Лекция 1.

Глава 1. Множества и операции над ними

1.1. Понятие множества

Понятие множество относится к наиболее первичным понятиям математики, не определяемым через более простые. Под ***множеством*** понимают совокупность (набор, собрание, семейство, …) некоторых объектов, объединенных по какому-то признаку. Объекты, которые образуют множество, называют ***элементами*** множества.

Примеры множеств:

- множество натуральных чисел;
- множество студентов первого курса экономического факультета БГУ;
- множество предприятий тракторной промышленности Республики Беларусь.

Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, …), а их элементы – строчными (a, $в$, c, …).

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$. Если же элемент b не принадлежит множеству B, то пишут $b \notin B$.

Множества задают различными способами. Можно перечислить элементы множества. Например, запись

$$A = \{-9; 17; 9\}$$

означает, что множество A состоит из трех элементов: -9, 17, 9.

Если же принадлежность элементов множеству определяется по некоторому условию, то применяется формула вида

$$B = \{x \mid условие\},$$

которая означает, что множество B состоит из элементов, удовлетворяющих указанному условию. Например, множество решений неравенства $x^2+5x+6 \geq 0$ можно определить следующим образом:

$$C = \{x \mid x^2+5x+6 \geq 0\}.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, его обозначают символом Ø. Например, множество действительных корней квадратного уравнения $x^2+16=0$ является пустым.

Пусть A и B – два множества. Если каждый элемент множества A принадлежит и множеству B, то множество A называется подмножеством B, и это записывается так: $A\subset B$.

Например, множество нечетных чисел $\{1, 3, 5, \ldots\}$ является подмножеством натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Если и $B\subset A$, то множества A и B называются ***равными***, и записывают $A=B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество $C=A\bigcup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A, или множеству B, или им обоим. Следовательно,

$A\bigcup B=\{x \mid x\in A \, или \, x\in B\}$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество $C=A\bigcup B$, каждый элемент которого принадлежит и множеству A и множеству. B. Значит,

$A\bigcap B=\{x \mid x\in A \, и \, x\in B\}$.

Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, и обозначается $A\setminus B$. Поэтому

$A\setminus B=\{x \mid x\in A \, и \, x\notin B\}$.

Пример 1.

Даны два множества $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Решение.

Объединение множеств A и B:

$A\bigcup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

пересечение:

$A\bigcap B=\{2\}$,

разность:

$A\setminus B=\{1, 3\}$.

1.2. Числовые множества

Множества, которые состоят из чисел, называются ***числовыми***. Из курса школьной математики известны следующие числовые множества:

натуральные числа $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$;

целые числа $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

рациональные числа $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$;

действительные числа $\mathbb{R}$.

Любое рациональное число представляется или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Например: $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{1}{3} = 0{,}333(3)$.

Числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Например, число $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Иррациональными числами являются: $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $e = 2{,}71828\ldots$.

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа.

Действительных чисел недостаточно для решения некоторых задач. Например, решая квадратное уравнение $ax^2 + вx + c = 0$, можно вычислить действительные корни только в случае, когда дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Если же $D < 0$, то уравнение можно решить, применяя комплексные числа.

Множество комплексных чисел определяется следующим образом:

$$C = \{a + bi \mid a \in R, b \in R, i = \sqrt{-1}\}.$$

Число $i = \sqrt{-1}$ называется ***комплексной единицей***; очевидно, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Число a называется ***вещественной*** частью комплексного числа, а b – *мнимой*.

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Комплексное число $a - bi$ называется ***сопряженным*** к комплексному числу $a + bi$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел выполняется по правилам:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - b) + (c - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

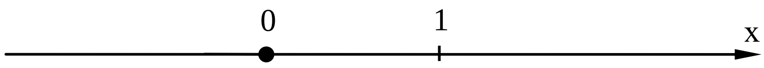
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} i.$$

Между числовыми множествами существует соотношение:

$$\mathbb{N} \subset Z \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.3. Числовые промежутки

Действительные числа изображаются на числовой прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.



Каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, т. е. между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому иногда вместо «число x» говорят «точка x». Действительные числа упорядочены по величине, это значит, что для любых двух действительных чисел a и $в$ справедливо только одно из соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Пусть заданы два действительных числа a и b, причем $a < b$. Можно определить следующие множества:

1. Замкнутый промежуток или отрезок:
   $[a;b] = \{x \mid a \le x \le b\}$.
2. Открытый промежуток или интервал:
   $(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$.
3. Полуоткрытые промежутки или полуинтервалы:
   $(a;b] = \{x \mid a < x \le b\}$,
   $[a;b) = \{x \mid a \le x < b\}$.
4. Бесконечные промежутки:
   $(-\infty;+\infty) = \{x \mid x \in R\}$,
   $(a;+\infty) = \{x \mid x > a\}$,
   $[a;+\infty) = \{x \mid x \ge a\}$,
   $(-\infty;b) = \{x \mid x < b\}$,
   $(-\infty;b] = \{x \mid x \le b\}$.

В дальнейшем все указанные множества будем называть промежутками.

1.4. Абсолютная величина действительного числа

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется само число x, если число x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ } если \text{ } x \ge 0, \\ -x, \text{ } если \text{ } x < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля числа x следует, что $|x| \ge 0$.

Пример 2.

Вычислить $\left|x-|x|\right|$.

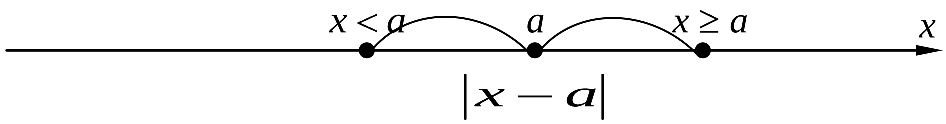
Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-x| = 0$.

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-(-x)| = |2x| = -2x$.

Значит,

$$\left|x-|x|\right| = \begin{cases} 0, \text{если } x \geq 0, \\ -2x \text{ если}, x < 0. \end{cases}$$

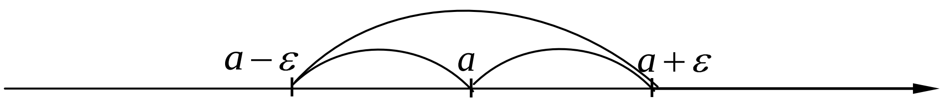
Абсолютная величина разности двух чисел $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой как для случая $x \geq a$, так и для случая $x < a$.



Пусть $\varepsilon > 0$, тогда множество точек x, таких, что $|x-a| < \varepsilon$, называется ε-окрестностью точки a. Решая неравенство $|x-a| < \varepsilon$, получим

$$\begin{cases} x-a < \varepsilon, \\ x-a > -\varepsilon, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < a+\varepsilon, \\ x > a-\varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, ε-окрестностью точки a является интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ (см. рисунок).



1.5. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.1-1.10 выполнить действия над комплексными числами..

1.1. $(3+4i)+(7-5i)$.

1.2. $(2-6i)-(4+2i)$.

1.3. $(2-i)(4+6i)$.

1.4. $(6-6i)(1-i)$.

1.5. $(1+i)^2$.

1.6. $(7+6i)^2$.

1.7. $\dfrac{(2+3i)}{(1+2i)}$.

1.8. $\dfrac{(6+2i)}{(1-i)}$.

1.9. $(2+6i)^2+\dfrac{3-i}{1+i}$.

1.10. $(6-3i)^2-\dfrac{4-i}{1-i}$.

Глава 2. Функции

2.1. Понятие функции

Понятие функции является основным для всей математики и математического анализа. При изучении природных явлений и экономических процессов выявляются совокупности взаимосвязанных величин. Рассмотрим пример из практики. Фирма продает в течение недели некоторый товар по 10 денежных единиц (д. ед.) за штуку. Данные о продаже товаров представлены в следующей таблице.

Таблица 1

День недели	1	2	3	4	5
Количество проданного товара (штук в день)	200	210	212	206	190
Доход (д. ед. в день)	2000	2100	2120	2060	1900

Если *x* – дневной объем продаж товара, *y* – доход от продажи товара, то зависимость между x и y можно выразить формулой:

$$y = 10x.$$

Определение функции.

Рассмотрим два числовых множества X *и* Y.
Если каждому элементу x *множества* $X\ (x \in X)$ *ставится в соответствие единственный элемент множества* $Y\ (y \in Y)$, *то говорят, что на множестве* X *задана функция* $y = f(x)$ *со значениями во множестве* Y.

Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, а переменная y - ***зависимой***.

Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$, множество всех $y \in Y$ – ***областью значений*** функции и обозначается $E(f)$.

