s} \quad \text{или} \quad \int_s (\text{rot}\bar{B} - \mu_0 \bar{j})d\bar{s} = 0.$$

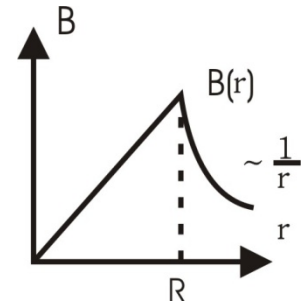
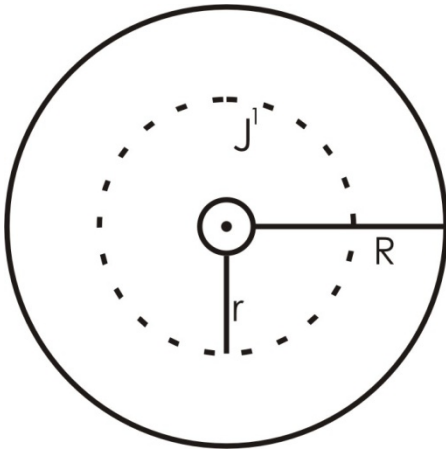
Тогда в силу произвольности  $d\bar{s}$  заключаем, что

$$\text{rot}\bar{B} = \mu_0 \bar{j} \quad (17.4)$$

Формула (17.4) есть дифференциальная формулировка закона полного тока.

### **Пример.**

Имеется проводник радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен ток, плотностью  $\bar{j}$ . Определить зависимость индукции магнитного поля  $B(r)$ , где  $r$  – расстояние от центра проводника.



1)  $r < R$ .

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 J' \cdot J = j\pi R^2, \quad J' = j\pi r^2.$$

$$\frac{J}{J'} = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow J' = J \frac{r^2}{R^2}.$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 J \frac{r^2}{R^2}.$$

$$B = \frac{\mu_0 J r}{2\pi R^2}.$$

2)  $r > R$ .

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 J$$

$$B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}.$$

### §18. Уравнение Максвелла для стационарного магнитного поля

Закон Био-Савара, описывающий закон порождения магнитного поля объемными токами имеет вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) dV \quad (18.1)$$

Возьмем от обеих частей дивергенцию и эту процедуру можно внести под знак интеграла, потому что мы дифференцируем по координатам  $(x, y, z)$ , а интегрирование по  $(x', y', z')$ . Так как  $dV = dx' dy' dz'$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{div} \left( \vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dV \quad (18.2)$$

Запишем зависимость величин от координат.

Индукция  $B$  в точке  $(x, y, z)$ :

$$B = B(x, y, z).$$

Плотность тока

$$\vec{j} = \vec{j}(x', y', z') \quad \vec{r} = \vec{i}_x(x' - x) + \vec{i}_y(y' - y) + \vec{i}_z(z' - z). \text{ Так как}$$

$$\text{div}[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B}.$$

Тогда

$$\text{div} \left( \vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \text{rot} \vec{j} - \vec{j} \text{rot} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (18.3)$$

где процедура взятия rot происходит по координатам  $(x, y, z)$ . Очевидно, что  $\text{rot} \vec{j} = 0$ .

В электростатике было записано условие потенциальности электрического поля  $rot\vec{E} = 0$ . В частности для точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \vec{r} \Rightarrow rot \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv 0.$$

Следовательно второе слагаемое в (18.3) тоже равно нулю. Тогда получаем, что

$$div\vec{B} = 0 \quad (18.4)$$

В электростатике было получено уравнение

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

из которого следовало, что электрическое поле порождается зарядами. Для магнитного поля из (18.4) следует, что в природе не существует магнитных зарядов, аналогичных электрическим, а значит единственным источником магнитного поля являются токи. Линии магнитной индукции замкнуты и не имеют ни начала, ни конца; они являются замкнутыми линиями либо уходят на бесконечность. Таким образом, мы можем записать систему уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля, порождаемого постоянными токами в вакууме, а именно:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (18.5)$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (18.6)$$

Решение этих уравнений позволяет найти  $\vec{B}$ , если известно распределение токов. Однако из-за сложной структуры этих уравнений и векторного характера вычисление поля с их помощью получается громоздким. Для упрощения процедуры вычисления магнитного поля вводят векторный потенциал.

В заключение отметим следующее. Если (18.6) проинтегрировать по объему, а затем применить теорему Остроградского-Гаусса, то мы получим

$$\iiint \vec{B} d\vec{s} = 0$$

(18.7)

Соотношение (18.7) это теорема Гаусса для вектора  $\vec{B}$ .

## §19. Векторный потенциал

Из известного тождества  $div(rotA) \equiv 0$  следует, что решение уравнения

$$div\vec{B} = 0 \quad (19.1)$$

может быть представлено в виде:

$$\vec{B} = rot\vec{A}, \quad (19.2)$$

где  $\vec{A}$  - векторный потенциал магнитного поля.

Поле с заданной индукцией  $\vec{B}$  может быть описано не каким-то одним векторным потенциалом, а многими векторными потенциалами, определенными с точностью до градиента некоторой функции. Если  $\vec{A}' = \vec{A} + grad\chi$ , то вектор  $\vec{B}' = rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rotgrad\chi = rot\vec{A} = \vec{B}$ .

Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля, который определялся с точностью до некоторой постоянной. Именно поэтому в

электростатике вводилась нормировка потенциала. Здесь также из-за неоднозначности в выборе потенциала на него налагают определенное условие.

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (19.3)$$

которое называют условием калибровки потенциала. Векторный потенциал имеет вспомогательное значение и экспериментально точно измерен быть не может.

Воспользуемся уравнением  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , куда подставим (19.2), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (19.4)$$

Теперь, если воспользоваться условием калибровки (19.3), то получаем уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (19.5)$$

Это уравнение необходимо расписать по проекциям, и очевидно, что каждая из проекций  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  подчиняется уравнению Пуассона (скалярный потенциал в электростатике также подчинялся уравнению Пуассона). Решение (19.5) в векторной форме имеет вид:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dV. \quad (19.6)$$

Формула (19.6) записана для объемных токов. Для линейных токов:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{J}{r} d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i J_i \int_{L_i} \frac{1}{r} d\vec{l}, \quad (19.7)$$

где  $L_i$  - контуры токов. В каждом из них сила тока  $I_i$  различна, но при интегрировании по конкретному контуру силу тока  $J_i$  можно вынести за знак интеграла.

Таким образом, при известной конфигурации токов проще сначала с помощью (19.5) – (19.7) вычислить векторный потенциал, а затем с помощью (19.2) вычислить индукцию магнитного поля. Такая процедура проще, чем сразу вычислять  $\vec{B}$  из уравнений (18.5) и (18.6).

## §20. Магнитное поле при наличии магнетиков

*Магнетиками* называются вещества, которые при внесении во внешнее магнитное поле изменяются так, что сами становятся источниками дополнительного магнитного поля. При этом полная индукция магнитного поля равна векторной сумме индукций внешнего магнитного поля и магнитного поля, порождаемого магнетиком. Изменение состояния магнетика под влиянием внешнего магнитного поля, в результате чего сам магнетик становится источником магнитного поля, называется *намагничиванием магнетика*. Это явление экспериментально было установлено Фарадеем в 1845 г.

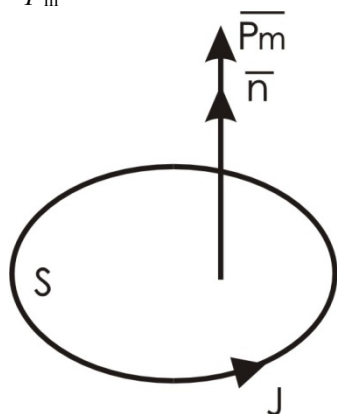


### Механизмы намагничивания.

В зависимости от механизма намагничивания магнетики подразделяются на диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики и ферримагнетики.

Количественно интенсивность намагничивания во всех случаях характеризуется одинаково, а именно: под действием магнитного поля все элементы объема приобретают магнитный момент. *Магнитным моментом* называется величина

$$\vec{p}_m = JS\vec{n} . \quad (20.1)$$



где  $J$  – сила тока по замкнутому контуру,  $S$  – площадь,  $\vec{n}$  – вектор положительной нормали. Это магнитное поле, которое порождает контур с током.

### Парамагнетики.

В атомах электроны движутся по орбитам, а движущиеся электроны на орбите – это элементарные токи. Поэтому атомы обладают некоторыми магнитными моментами, которые в парамагнетиках ориентированы хаотично.

Если внешнего поля нет, то магнитные моменты различных молекул ориентированы совершенно беспорядочно, благодаря чему суммарная индукция поля, создаваемого ими, равна нулю, т.е. физически бесконечно малые элементы тела не являются источниками магнитного поля и тело не намагничено. При внесении такого магнетика во внешнее поле магнитные постоянные моменты отдельных молекул переориентируются в направлении индукции поля, в результате чего образуется преимущественное направление ориентации магнитных моментов. При этом бесконечно малые физические объемы приобретают магнитный момент, равный сумме магнитных моментов молекул, заключенных в объеме, и становятся источниками магнитного поля - магнетик намагничивается.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходит ориентация магнитных моментов по полю, в результате чего вследствие этой ориентации возникает индукция  $B'$ , направленная в ту же сторону, что и индукция внешнего магнитного поля. Они складываются и в результате этого магнитная индукция становится больше, т.е.

$$\vec{B}_0 = \vec{B} + \vec{B}' \quad \Rightarrow \quad B_0 = B + B'$$

### Диамагнетики.

У атомов, образующих диамагнетики тоже есть постоянные магнитные моменты, ориентированные хаотично и при внесении во внешнее магнитное поле они также стремятся ориентироваться по полю, но существует эффект гораздо более сильный.