В рассмотренном выше примере задана функция

$$y = 10x,$$

с областью определения

$$D(f) = \{200, 210, 212, 206, 190\},$$

и областью значений функции:

$$E(f) = \{2000, 2100, 2120, 2060, 1900\}.$$

При задании функции указывают правило, по которому определяется, каким образом для каждого значения аргумента находится соответствующее значение функции. Основными способами задания функции являются: ***аналитический, табличный и графический***.

Аналитический способ. Этот способ наиболее часто встречается в практике. Функция $y = f(x)$ задается одной или несколькими формулами. Формула, задающая функцию, определяет действия, которые необходимо в определенной последовательности выполнить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Например,

$$y = 3x^2 + 4x + 14; \; y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x < 0, \\ x^2 + x + 1, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$$

Область определения функции может быть указана явно:

$$y = 7x^2 + x + 1, \; D(y) = [-3;4).$$

Если же область определения функции не указана, то она определяется как множество значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

Например, функция $y = 3^x$ определена при всех вещественных значений аргумента, а для функции $y = \sqrt{x-1}$ областью определения является интервал $[1;\infty)$.

Табличный способ. Функция $y = f(x)$ задается таблицей, которая содержит значения аргумента и соответствующие значения функции:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Графический способ. Функция задается графиком – множеством точек $(x;y)$ координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $(x, f(x))$.

Пример 1.

Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Решение.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, поэтому необходимо решить неравенство

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

Сначала найдем корни квадратного уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

По теореме Виета нетрудно получить, что $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Следовательно, областью определения является множество $x \in (-\infty;2] \cup [3;\infty)$.

Пример 2.

Найти область определения функции $f(x) = \arcsin\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

Решение.

Так как функция $y = \arcsin x$ определена для $x \in [-1;1]$, то для нахождения области определения функции $f(x) = \arcsin\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ необходимо потребовать, чтобы выполнялось неравенство $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| \leq 1$. Решим это неравенство:

$$\left|\frac{x-2}{x+2}\right| \leq 1, \quad \begin{cases} \frac{x-2}{x+2} \leq 1, \\ \frac{x-2}{x+2} \geq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-4}{x+2} \leq 0, \\ \frac{2x}{x+2} \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 > 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad x \geq 0.$$

Значит, областью определения функции $f(x) = \arcsin\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ является множество $x \in [0;\infty)$.

2.2. Свойства функций

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если область определения функции симметрична относительно 0, и для любых x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Например, функции $y = |x|$, $y = x\sin x$ – четные.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если область определения функции симметрична относительно 0, и для любых x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Например, функции $y = \sin x$, $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ – нечетные.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функцию, не являющуюся четной или нечетной, называют функцией ***общего вида***. Например, функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ - функции общего вида.

2. Монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей***) на промежутке $[a;b]$, если для любых x_1, $x_2 \in [a;b]$ таких, что $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Неубывающие и невозрастающие функции называются ***монотонными***. Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

Функция называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке $[a;b]$, если для любых x_1, $x_2 \in [a;b]$ таких, что $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Возрастающие и убывающие функции называются ***строго монотонными***. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на множестве $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$.

3. Ограниченность.

Функция называется ограниченной на множестве X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется неограниченной. Например, функция $y = \cos x$ ограничена для всех действительных x, так как $|\cos x| \leq 1$ для любого $x \in R$.

4. Периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодичной*** с ***периодом*** $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$. Например, функция $y = tg(x)$ имеет период $T = \pi$, так как для любых x справедливо равенство $tg(x+\pi) = tg(x)$.

Если T – период функции, то числа $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$ также являются периодами этой же функции.

5. Обратная функция

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = f(x)$. Каждому $x \in X$ по определенному закону ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$. С другой стороны каждому $y \in Y$ будет соответствовать одно или несколько значений $x \in X$.

Если каждому $y \in Y$ по некоторому закону ставится в соответствие только одно значение $x \in X$, то получаем функцию $x = g(y)$, которая задана на множестве *Y* со значениями в множестве *X*.

Функция $g(y)$ называется обратной по отношению к функции $f(x)$ и этот факт записывается следующим образом: $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Функции $f(x)$ и $g(y)$ называются взаимно-обратными.

Традиционно аргумент функции обозначают переменной *x*, а значение функции - *y*. Поэтому обратную функцию обозначают так: $y = g(x)$.