При внесении во внешнее магнитное поле в молекулах и атомах движение электронов изменяется так, что образуется определенным образом

ориентированный суммарный круговой ток, который характеризуется магнитным моментом. Можно сказать, что молекулы при внесении в магнитное поле приобретают индуцированный магнитный момент. Благодаря этому они становятся источниками дополнительного поля, т.е. вещество намагничивается. Фактически, внешнее магнитное поле действует в целом на орбиты электронов, которые начинают прэцессировать (детский волчок). Внешнее магнитное поле настолько сильно влияет на движение электронов, что в веществе индуцируется магнитное поле  $B'$ , направленное в сторону противоположную направлению  $\vec{B}$   
 $\vec{B}_0 = \vec{B} + \vec{B}' \Rightarrow B_0 = B - B'$ , а значит, результирующая индукция становится меньше.

### **Ферромагнетики и ферримагнетики.**

Намагничивание ферромагнетиков и ферримагнетиков связано с тем, что электроны обладают магнитным моментом, находящимся в определенном соотношении с их механическим моментом - спином. Намагничивание такого класса магнетиков связано с определенной ориентировкой спинов и поэтому называется *спиновым*. Объяснение спинового магнетизма выходит за рамки классической теории электричества и магнетизма и возможно лишь в рамках квантовой теории. Вся излагаемая ниже теория магнитного поля в присутствии магнетиков относится лишь к диа- и парамагнетикам, если только не оговорено противное. У ферромагнетика имеются области самопроизвольного намагничивания, так называемые домены, магнитные моменты которых также ориентированы хаотично.

Но при внесении во внешнее магнитное поле происходит ориентация областей (доменов) по полю и  $\vec{B}_0 = \vec{B} + \vec{B}' \Rightarrow B_0 = B + B'$  причем  $|\vec{B}'| \gg |\vec{B}|$ .

Парамагнетик легко размагнитить после снятия поля (ударить или нагреть). Ферромагнетик размагнитить не просто.

### **Вектор намагниченности.**

*Намагниченность* это величина, определяемая отношением магнитного момента элементарного физического объема к объему

$$\vec{j}_m = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{mi} \quad (20.2)$$

где  $\Delta V$  - элементарный объем,  $\vec{p}_{mi}$  - магнитные моменты молекул.

В дифференциальном виде (20.2) можно записать:

$$d\vec{p}_m = \vec{j}_m dV \quad (20.3)$$

Намагниченность определяется молекулярными токами, т.е. токами, циркулирующими внутри вещества и можно показать, что плотность молекулярных токов определяется соотношением

$$\vec{j}_m = \text{rot} \vec{J}_m \quad (20.4)$$

При отсутствии магнетиков порождение магнитного поля токами проводимости определяется соотношением:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (20.5)$$

Если присутствуют и магнетики, то соотношение (20.5) нужно преобразовать:  

$$\text{rot}\bar{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_m). \quad (20.6)$$

Учтем (20.4). Тогда получим

$$\text{rot}\bar{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0(\vec{j} + \text{rot}\bar{J}_m), \quad \text{rot}\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}_m\right) = \vec{j} \quad (20.7)$$

Введем новый вектор

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}_m, \quad (20.8)$$

который учитывает влияние вещества на магнитное поле. По смыслу этот вектор очень похож на вектор  $\bar{D}$  в электростатике, который тоже учитывал влияние вещества (диэлектрика) на электрическое поле. В электростатике он называется вектором электрической индукции. Вектор  $\bar{H}$  называется напряженностью магнитного поля,  $\bar{B}$  называется вектором магнитной индукции, т.е. по смыслу все наоборот по сравнению с электростатикой. Такие названия за этими векторами закрепились исторически.

Учтем (20.8) и (20.7) и получим уравнение для напряженности магнитного поля

$$\text{rot}\bar{H} = \vec{j}. \quad (20.9)$$

В магнетиках закон полного тока формулируется для вектора  $\bar{H}$ , который легко получить из (20.9)

$$\int_L \bar{H} d\vec{l} = J \quad (20.10)$$

В не очень сильных полях вектор намагниченности линейно зависит от вектора напряженности магнитного поля, т.е.

$$\bar{J}_m = \chi\bar{H}, \quad (20.11)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость. Подставим (20.11) в (20.8), получим

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \chi\bar{H} \quad \text{или} \quad \bar{B} = \mu_0(1 + \chi)\bar{H} \quad (20.12)$$

Обозначим

$$\mu = 1 + \chi \quad (20.13)$$

Тогда из (20.12) получим:

$$\bar{B} = \mu\mu_0\bar{H}, \quad (20.14)$$

где  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость среды.

Различные механизмы намагничивания приводят к разным зависимостям  $\bar{J}_m$  от  $\bar{H}$ .

У диамагнетиков намагниченность направлена против  $\bar{H}$ .

У диамагнетиков  $\chi < 0$  и, следовательно, магнитная проницаемость  $\mu < 1$ . Это означает, что порождаемое диамагнетическое поле направлено против первоначального, т.е. диамагнетик ослабляет внешнее поле. Модуль их восприимчивости  $|\chi|$  очень мал и имеет порядок  $\approx 10^{-5}$ . Восприимчивость не зависит от температуры. Диамагнетизм имеется у всех веществ.

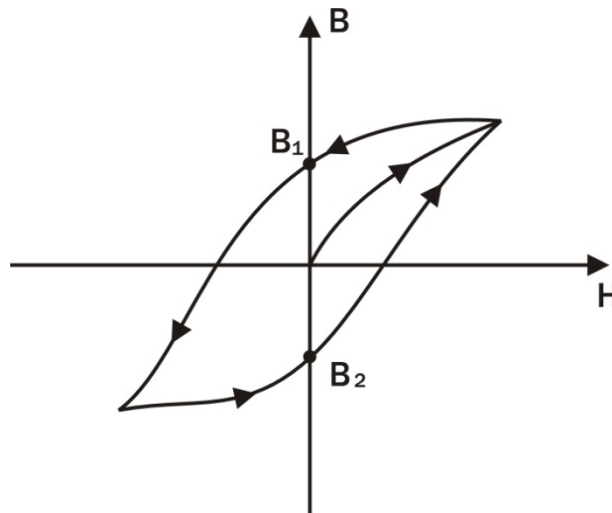
У парамагнетиков  $\vec{J}_m$  совпадает по направлению с  $\vec{H}$ . Для них  $\chi > 0$ ,  $\mu > 1$ . Дополнительное поле у парамагнетиков совпадает с первоначальным. Следовательно, парамагнетик усиливает поле. Восприимчивость  $\chi$  парамагнетиков зависит от температуры. При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии имеет порядок  $\approx 10^{-3}$ , т.е. примерно на два порядка больше диамагнитической восприимчивости. Поэтому у парамагнитных веществ роль диамагнитической восприимчивости относительно мала и ею можно пренебречь.

У ферромагнетиков  $\vec{J}_m$  совпадает по направлению с  $\vec{H}$  и является очень большой величиной. Для них  $\chi \gg 1$ ,  $\mu \gg 1$ ,  $\chi \approx 10^5$ . Характерно, что  $\chi$  и  $\mu$  зависят от поля и от предыстории намагничивания. Благодаря этому у них имеется остаточная намагниченность, т.е. намагниченность образца в целом сохраняется и после того, как внешнее поле стало равным нулю. Отметим также, что  $\chi = \chi(T)$ , т.е. очень сильно зависит от температуры.

### **Явление магнитного гистерезиса.**

Магнетики, магнитная проницаемость которых достигает больших значений и зависит от внешнего магнитного поля и предшествующей истории, называются ферромагнетиками. Они обладают остаточной намагниченностью, т.е. их намагниченность может быть отличной от нуля при отсутствии внешнего магнитного поля. В этом случае они являются постоянными магнитами. Намагничивание ферромагнетиков было исследовано А.Г. Столетовым (1839 - 1896) в 1878 г. Гистерезис был открыт в 1880г. Варбургом (1846 - 1931).

Когда парамагнетик вносят во внешнее поле магнитные моменты ориентируются по полю. При снятии поля остаточная намагниченность незначительна и ее легко снять, например, путем нагревания парамагнетика или простого удара (ориентация магнитных моментов исчезает). У ферромагнетиков все не так, поскольку при намагничивании ориентируются целые области самопроизвольного намагничивания. При снятии внешнего магнитного поля остаточное намагничивание весьма существенно и его не так просто убрать. Поместим ферромагнетик в катушку индуктивности, по которой будем пропускать ток  $J$  и построим график зависимости  $B(H)$ .



При увеличении тока в катушке индукция магнитного поля растет, постепенно выходя на более пологую кривую. Достигнув некоторой силы тока (точка(1)), начнем эту силу тока уменьшать. И когда сила тока равна нулю ( $H = 0$ ), то у вещества, как оказывается, имеется остаточное намагничивание, определяемое значением  $B_1$ . Для того, чтобы вещество размагнитить, надо ток направить в другую сторону и при некоторой силе тока индукция магнитного поля станет равной нулю. При дальнейшем уменьшении силы тока  $B$  будет возрастать (по абсолютному значению). Если затем начинать уменьшать ток до нуля, то вещество окажется намагниченным с индукцией  $B_2$ . Чтобы размагнитить ферромагнетик надо опять поменять силу тока и увеличивая его мы опять придем в точку (1). Затем меняя направление силы тока будем двигаться по петле, которая называется петлей магнитного гистерезиса. Фактически происходит как бы своеобразное отставание изменения индукции от изменения напряженности магнитного поля.

Отметим, что зависимость восприимчивости  $\chi$  от температуры: у ферромагнетиков определяется закон Кюри

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (20.15)$$

где  $T$  - абсолютная температура, а  $C$  - константа Кюри, зависящая от рода вещества.

Для ферромагнетиков существует так называемая температура Кюри. Это та температура  $T_k$ , при которой ферромагнетик превращается в парамагнетик, т.е. его ферромагнитные свойства исчезают.

Например, для железа температура Кюри составляет  $T_k = 770K$ . Для ферромагнетиков, которые превратились в парамагнетики зависимость восприимчивости от температуры подчиняется закону Кюри-Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_k}. \quad (20.16)$$

### §21. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитных полях

Если на частицу, движущуюся в электрическом поле действует электрическая сила  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  независимо от того покоится частица или движется, то магнитное поле действует силой Лоренца только на движущиеся заряженные частицы.

$$\vec{F}_л = q[\vec{V} \times \vec{B}].$$

Если же частица движется в электрическом и магнитном полях, то результирующая сила, действующая на частицу:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V} \times \vec{B}].$$

Рассмотрим задачу о нахождении траектории частицы, движущейся в электрическом и магнитном полях. Уравнение II закона Ньютона имеет вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{V} \times \vec{B}].$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда  $\vec{E} = 0$ . Тогда уравнение II закона Ньютона примет вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q[\vec{V} \times \vec{B}]. \quad (21.1)$$

Рассмотрим следующую задачу:

Частица массой  $m$  с зарядом  $q$  влетает с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Найти кинематический закон движения частицы и определить вид ее траектории.

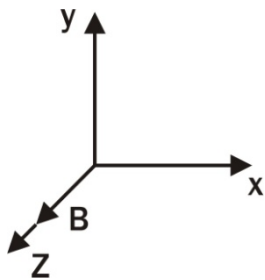
Начальные условия следующие:

$$\vec{B}(0;0;B)$$

$$V_0(V_{0x}, 0, V_{0z})$$

$$V_{0x} = V_0 \sin \alpha \quad V_{0z} = V_0 \cos \alpha$$

В момент  $t = 0$   $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(0;0;0)$ .



Спроектируем уравнение (21.1) на оси координат и учтем, что

$$\vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Тогда мы получим:

$$m\dot{V}_x = q(V_y B_z - V_z B_y) = qBV_y$$

$$(21.2)$$

$$m\dot{V}_y = q(V_z B_x - V_x B_z) = -qBV_x$$

$$(21.3)$$

$$m\dot{V}_z = q(V_x B_y - V_y B_x) = 0$$

(21.4)

Из (4) следует, что  $V_z(t) = \text{const} = V_0 \cos \alpha$ , тогда

$$z(t) = \int V_z(t) dt = V_0 t \cos \alpha + C.$$

Поскольку  $z(0) = 0$ , то  $c = 0$  и

$$z(t) = V_0 t \cos \alpha. \quad (21.5)$$

Продифференцируя (21.2) по  $t$  получим:

$\ddot{V}_x = \frac{qB}{m} \ddot{V}_y$  и учтем (21.3). Тогда для  $V_x$  получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{V}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 V_x$$

Обозначим  $\frac{|q|B}{m} = w$ , получим

$\ddot{V}_x + w^2 V_x = 0$ . Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$V_x(t) = C_1 \sin wt + C_2 \cos wt \quad (21.6)$$

Так как  $V_x(0) = V_0 \sin \alpha$ , то  $C_2 = V_0 \sin \alpha$ . Для нахождения  $C_1$  продифференцируем уравнение (21.6) по времени, получим

$$\dot{V}_x(t) = C_1 w \cos wt - C_2 w \sin wt \quad (21.7)$$

Поскольку при  $t = 0, V_y(0) = 0$ , то

$$\dot{V}_x(0) = \frac{q}{m} b V_y(0) = 0 \quad (21.8)$$

Подставляя (21.8) в (21.7), находим, что  $C_1 = 0$ . И тогда

$$V_x(t) = V_0 \sin \alpha \cos wt \quad (21.9)$$

Выражая из (21.2)  $V_y$  получим

$$V_y = \frac{m}{qB} \dot{V}_x = -\frac{qV_0 w}{qB} \sin \alpha \cos wt \quad (21.10)$$

Проинтегрировав (21.9) и (21.10), находим  $x(t), y(t)$

$$x(t) = \int V_x(t) dt = V_0 \sin \alpha \int \cos wtdt = \frac{V_0}{w} \sin \alpha \sin wt + c_3,$$

$$y(t) = \int V_y(t) dt = -\frac{mV_0}{qB} w \sin \alpha \int \sin wtdt = \frac{m}{qB} V_0 \sin \alpha \cos wt + c_4.$$

Т.к.  $x(0) = y(0) = 0$ , то  $C_3 = 0, C_4 = -\frac{m}{qB} V_0 \sin \alpha$ ,

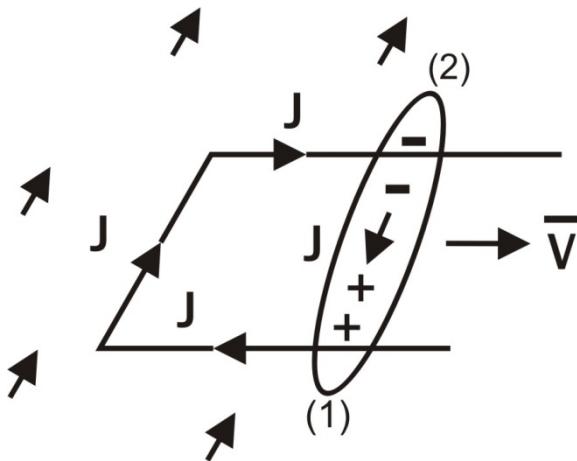
Таким образом:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mV_0}{qB} \sin \alpha \sin wt \\ y(t) = \frac{mV_0}{qB} \sin \alpha (\cos wt - 1) \\ z(t) = V_0 t \cos \alpha \end{cases}$$

Найденный закон движения представляет собой параметрическое уравнение винтовой линии с радиусом  $R = \frac{mV_0 \sin \alpha}{qB}$  и шагом  $h = \frac{2\pi V_0 \cos \alpha}{\omega}$ . При  $\alpha = \pi/2$  винтовая линия вырождается в окружность. При более сложной комбинации полей  $B$  и  $E$  можно получать разные траектории движения частицы.

**§22. Индукция токов в проводниках, движущихся в магнитном поле.**  
**Возникновение э.д.с. в проводниках, движущихся в магнитном поле.**

Предположим, имеется вертикальное магнитное поле  $B$  и изогнутый контур.



Если на контур положить проводник и начать двигать его вправо со скоростью  $v$ , то на заряды, находящиеся внутри проводника, будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

где  $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  (22.1)

Т.к электрические заряды начинают двигаться по проводнику, то можно считать, что на них действует некоторое эффективное электрическое поле

$$\vec{E}_{эф} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$
 (22.2)

а значит между концами проводника возникает

$$\varepsilon_{инд} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{эф} d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}.$$
 (22.3)

Так как угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$   $90^\circ$ , а  $d\vec{l}$  совпадает по направлению с  $\vec{v}$  и все эти величины постоянны, то эта величина равна  $\varepsilon_{инд} = Blv$ .

Фактически  $\varepsilon_{инд}$  есть разность потенциалов между точками (1) и (2). Это означает, что если бы проводящего контура не было, то при движении проводника в магнитном поле в указанной геометрии между концами его образуется разность потенциалов, величина которой равна  $Blv$ . Но если этот проводник скользит по проводящему контуру, то мы имеем замкнутую цепь (1)AD(2), где имеется  $\varepsilon_{инд}$ , т.е. электродвижущая сила, которая будет вызывать ток в цепи. Фактически сопротивление контура в процессе движения меняется. Но если в эту цепь включить достаточно большое сопротивление  $R$ , то в этом случае  $R \approx const$  и сила тока будет:

$$J = \frac{\varepsilon_{инд}}{R} = \frac{Blv}{R}$$



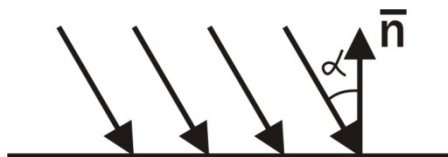
Мы получили источник тока, где сторонней силой, разделяющей электрические заряды, является сила Лоренца. Если учесть, что скорость проводника  $v = \frac{dx}{dt}$ ,

то

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{Bl dx}{dt} \quad (22.4)$$

Введем физическую величину – магнитный поток  $\Phi$  и определим его как

$$\Phi = Bs \cos \alpha. \quad (22.5)$$



В дифференциальной форме  $d\Phi = \vec{B}d\vec{s}$  и окончательно в дифференциальной форме получаем соотношение

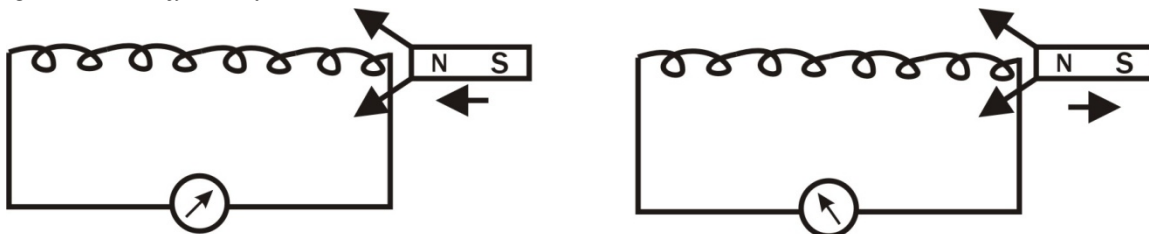
$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (22.6)$$

Следовательно, при движении проводника в магнитном поле в следствие действия на заряды силы Лоренца на концах проводника возникает разность потенциалов. Этот эффект имеем даже в магнитном поле Земли. Например летящий самолет (между концами крыльев возникает разность потенциалов), движущийся поезд и др.

### §23. Закон электромагнитной индукции Фарадея

В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции. Суть явления состояла в том, что если через замкнутый контур происходило изменение магнитного потока, то в контуре возникала электродвижущая сила, приводящая к возникновению замкнутого тока. Этот ток был назван индукционным током. Правило, устанавливающее направление индукционного тока было сформулировано в 1833г. Э.Х. Ленцем (1804 - 1865) и называется правилом Ленца. Оно гласит: индукционный ток направлен так, что создаваемый им магнитный поток стремится компенсировать изменение магнитного потока, вызывающего данный ток.

Опыты Фарадея состояли в следующем: катушка индуктивности подключалась к чувствительному гальванометру и в катушку вдвигался и выдвигался постоянный магнит.



Из опытов следовало, что  $J_{\text{инд}} \approx \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$ . Но сила тока зависит еще и от сопротивления контура. Поэтому закон электромагнитной индукции формулируется не для индукционного тока, а для причины, вызывающий этот

ток, т.е. для  $\varepsilon_{инд}$ . В 1845г. Ф.Э. Нейман (1799 - 1895) дал математическое определение закона электромагнитной индукции в современной форме:

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (23.1)$$

Хотя внешне формулы (22.6) и (23.1) одинаковы, между ними существует принципиальное различие. Возникновение  $\varepsilon_{инд}$  в (22.6) связано с движением проводников в магнитном поле и с действием на заряды силы Лоренца. Тогда как в (23.1) на заряды в контуре действует электрическое поле, причем сам контур лишь только инструмент или прибор, который может обнаружить это изменяющееся электрическое поле, которое возникает в пространстве. Следовательно закон Фарадея отражает новое физическое явление, а именно: изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле. А это означает, что электрическое поле порождается не только зарядами, но и изменяющимся магнитным полем. Закон электромагнитной индукции является фундаментальным законом природы.

### Дифференциальная формулировка закона

$d\Phi = \bar{B}d\bar{S}$ , а тогда магнитный поток  $\Phi = \int \bar{B}d\bar{S}$ , а  $\varepsilon_{инд} = \oint \bar{E}d\bar{l}$ .

$$\oint \bar{E}d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{B}d\bar{S}.$$

К левой части применим формулу Стокса. Тогда  $\int_s rot\bar{E}d\bar{S} = -\int \frac{\partial\bar{B}}{\partial t}d\bar{S}$ . После того

как перенесем все слагаемые в одну сторону получим:

$$\int_s (rot\bar{E} + \frac{\partial\bar{B}}{\partial t}d\bar{S} = 0$$

В силу произвольности  $d\bar{S}$  можно заключить, что подынтегральная функция равна нулю, а значит

$$rot\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \quad (23.2)$$

Уравнение (23.2) является дифференциальной формой закона электромагнитной индукции. В переменных магнитных полях  $\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \neq 0$ , а значит

$rot\bar{E} \neq 0$  и, следовательно, в отличие от электростатического поля, порождаемого неподвижными зарядами, переменное электрическое поле не является потенциальным и работа  $A$  при перемещении заряда  $q$  по замкнутому контуру не равна нулю:

$$A = q\varepsilon_{инд} = q \oint \bar{E}d\bar{l} \neq 0.$$

Так как закон электромагнитной индукции не затрагивает закона порождения магнитного поля, то уравнение (18.6)  $div\bar{B} = 0$  остается в силе, а значит в силе остается и выражение (19.2):  $\bar{B} = rot\bar{A}$ .

Если подставить (19.2) в (23.2), то  $rot\bar{E} = -rot\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$ , а значит

$$\operatorname{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0. \quad (23.3)$$

Отсюда следует, что в переменных полях потенциальным является вектор  $\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ , а значит он равен градиенту скалярной функции, т.е.  $\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi$ , а

значит

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \quad (23.4)$$

Второе слагаемое в (23.4) означает, что электрическое поле может порождаться неподвижными зарядами, а первое означает, что электрическое поле может порождаться переменным магнитным полем.

## §24. Энергия магнитного поля

### Энергия магнитного поля изолированного контура с током.

Для того чтобы в неподвижном контуре создать электрический ток, необходимо включить в цепь источник сторонних э.д.с. Если в цепи течет постоянный ток, то энергия, поступающая в цепь из источника сторонних э.д.с., расходуется на выделение джоулевой теплоты и на совершение работы в потребителе энергии. Индукция магнитного поля, как и его энергия, при этом неизменна. Индукция изменяется с изменением силы тока. Следовательно, источник сторонних э.д.с. передает в цепь энергию на создание магнитного поля в процессе увеличения силы тока. Вычислив работу, совершаемую источником сторонних э.д.с. для увеличения силы тока от нуля до конечного значения, получим энергию магнитного поля, которое связано с этим током.

При изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром, в контуре возникает э.д.с. индукции в соответствии с законом (23.1). У изолированного контура поток электромагнитной индукции  $\Phi$  возникает за счет магнитного поля, создаваемого током в контуре. При увеличении силы тока возрастает поток  $\Phi$ , охватываемый током, и в контуре по закону Фарадея возникает э.д.с. индукции, которая в данном случае называется э.д.с. самоиндукции. По правилу Ленца, она направлена так, что препятствует увеличению силы тока. Для увеличения силы тока необходимо, чтобы сторонняя э.д.с. источника была направлена противоположно э.д.с. самоиндукции и равна ей. Таким образом, в процессе роста силы тока источник сторонних э.д.с. совершает работу против э.д.с. самоиндукции. За промежуток времени  $dt$  по контуру проходит количество электричества  $dQ = Idt$  и, следовательно, против э.д.с. самоиндукции источник сторонних сил в течение  $dt$  совершает работу

$$dA = -\varepsilon^{ind} Idt = (d\Phi / dt) Idt = Id\Phi, \quad (24.1)$$

где для  $\varepsilon^{ind}$  использована формула (23.1). При совершении этой работы происходит превращение энергии источника сторонних э.д.с. в энергию магнитного поля тока в контуре. Поэтому изменение энергии магнитного поля связано с изменением потока соотношением

$$dW_M = Id\Phi \quad (24.2)$$

Индукция магнитного поля тока в соответствии с законом Био-Савара линейно зависит от силы тока. Поэтому при переменной силе тока, протекающего по жесткому неподвижному контуру, картина силовых линий остается прежней, а индукция в каждой точке растет пропорционально силе тока. А это означает, что поток магнитной индукции  $\Phi$  сквозь фиксированную неподвижную площадь также пропорционален силе тока, и поэтому

$$\Phi = LI \quad (24.3)$$

где  $L$  – постоянный коэффициент пропорциональности, не зависящий от силы тока и индукции магнитного поля. Этот коэффициент называется индуктивностью контура.

Подставляя обе части (24.3) в (24.2), находим

$$dW_M = LI dI = d\left(\frac{1}{2} LI^2\right) \quad (24.4)$$

Интегрируя обе части (24.4) от  $I=0$  до некоторого значения  $I$ , получаем формулу

$$W_M = \frac{1}{2} LI^2, \quad (24.5)$$

которая определяет энергию магнитного поля, создаваемого током силы  $I$ , текущим по контуру с индуктивностью  $L$ .

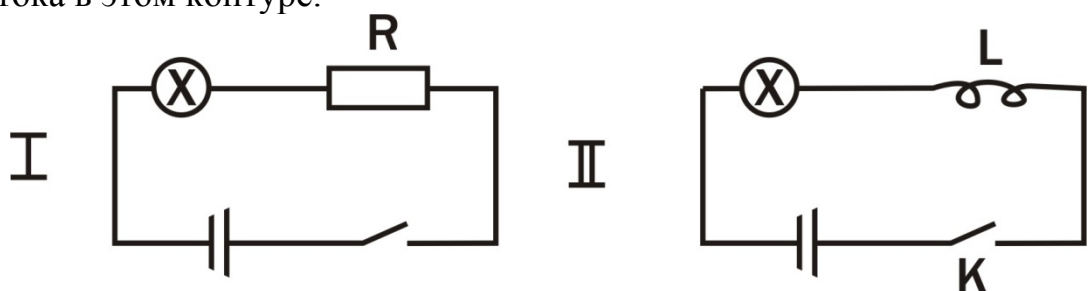
Это и есть формула, определяющая энергию магнитного поля, созданного током  $J$ , текущим по контуру с индуктивностью  $L$ .

Если есть несколько контуров с током, то происходит взаимовлияние контуров друг на друга с помощью так называемых коэффициентов взаимной индукции  $L_{ij}$ ,  $i \neq j$ . величины  $L_{ii}$  определяет индуктивность каждого поля. При наличии нескольких контуров

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_{ik} J_i J_k. \quad (24.6)$$

### Явление самоиндукции.

Рассмотрим явление возникновения  $\varepsilon_{\text{инд}}$  в замкнутом контуре при изменении силы тока в этом контуре.



При замыкании ключа в первом случае (а) лампочка мгновенно достигает максимальной яркости и далее горит с постоянным накалом. При размыкании ключа лампочка мгновенно гаснет. Во втором случае (б), где вместо сопротивления включена катушка индуктивности, при замыкании ключа лампочка медленно набирает яркость, а при размыкании гаснет постепенно. Это связано с явлением электромагнитной индукции. Действительно, при

замыкании ключа  $k$  ток нарастает, значит  $\Delta J > 0$ , следовательно  $\Delta\Phi = l\Delta J > 0$ ,  $\varepsilon_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0$ , т.е. в цепи имеется две э.д.с.:  $\varepsilon + \varepsilon_{инд} < \varepsilon$ , т.е.  $\varepsilon_{инд}$  препятствует нарастанию тока. При размыкании ключа ток в контуре начинает уменьшаться  $\Delta J < 0$ , а значит  $\Delta\Phi < 0$ ,  $\varepsilon_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ ,  $\varepsilon + \varepsilon_{инд} > \varepsilon$ , т.е.  $\varepsilon_{инд}$  поддерживает уменьшающийся ток. С учетом (24.3)

$$\varepsilon_{инд} = \varepsilon_{SI} = -L \frac{\Delta J}{\Delta t} \quad (24.7)$$

### **Включение и выключение постоянной э.д.с. в цепи с сопротивлением и индуктивностью.**

Если в момент  $t = 0$  в цепь (рис. б) включается источник сторонней э.д.с. постоянной величины, например, батарея, то сила тока  $I$  в цепи начинает расти. Однако за счет роста индукции поля в контуре возникает э.д.с. самоиндукции, действующая противоположно сторонней э.д.с. В результате рост силы тока в цепи замедляется. Для каждого момента времени соблюдается закон Ома, который с учетом (24.7) записывается в виде уравнения

$$IR_0 = U_0 - LdI/dt, \quad (24.8)$$

где  $R_0$  - полное сопротивление в цепи (включая внутреннее сопротивление источника). Это уравнение необходимо решить при начальном условии  $I(0) = 0$ . Говоря о том, что в каждый момент соблюдается закон Ома, мы предполагаем, что сила тока во всех участках цепи одна и та же, т.е. ток квазистационарен. Решение уравнения (24.8) элементарно

$$I(t) = \frac{U_0}{R_0} [1 - \exp(-\frac{Rt}{L})] \quad (24.9)$$

Ток нарастает и установившееся значение силы тока  $I(\infty) = \frac{U_0}{R}$ , соответствующее закону Ома для постоянного тока, достигается лишь в смысле предела при бесконечном времени. Учитывая экспоненциальную зависимость силы тока от времени, можно как обычно за время нарастания силы тока в цепи принять такое значение  $t_x$ , при котором показатель экспоненты обращается в минус единицу, т.е.

$$t_x = L/R \quad (24.10)$$

При большой индуктивности в цепи нарастание силы тока происходит медленно. Например, если в цепь включить большую катушку индуктивности и лампу накаливания, то после замыкания цепи проходит значительный промежуток времени, в течение которого лампа разгорается до своего полного постоянного накала.

При выключении постоянного источника сторонних э.д.с. например, закоротив его, можно наблюдать, что сила тока не падает мгновенно до нуля, а уменьшается постепенно. Уравнение для силы тока в этом случае, очевидно, имеет вид

$$IR = -LdI / dt \quad (24.11)$$

и решается при начальном условии  $I(0) = U_0 / R$ :

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp(-Rt / L) \quad (24.12)$$

Время убывания силы тока дается той же формулой (24.10). При достаточно больших индуктивностях после выключения сторонней э.д.с. лампа накаливания в цепи гаснет лишь постепенно в течение заметного промежутка времени. Электродвижущей силой, которая обеспечивает существование тока в цепи в течение этого промежутка времени, является электродвижущая сила самоиндукции, а источником энергии – энергия магнитного поля катушки индуктивности.

### Плотность энергии магнитного поля.

Формула (24.5) определяет энергию магнитного поля через ток. Найдём другую формулу, описывающую энергию магнитного поля через его характеристики, т.е. через индукцию и напряженность.

$$W_M = \frac{LJ^2}{2} = \frac{1}{2} J\Phi, \text{ но } \Phi = \int_S \bar{B}d\bar{s} = \int_S \text{rot}\bar{A}d\bar{s} = \int \bar{A}d\bar{l}, \text{ т.е. } W_M = \frac{J}{2} \int \bar{A}d\bar{l}.$$

Если перейти в этой формуле от линейных токов к объемным токам, то  $W_M = \frac{1}{2} \int_V \bar{A}\bar{j}dV$ .

Преобразуем подынтегральное выражение. Для этого рассмотрим выражение  $\text{div}[\bar{A} \times \bar{H}] = \bar{H}\text{rot}\bar{A} - \bar{A}\text{rot}\bar{H} = \bar{H}\bar{B} - \bar{A}\bar{j}$ . Тогда мы найдём  $\bar{A}\bar{j} = \bar{H}\bar{B} - \text{div}[\bar{A} \times \bar{H}]$ . После подстановки этого выражения найдём, что

$$W = \frac{1}{2} \int_V \bar{H}\bar{B}dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\bar{A} \times \bar{H}]dV. \quad (24.13)$$

Но  $\int_V \text{div}[\bar{A} \times \bar{H}]dV = \int_S [\bar{A} \times \bar{H}]d\bar{s}$ . Оценим второе слагаемое в (24.13). Пусть токи находятся в одной области пространства, а энергию рассматриваем в удаленных областях пространства. Чтобы оценить интеграл при больших значениях  $r$ , учтем, что, векторный потенциал пропорционален  $\frac{1}{r}$ , т.е.  $A \approx \frac{1}{r}$ .

Напряженность магнитного поля  $H \approx \frac{1}{r^2}$ , а  $ds \approx r^2$ . Тогда весь интеграл имеет порядок  $\frac{1}{r}$ , а значит при переходе в (24.13.) к интегрированию по всему пространству второй интеграл будет равен нулю и тогда энергия магнитного поля будет определяться формулой:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \bar{H}\bar{B}dV \quad (24.14)$$

Формула (24.14) предполагает, что магнитное поле «размазано» по пространству. Плотность энергии магнитного поля:

$$w_M = \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B} \quad (24.15)$$

В заключение отметим, что формула (24.5) предполагает, что энергия магнитного поля “локализована” в токе, а формула (24.15) – что эта энергия заполняет все пространство.

### §25. Ток смещения и система уравнений Максвелла

Мы установили, что изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле, которое в свою очередь порождает изменяющееся магнитное поле и т. д. В результате образуются сцепленные между собой электрическое и магнитное поля, составляющие электромагнитную волну. Она “отрывается” от зарядов и токов, которые ее породили. Способ существования электромагнитной волны делает невозможным ее неподвижность в пространстве и постоянство напряженности во времени.

#### Ток смещения.

Постоянный ток не протекает в цепи с конденсатором, а в случае переменного напряжения в цепи ток протекает через конденсатор. Для постоянного тока конденсатор – разрыв в цепи, а для переменного этого разрыва нет. Поэтому необходимо заключить, что между обкладками конденсатора происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости. Этот процесс между обкладками конденсатора был назван током смещения. Напряженность поля между обкладками конденсатора  $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ . Из граничного условия для

вектора  $D$  следует, что диэлектрическое смещение между обкладками  $D = \sigma = \frac{Q}{S}$ , а сила тока в цепи равна  $J = \frac{\partial Q}{\partial t}$ . Тогда

$$\vec{J}_{\text{см}} = S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (25.1)$$

а значит процессом, замыкающим ток проводимости в цепи, является изменение электрического смещения во времени. Плотность тока

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (25.2)$$

Существование тока смещения было постулировано Максвеллом в 1864 г. и затем экспериментально подтверждено другими учеными.

Почему скорость изменения вектора смещения называется плотностью тока? Само по себе математическое равенство величины  $S \partial D / \partial t$ , характеризующей процесс между обкладками конденсатора, т.е. равенство двух величин, относящихся к разным областям пространства и имеющим различную физическую природу, не содержит в себе, вообще говоря, какого-то физического закона. Поэтому называть  $S \partial D / \partial t$  “током” можно только формально. Для того чтобы придать этому названию физический смысл, необходимо доказать, что  $S \partial D / \partial t$  обладает наиболее характерными свойствами тока, хотя и не представляет движения электрических зарядов, подобного току проводимости. Главным свойством тока проводимости является его способность породить магнитное поле. Поэтому решающим является вопрос о

том, порождает ли ток смещения магнитное поле так же, как его порождают ток проводимости, или, более точно, порождает ли величина (25.2) такое же магнитное поле, как равная ей объемная плотность тока проводимости? Максвелл дал утвердительный ответ на этот вопрос. Однако наиболее ярким подтверждением порождения магнитного поля током смещения является существование электромагнитных волн. Если бы ток смещения не создавал магнитного поля, то не могли бы существовать электромагнитные волны.

### Уравнение Максвелла с током смещения.

Порождение магнитного поля токами проводимости описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (25.3)$$

Учитывая порождение поля током смещения, необходимо обобщить это уравнение в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} \quad (25.4)$$

Тогда, принимая во внимание (25.2), окончательно получаем уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (25.5)$$

являющееся одним из уравнений Максвелла.

### Система уравнений Максвелла.

Полученная в результате обобщения экспериментальных данных, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{I} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{II} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \text{III} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \text{IV} \end{aligned} \quad (25.6)$$

Эти уравнения называются полевыми и справедливы при описании всех макроскопических электромагнитных явлений. Учет свойств среды достигается уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (25.7)$$

называемыми обычно **материальными уравнениями среды**. Среда линейна, если  $\varepsilon, \mu, \gamma = \text{const}$  и нелинейна если  $\varepsilon = \varepsilon(E), \mu = \mu(B), \gamma = \gamma(E)$ . Материальные уравнения, как правило, имеют вид функционалов.

Рассмотрим физический смысл уравнений.

Уравнение I выражает закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля. Уравнение II выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле. Вторым источником электрического поля являются электрические заряды (уравнение IV). Уравнение III говорит о том, что в природе нет магнитных зарядов.



### **Полнота и совместность системы. Единственность решения.**

В случае линейной среды можно исключить из полевых уравнений (25.6) величины  $\vec{D}, \vec{H}, \vec{j}$  в результате чего они становятся уравнениями относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , т.е. относительно шести неизвестных (у каждого вектора по 3 проекции). С другой стороны число скалярных уравнений в (25.6) равно восьми. Получается, что система состоит из 8 уравнений для 6 неизвестных. Однако в действительности система не переполнена. Это обусловлено тем, что уравнения I и IV, а также II и III имеют одинаковые дифференциальные следствия и поэтому связаны между собой.

Чтобы в этом убедиться возьмем  $div$  от уравнения II и производную по времени от уравнения III. Получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{divrot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{B}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{B}) &= 0 \end{aligned}$$

т.е. получили одинаковые дифференциальные следствия. Аналогично возьмем  $div$  от уравнения I:

$$\operatorname{divrot}\vec{H} = \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{D}).$$

С из уравнения непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$  следует, что  $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{D} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{D} - \rho) = 0. \text{ Из IV следует, что } \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{D} - \rho) = 0$$

Наличие двух дифференциальных связей и делает систему уравнений Максвелла совместной. Более подробный анализ показывает, что система является полной, а ее решение однозначно при заданных начальных и граничных условиях.

Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т.е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана.

### **§26. Закон сохранения энергии электромагнитного поля**

Рассмотрим некоторый замкнутый объем  $V$  в котором есть электромагнитное поле и токи проводимости. Тогда тепло Джоуля-Ленца, выделяемое токами в объеме согласно (15.5), будет равно

$$\int_V P_V dV = \int_V \vec{j}\vec{E} dV \quad (26.1)$$

Для упрощения расчетов считаем, что других превращений энергии в этом объеме нет.

$$\bar{j} = \text{rot}\bar{H} - \frac{\partial\bar{D}}{\partial t},$$

$$N = \int_V \bar{E} \cdot \text{rot}\bar{H} dV - \int_V \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \bar{E} dV \quad (26.2)$$

Воспользуемся формулой

$$\text{div}[\bar{E} \times \bar{H}] = \bar{H} \text{rot}\bar{E} - \bar{E} \text{rot}\bar{H} = -\bar{H} \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \text{rot}\bar{H}.$$

$$\Rightarrow \bar{E} \text{rot}\bar{H} = -\bar{H} \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \text{div}[\bar{E} \times \bar{H}].$$

Подставим это соотношение в уравнение (26.2). Получим:

$$N = -\int_V \bar{H} \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} dV - \int_V \text{div}[\bar{E} \times \bar{H}] dV - \int_V \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \bar{E} dV.$$

Учтем, что  $\bar{H} \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{H}\bar{B})$ , и то, что  $\bar{E} \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{E}\bar{D})$ . Тогда

$$N = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V (\bar{E}\bar{D} + \bar{B}\bar{H}) dV - \int_{\sigma} [\bar{E} \times \bar{H}] d\bar{\sigma} \quad (26.3)$$

где  $\sigma$  - поверхность, ограничивающая объем  $V$ .

Величина

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\bar{E}\bar{D} + \bar{B}\bar{H}) dV \quad (26.4)$$

является электромагнитной энергией, заключенной в объеме  $V$ .

Введем вектор

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (26.5)$$

Смысл этого вектора – плотность потока энергии сквозь поверхность, ограничивающую объем  $V$ , который называется вектором Пойтинга (Умова-Пойтинга).

С учетом введенного обозначения получим уравнение:

$$N = -\frac{\partial W}{\partial t} - \int_{\sigma} \bar{S} d\bar{\sigma} \quad \text{или} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -N - \int_{\sigma} \bar{S} d\bar{\sigma} \quad (26.6)$$

Выражение (26.6) означает, что изменение энергии электромагнитного поля в объеме может происходить за счет работы токов проводимости в этом объеме и потока энергии сквозь поверхность, ограничивающую данный объем. Формула (26.6) и есть закон сохранения энергии электромагнитного поля. Если энергия электромагнитного поля не изменяется, т.е.  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ , то (26.6) принимает вид

$$N = -\int_{\sigma} \bar{S} d\bar{\sigma} \quad (26.7)$$

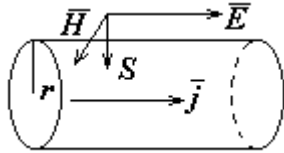
Следовательно, вся производимая в замкнутом объеме работа совершается за счет потока электромагнитной энергии сквозь поверхность, ограничивающую этот объем.

## §27. Движение электромагнитной энергии

### Движение электромагнитной энергии вдоль линии передач.

Рассмотрим участок проводника круглого сечения радиуса  $r$  вдоль которого течет постоянный ток с объемной плотностью  $j$ . Согласно закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}. \quad (27.1)$$



Поле существует как внутри, так и вне проводника вблизи его поверхности вследствие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности.

Вычислим по (26.7) поток энергии сквозь замкнутую поверхность цилиндра, боковая поверхность которого совпадает с поверхностью проводника длиной  $l$ , а сечение является кругом радиуса  $r$ . Так как напряженность магнитного поля у поверхности проводника направлена по касательной к поверхности в плоскости перпендикулярной к оси проводника, то согласно закона полного тока в магнетике

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = J \quad (27.2)$$

$H \cdot 2\pi r = j\pi r^2$ , откуда

$$H = \frac{j r}{2} \quad (27.3)$$

Вектор Пойтинга, согласно определению по (26.5), будет направлен по радиусу к оси проводника и величина его будет равна

$$S = EH = \frac{j}{\gamma} \frac{j r}{2} = \frac{j^2 r}{2\gamma}. \quad (27.4)$$

Это означает, что электромагнитная энергия втекает в проводник из окружающего пространства через боковую поверхность. Поток энергии через основания отсутствует. На участке проводника длиной  $l$  за одну секунду втечет энергии:

$$\left| \int_{\sigma} \vec{S} d\vec{\sigma} \right| = S \cdot 2\pi r l = \frac{j^2 \pi r^2 l}{\gamma} \quad (27.5)$$

Когда по проводнику протекает ток, то в нем выделяется тепло Джоуля-Ленца

$$N = J^2 R = (j\pi r^2)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{l}{\pi r^2} = \frac{j^2 \pi r^2 l}{\gamma}. \quad (27.6)$$

Если сравнить (27.6) и (27.5), то они равны. Это непосредственно следует из равенства (26.7), где слева тепло Джоуля-Ленца, а справа – поток энергии, втекающий в объем.  $N = \int_{\sigma} S d\sigma$ , так как  $\cos 180^\circ = -1$ . Таким образом,

передаваемая с помощью электрического тока энергия движется в окружающем пространстве, при этом проводник играет роль направляющей, вдоль которой движется электромагнитная энергия, причем ее плотность в каждой точке пространства определяется вектором Умова-Пойтинга.

### Движение электромагнитной энергии вдоль кабеля.

Кабель представляет собой систему, состоящую из центрального проводника, затем слоя вещества и внешней цилиндрической проводящей оболочки. Между центральной жилой и внешней оболочкой находится как правило диэлектрик. Поскольку  $H \neq 0$  лишь в пространстве между центральной жилой и внешней оболочкой и направлен по касательной к окружности, осью которой является центральная жила. Радиальная составляющая напряженности электрического поля  $E_r$ . Тогда вектор Умова-Пойтинга будет направлен вдоль центральной жилы и не равен нулю в диэлектрике. Таким образом, электромагнитная энергия в кабеле распространяется внутри него и плотность энергии в каждой точке определяется также вектором Умова-Пойтинга. Здесь можно также показать справедливость соотношения (26.7).

## §28. Излучение электромагнитных волн

### Уравнение для векторного потенциала.

Будем исходить из уравнения Максвелла  $rot\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$ . Домножим обе части на  $\mu\mu_0 = \mu'$  и учтем, что  $B = \mu\mu_0 H$  и  $\varepsilon\varepsilon_0 = \varepsilon'$ . получим:

$$rot\bar{B} = \mu'\bar{j} + \varepsilon'\mu'\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}.$$

Учтем, что  $\bar{B} = rot\bar{A}$  и  $\bar{E} = -grad\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$ . Тогда получим

$$rotrot\bar{A} = \mu'\bar{j} + \varepsilon'\mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$graddiv\bar{A} - \Delta\bar{A} = \mu'\bar{j} - \left(grad\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}\right)\varepsilon'\mu'$$

$$\Rightarrow \Delta\bar{A} - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\mu'\bar{j} + grad\left(div\bar{A} + \mu'\varepsilon'\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \quad (28.1)$$

Пользуясь неоднозначностью потенциалов, определяемых с точностью до калибровочного преобразования, для максимального упрощения наложим на них условие:

$$div\bar{A} + \mu'\varepsilon'\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (28.2)$$

и тогда из (28.1) получим уравнение Даламбера:

$$\Delta\bar{A} - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\mu'\bar{j} \quad (28.3)$$

Условие (28.1) называется условием калибровки Лоренца. Получим теперь уравнение для скалярного потенциала следующим образом:

$$divE = \frac{\rho}{\varepsilon'}, \text{ и учтем, что } E = -grad\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}. \text{ Тогда } -divgrad\phi - div\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon'}$$

$$\Rightarrow -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}(div\bar{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon'}.$$

Из (28.2):  $\operatorname{div} \bar{A} = -\mu' \varepsilon' \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Тогда получим

$$\Delta \varphi - \mu' \varepsilon' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon'} \quad (28.4)$$

Уравнение (28.4) тоже уравнения Даламбера. Следовательно, для скалярного и векторного потенциалов получили одно и тоже уравнение.

$$\Delta \Phi(\bar{r}, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\bar{r}, t) = -f(\bar{r}, t) \quad (28.5)$$

где  $V = \frac{1}{\sqrt{\mu' \varepsilon'}}$  - скорость электромагнитных волн в среде. Уравнение (28.5) –

уравнение гиперболического типа и описывает волновой процесс, т.е. волны, распространяющиеся в пространстве со скоростью  $V$ . В одномерном случае при  $f = 0$  решение (28.5) можно представить в виде суммы двух функций:

$$\Phi(x, t) = \Phi\left(t - \frac{x}{V}\right) + \Phi\left(t + \frac{x}{V}\right). \quad (28.6)$$

которое описывает волны, распространяющиеся в двух противоположных направлениях. Функция  $\Phi\left(t - \frac{x}{V}\right)$  представляет собой волну, движущуюся в

направлении положительных значений оси  $Ox$  со скоростью  $V$ , а  $\Phi\left(t + \frac{x}{V}\right)$  - в противоположном направлении.

Рассмотрим решение волнового уравнения в сферически симметричном случае, т.е. считая, что в (28.5)  $f = 0$ , а  $\Phi = \Phi(r)$ , где  $r$  – расстояние от начала координат до рассматриваемой точки. В этом случае  $\Phi$  от углов не зависит и оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi). \quad (28.7)$$

Поэтому волновое уравнение для  $\Phi$  записывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = 0. \quad (28.8)$$

Решением этого уравнения для  $r\Phi$ , как и в предыдущем случае, являются произвольные функции от аргумента  $t - \frac{r}{V}$  и  $t + \frac{r}{V}$ , т.е. общее выражение для  $\Phi$  таково:

$$\Phi(r, t) = \frac{\Psi_1\left(t - \frac{r}{V}\right)}{r} + \frac{\Psi_2\left(t + \frac{r}{V}\right)}{r}. \quad (28.9)$$

Функция  $\Psi_1\left(t - \frac{r}{V}\right)$  представляет волну, движущуюся в радиальном направлении от начала координат со скоростью  $V$ . Форма волны при этом не изменяется, а амплитуда уменьшается как  $1/r$ . Эта волна называется расходящейся. Функция  $\Psi_2\left(t + \frac{r}{V}\right)$  представляет сходящуюся к началу координат волну.

Потенциалы поля, а следовательно, и сами поля распространяются в свободном пространстве со скоростью  $V = 1/\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ . В вакууме  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , поэтому скорость распространения полей равна скорости света  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ . Таким образом *электромагнитные волны и всякие изменения электрического и магнитного поля распространяются в вакууме со скоростью света*. А это означает, что электромагнитные взаимодействия распространяются со скоростью света. Например, если два точечных заряда покоятся на расстоянии  $r$  друг от друга и один из зарядов в некоторый момент сдвинут со своего места, то другой заряд «почувствует» этот сдвиг лишь спустя время  $\tau = r/c$ .

### **Запаздывающие и опережающие потенциалы.**

Учитывая свойства решений волнового уравнения, следует ожидать, что решение уравнений (28.3) и (28.4) для потенциалов переменных полей отличается только тем, что надо учесть конечную скорость распространения электромагнитных взаимодействий. Другими словами, *движущийся заряд и элемент переменного тока создают в каждой точке окружающего пространства такой же потенциал, как если бы заряд был неподвижным, а ток постоянным, но с тем различием, что такой потенциал в каждой точке создается не в тот момент времени, а позднее на время запаздывания, т.е. на время, необходимое электромагнитному полю для распространения от источника до точки наблюдения*. Поэтому для зарядов и токов, находящихся в конечной области пространства, решение уравнений (28.3) и (28.4) может быть представлено в виде

$$A(\bar{r}, t) = \frac{\mu'}{4\pi} \int \frac{j\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{V}\right)}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV' \quad (28.7)$$

$$\varphi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon'} \int \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{V}\right)}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV' \quad (28.8)$$

Здесь  $|\bar{r} - \bar{r}'|$  - расстояние между точкой, в которой вычисляется потенциал и элементом  $dV'$  объема интегрирования. Характерной особенностью (28.7) и (28.8) является то, что значение потенциалов  $A$  и  $\varphi$  в данной точке обусловлены зарядами и токами, взятыми в предшествующий момент времени. В этом смысле эти потенциалы называются запаздывающими потенциалами ибо они описывают потенциалы в более поздний момент времени  $t$  по сравнению с моментом  $t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{V}$ .

Уравнения (28.3) и (28.4) еще имеют решения, аргументами которых являются  $\left(t + \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{V}\right)$ . Такие потенциалы называются опережающими, но явного физического смысла они не имеют.

Имея конкретное распределение зарядов и токов, можно вычислить  $A$  и  $\varphi$ , а затем вторым этапом найти  $\bar{B}$  и  $\bar{E}$ . Примером простейшего излучателя электромагнитных волн является вибратор Герца. Фактически это электрический диполь, момент которого изменяется с течением времени. Другим простым излучателем электромагнитных волн является вращающаяся рамка с током.

## §29. Распространение электромагнитных волн в диэлектрике

### Плоские волны.

Электромагнитная волна называется плоской, если вектор волны имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Конечно, от плоскости к плоскости эти векторы изменяются. Можно сказать, что поверхностями постоянной фазы в плоской волне являются плоскости, перпендикулярные направлению распространения волны. Волна называется монохроматической, если векторы волны изменяются со временем по гармоническому закону с одной определенной частотой. Если вдоль оси  $z$  распространяется волна, то векторы поля имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{E}(z,t) &= \bar{E}(z)e^{i\omega t} \\ \bar{B}(z,t) &= \bar{B}(z)e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (29.1)$$

Если поверхности равной фазы совпадают с поверхностями постоянной амплитуды, то волна называется однородной.

### Уравнения для векторов поля волны.

Будем теперь исходить не из потенциалов, как это было в предыдущем параграфе, а непосредственно из векторов поля. Рассмотрим случай однородной неограниченной среды, у которой  $\varepsilon' = const$  и  $\mu' = const$ , причем свободные заряды отсутствуют ( $\rho = 0$ ) и проводимость среды  $\gamma = 0$ , т.е. самый простой случай.

Уравнения Максвелла будет иметь вид:

$$rot\bar{B} = \mu'\varepsilon'\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\quad (29.2)$$

$$rot\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\quad (29.3)$$

Возьмем производную по времени от обеих частей (29.2):

$$rot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = \mu'\varepsilon'\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2},$$

а от (29.3) возьмем  $rot$ , т.е.

$$rotrot\bar{E} = -rot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$-graddiv\bar{E} + \Delta\bar{E} = -rot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

и учитывая предыдущее уравнение получим

$$\Delta \bar{E} - \varepsilon' \mu' \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (29.4)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \bar{B} - \varepsilon' \mu' \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (29.5)$$

Решение этих уравнений будем искать в виде (29.1). Совместим ось  $z$  с направлением распространения волны. Тогда подставив (29.1) в (29.4), для амплитуды  $\bar{E}(z)$ . Получим уравнение

$$\left( \frac{d^2 \bar{E}(z)}{dz^2} + \varepsilon' \mu' w^2 \bar{E}(z) \right) e^{iwt} = 0$$

или

$$\frac{d^2 \bar{E}}{dz^2} + k^2 \bar{E}(z) = 0 \quad (29.6)$$

$$\text{где } k^2 = \varepsilon' \mu' w^2, \quad k = w \sqrt{\varepsilon' \mu'} \quad (29.7)$$

Общее решение уравнения (29.6) можно записать в виде

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_{01} e^{-ikz} + \bar{E}_{02} e^{ikz} \quad (29.8)$$

где  $\bar{E}_{01}$  и  $\bar{E}_{02}$  - постоянные. Подставим (29.8) в (29.1) получим, что

$$\bar{E}(z, t) = \bar{E}_{01} e^{i(wt - kz)} + \bar{E}_{02} e^{i(wt + kz)} \quad (29.9)$$

Аналогичные выражения можно записать и для  $\bar{B}$

Первое слагаемое в (29.9) описывает волну, движущуюся вправо вдоль оси  $z$ , а второе слагаемое - волну, распространяющуюся в противоположном направлении. Допустим, что волна распространяется в положительном направлении оси Oz. Тогда

$$\bar{E}(z, t) = \bar{E}_{01} e^{i(wt - kz)}, \quad \bar{B}(z, t) = \bar{B}_{01} e^{i(wt - kz)} \quad (29.10)$$

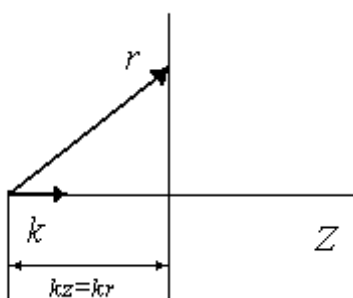
Такая волна является плоской, монохроматической и однородной. Формулы (29.10) показывают, что плоские волны в однородном диэлектрике распространяются без изменения амплитуды, т.е. без поглощения. Выражение  $(wt - kz)$  - это фаза волны. Скорость движения в плоскости постоянной фазы называется фазовой и она находится дифференцированием по времени условия

постоянства фазы:  $wt - kz = const$ , т.е.  $w - k \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \Rightarrow V = \frac{dz}{dt} = \frac{w}{k} = c \sqrt{\varepsilon \mu}$ , где  $c$  -

скорость распространения света (электромагнитных волн) в вакууме. Формулы для поля записаны так, т.е. при специальном выборе системы координат, когда ось  $z$  совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться, если ввести волновой вектор  $\vec{k}$ , который будет направлен вдоль направления распространения волны, причем  $\vec{k} \vec{r} = kz$ . Тогда

$$\bar{E}(z, t) = \bar{E}_0 e^{i(wt - kz)}, \quad \bar{B}(z, t) = \bar{B}_0 e^{i(wt - kz)}, \quad (29.11)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор некоторой точки на плоскости постоянной фазы.



Введем величину  $\lambda$  - длина волны. По определению это расстояние, на которое точка



постоянной фазы переместится за один период колебания.

$$\lambda = VT = \frac{wT}{k} = \frac{2\pi}{k}, \quad (29.12)$$

а величина

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (29.13)$$

называется волновым числом.

### **Свойства волн.**

Для исследования свойств плоских волн подставим (29.11) в уравнение Максвелла и для упрощения записи воспользуемся оператором Гамильтона:

$$\bar{\nabla} = \bar{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\text{div} \bar{E} = \bar{\nabla} \bar{E} = -ik \bar{E} = 0 \Rightarrow \bar{k} \cdot \bar{E} = 0 \quad (29.14)$$

Следовательно,  $\bar{k} \perp \bar{E}$ . Из условия  $\text{div} \bar{B} = 0 \Rightarrow \text{div} \bar{B} = \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = -ik \bar{B} = 0$  получаем, что  $\bar{k} \perp \bar{B}$ .

Далее подставим (29.11) в уравнение (29.2) и (29.3), получим

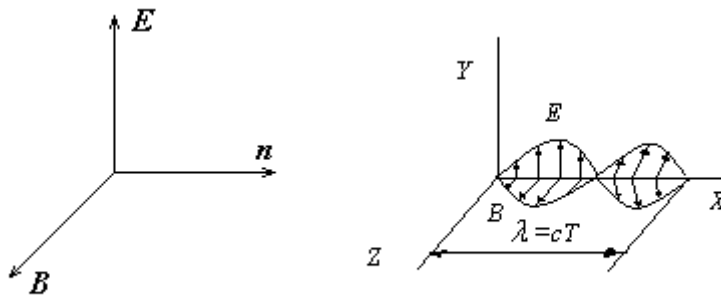
$$-\left[\bar{k} \times \bar{B}\right] = \varepsilon' \mu' w \bar{E} \quad (29.16)$$

$$\left[\bar{k} \times \bar{E}\right] = w \bar{B}$$

Тогда из (29.1) получим

$$\bar{n} \times \bar{E} = V \bar{B} \quad (29.17)$$

Из полученных соотношений следует, что векторы  $n$ ,  $B$  и  $E$  взаимно перпендикулярны и образуют следующую тройку:



Поскольку у векторов  $\bar{B}$  и  $\bar{E}$  одинаковые экспоненты, то гармонические плоские электромагнитные волны в однородном диэлектрике изменяются в одной фазе.

### **Плотность потока энергии.**

Она определяется вектором Пойнтинга, модуль которого в случае плоской волны равен

$$|\bar{S}| = |\bar{E} \times \bar{H}| \quad (29.18)$$

а  $w$  – плотность энергии электромагнитного поля, т.е.

$$w = \frac{1}{2}(\bar{E}\bar{D} + \bar{B}\bar{H}) \quad (29.19)$$

Это означает, что скорость переноса энергии плоской волной в однородном диэлектрике равна фазовой скорости волны.

### §30. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах

#### Комплексная диэлектрическая проницаемость.

Рассмотрим случай однородной среды:  $\mu = const$ ,  $\varepsilon = const$ ,  $\gamma = const \neq 0$ , т.е. среда является проводящей. Уравнения Максвелла при этом имеют вид:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu' \bar{j} + \mu' \varepsilon' \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu' \gamma \bar{E} + \mu' \varepsilon' \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (30.1)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (30.2)$$

Если подставить в эти уравнения формулы (29.11), но вместо  $\bar{k}$  записать  $\bar{k}_w$ , то мы получим

$$-[\bar{k}_w \times \bar{B}] = \mu' w \left( \varepsilon' + \frac{\gamma}{iw} \right) \bar{E} \quad (30.3)$$

$$[\bar{k}_w \times \bar{E}] = w \bar{B} \quad (30.4)$$

где  $\bar{k}_w = k_w \bar{k}_0$ , где  $k_0$  - единичный вектор.

Уравнение (30.3) переходит в соответствующее уравнение для диэлектрика если  $\gamma = 0$ . Уравнение (30.4) не отличается от такого же уравнения для диэлектрика. Таким образом, проводящая среда в математическом отношении отличается от диэлектрика лишь тем, что в уравнении для волн вместо диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'$  входит комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon'_w$ . Это означает, что решения здесь будут точно такие же, как и для диэлектрика, только диэлектрическая проницаемость среды комплексная величина, т.е.

$$\varepsilon'_w = \varepsilon' + \frac{\gamma}{iw} = \varepsilon' - i \frac{\gamma}{w} \quad (30.5)$$

Все последующие вычисления совпадают с вычислениями для диэлектрика, но с заменой  $\varepsilon'$  на  $\varepsilon'_w$ . Это приводит к следующему:

Вместо волнового числа  $k$  появляется величина  $k_w$ , причем

$$k_w^2 = w^2 \varepsilon'_w \mu' = w^2 \varepsilon' \mu' - iw \gamma \mu'. \quad (30.6)$$

Представим  $k_w$  в виде комплексного числа, а именно

$$k_w = k - is \quad (30.7)$$

и подставляя в (30.6) получим:

$$k^2 - 2iks - s^2 = w^2 \varepsilon' \mu' - iw \gamma \mu'.$$

Приравнявая действительные и мнимые части и найдем:

$$\begin{cases} k^2 - s^2 = w^2 \varepsilon' \mu' = a \\ 2ks = w \gamma \mu' = b \end{cases} \quad (30.8)$$

Решение этой алгебраической системы уравнений таково:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) = \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon w} \right)^2} + 1 \right), \quad (30.9)$$

$$s^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) = \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon w} \right)^2} - 1 \right) \quad (30.10)$$

### Глубина проникновения.

Исследуем амплитуду плоской волны, распространяющейся в направлении положительных значений оси  $Z$ :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)} \quad (30.11)$$

Таким образом, амплитуда волны в процессе распространения уменьшается, т.е. в проводящей среде электромагнитная волна распространяется с затуханием амплитуды. На пути

$$\Delta = 1/s \quad (30.12)$$

амплитуда напряженности поля волны уменьшается в  $e$  раз, поэтому  $\Delta$  называется **глубиной проникновения** плоской волны в проводящую среду.

Оценим глубину проникновения волн различной длины волны. Для видимого света длина волны равна

$$\lambda = (0,4 \div 0,75) 10^{-6} \text{ м}, \quad (30.13)$$

Что соответствует частоте  $\omega$  порядка  $5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Проводимость металлов имеет порядок  $10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , а значение может быть принято равным  $\varepsilon_0$ . Таким образом,

$$\gamma / (\varepsilon w) \approx 2 \cdot 10^2 \gg 1. \quad (30.14)$$

При длинах волн, больших, чем световая, это неравенство усиливается. Поэтому в формуле (30.10) можно пренебречь единицей по сравнению с  $\gamma / (\varepsilon w)$  и записать выражение для  $s$  в виде

$$s = \sqrt{w \gamma \mu / 2} \quad (30.15)$$

Следовательно, глубина проникновения равна

$$\Delta = 1/s = \sqrt{2 / (w \gamma \mu)}. \quad (30.16)$$

Поскольку длина волны  $\lambda$  связана с частотой  $w$  соотношением  $w = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\varepsilon \mu}}$ ,

формулу (30.16) можно переписать:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \gamma}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (30.17)$$

где  $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  имеет размерность сопротивления и является характеристическим сопротивлением среды. Для вакуума оно равно

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом}. \quad (30.18)$$

Рассмотрим, например, медь, для которой  $\gamma = 5 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ . При  $\lambda = 1 \text{ м}$  глубина проникновения равна  $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Поэтому ни о каком

проникновении волны в проводящую среду, в сущности, не может быть и речи, есть просто поглощение в очень малом поверхностном слое. Даже для очень коротких волн это заключение остается справедливым. Например, для волн порядка световых ( $\lambda \approx 10^{-8}$  м) глубина проникновения составляет  $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9}$  м.

### **Физическая причина поглощения.**

Физической причиной такого быстрого затухания электромагнитных волн в проводящей среде является преобразование электромагнитной энергии волны в джоулеву теплоту: напряженность электрического поля волны возбуждает в проводящей среде токи проводимости, которые по закону Джоуля – Ленца нагревают вещество среды.

### **Интерпретация скин-эффекта.**

Теперь можно дать интерпретацию скин-эффекта.

Энергия, переносимая током, движется в пространстве вокруг проводников в виде электромагнитной энергии. Часть ее через поверхность проводника проникает внутрь проводника, чтобы поддержать движение электронов, и там превращается в кинетическую энергию электронов, и там превращается в джоулеву теплоту. Поэтому ток может поддерживаться в тех частях проводника, в которые из окружающего пространства поступает электромагнитная энергия. Поскольку эта энергия может проникнуть в проводник лишь на глубину  $\Delta$ , то только в пределах такой глубины около поверхности проводника и может существовать ток, т.е.  $\Delta$  есть толщина скин-слоя, где объемная плотность тока текущего по проводнику уменьшается в  $e$  раз. Поэтому практически весь ток сосредоточен в слое толщиной  $\Delta$ .

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>Основные формулы, соотношения и теоремы.....</b>	<b>4</b>
<b>§1.Микроскопические носители электрических зарядов.....</b>	<b>8</b>
<b>§2. Электрический ток.....</b>	<b>12</b>
<b>§3.Закон сохранения заряда.....</b>	<b>14</b>
<b>§4. Закон Кулона. Электрическое поле.....</b>	<b>15</b>
<b>§5. Дифференциальная формулировка закона Кулона.....</b>	<b>18</b>
<b>§6. Потенциальность электрического поля.....</b>	<b>21</b>
<b>§7. Уравнения Лапласа и Пуассона.....</b>	<b>25</b>
<b>§8.Электростатическое поле при наличии проводников.....</b>	<b>28</b>
<b>§9.Емкость проводника. Потенциальные и емкостные коэффициенты.....</b>	<b>33</b>
<b>§ 10. Метод электростатических изображений.....</b>	<b>37</b>
<b>§ 11. Электростатическое поле при наличии диэлектриков.....</b>	<b>41</b>
<b>§12. Энергия электростатического поля.....</b>	<b>50</b>
<b>§13.Силы в электрическом поле.....</b>	<b>54</b>
<b>§14.Постоянный электрический ток.....</b>	<b>56</b>
<b>§15.Закон Джоуля-Ленца. Работа и мощность тока.....</b>	<b>61</b>
<b>§16.Магнитное поле. Закон взаимодействия токов.....</b>	<b>63</b>
<b>§17. Закон полного тока.....</b>	<b>68</b>
<b>§18. Уравнение Максвелла для стационарного магнитного поля.....</b>	<b>70</b>
<b>§19. Векторный потенциал.....</b>	<b>71</b>
<b>§20. Магнитное поле при наличии магнетиков.....</b>	<b>72</b>
<b>§21. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитных полях.....</b>	<b>77</b>
<b>§22. Индукция токов в проводниках, движущихся в магнитном поле. Возникновение э.д.с. в проводниках, движущихся в магнитном поле.</b>	<b>79</b>
<b>§23. Закон электромагнитной индукции Фарадея.....</b>	<b>80</b>
<b>§24. Энергия магнитного поля.....</b>	<b>82</b>
<b>§25. Ток смещения и система уравнений Максвелла.....</b>	<b>86</b>
<b>§26. Закон сохранения энергии электромагнитного поля.....</b>	<b>89</b>
<b>§27. Движение электромагнитной энергии.....</b>	<b>90</b>
<b>§28. Излучение электромагнитных волн.....</b>	<b>91</b>
<b>§29. Распространение электромагнитных волн в диэлектрике.....</b>	<b>94</b>
<b>§30. Распространение электромагнитных волн в проводящих средах.</b>	<b>97</b>

## Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. - М.: Высшая школа. 1983. 463 с.
2. Калашников С.Г. Электричество. - М.: Наука: 1977, 592 с.
3. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. - М.: Высшая школа. 1983.-273 с.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука. 1976. - 563 с.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа. 1970. - 710 с.