Например, взаимно-обратными функциями являются следующие функции:

$$y = 2^x, \quad и \quad y = \log_2 x .$$

Для взаимно-обратных функций выполняются тождества:

$$g(f(x)) \equiv x, \quad x \in X,$$
$$f(g(y)) \equiv y, \quad y \in Y.$$

Пример 3.

Для функции $y = x^2, x \in [0;1]$ построить обратную функцию.

Решение.

Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0;1]$, значит, для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, на данном промежутке функция $y = x^2$ имеет обратную функцию. Разрешим уравнение $y = x^2$ относительно x: $x = \sqrt{y}$.

Перепишем полученную формулу в обычном виде, обозначив аргумент переменной x, а функцию – y. В итоге получим обратную функцию $y = \sqrt{x}$ для функции $y = x^2, x \in [0;1]$.

Отметим, что функция $y = x^2, x \in [-a; a]$, где $a \neq 0$, не имеет обратной, так как для этой функции одному значению y соответствует два значения x.

6. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве $D(f) = U$, а функция $u = g(x)$ на множестве $D(g) = X$, причем для любого $x \in X$ соответствующее значение $u = g(x) \in U$. Тогда каждому $x \in X$ можно поставить в соответствие единственное значение y, такое $y = f(u)$ и $u = g(x)$, а функция $y = f(g(x))$ называется функцией от функции или ***сложной функцией***.

Например, из функций $y = \sqrt{u+1}$ и $u = a^x$ можно получить сложную функцию $y = \sqrt{a^x + 1}$ аргумента x.

2.3. Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями являются следующие функции.

1) Степенные функции.

$$y = x^n, \quad x \in R, \quad n \in N.$$

$$y = x^{-n}, \quad x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty), \quad n \in N.$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N, \quad n > 1, \quad x \in R, \text{ если } n = 2k+1, \quad x \in [0;\infty), \text{ если } n = 2k.$$

2) Показательная функция.

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R.$$

3) Логарифмическая функция.

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in (0;\infty).$$

4) Тригонометрические функции.

$$y = \sin x, \quad x \in R, \quad |y| \leq 1.$$

$$y = \cos x, \quad x \in R, \quad |y| \leq 1.$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (\pi n; \pi + \pi n), \quad n \in Z.$$

5) Обратные тригонометрические функции.

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$
$$y = \arccos x, \quad x \in [-1;1], \quad y \in [0;\pi].$$
$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in R, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$
$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in R, \quad y \in (0;\pi).$$

Элементарными функциями называют функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложных функций. Например, функция

$$y = \log_2\left(\sin^2 x + \cos^3 x + 2\right)$$

является элементарной функцией.

2.4. Классификация функций

Классификация функций производится в зависимости от типа операций, которые необходимо выполнить над значением аргумента, чтобы получить значение функции.

Если над значением аргумента и некоторыми постоянными выполняется конечное число действий сложения, вычитания, умножения и возведения в целую положительную степень, то такая функция называется алгебраическим многочленом или целой рациональной функцией. Ее вид:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $n \geq 0$, n – целое, a_i – числа (коэффициенты многочлена). Если $a_0 \neq 0$, то $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Рациональной функцией называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_mx^m + \ldots + b_m},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно. Примером рациональной функции является функция

$$R(x) = \frac{4x^3 + 5x + 6}{x^2 + 7}.$$

Если над аргументом x кроме перечисленных операций производится операция извлечения корня и полученный результат не является рациональной функцией, то такая функция называется иррациональной. Например, функция

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x + 7}{2x^2 + 5x + 14}}$$

является иррациональной функцией.

Функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется трансцендентной.

Простейшие трансцендентные функции:

- тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$;
- обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$;
- показательная $y = a^x, a > 0, a \neq 1$;
- логарифмическая $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.

Тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная функция и логарифмическая называются также *основными элементарными* функциями. Функция, которую можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и образования сложных функций, называется *элементарной* функцией.

Функция называется *явной*, если она задана уравнением вида

$$y = f(x),$$

правая часть которой не содержит *y*. В таких случаях говорят: ***функция задана явно.***

Функция называется ***неявной***, если она задана уравнением вида

$$F(x, y) = 0.$$

Например, уравнение окружности, записанное в виде

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

определяет *y* как неявную функцию аргумента *x*.

Переход от явного задания функции к неявному осуществляется просто: для этого достаточно уравнение $y = f(x)$ переписать в виде $y - f(x) = 0$. Сложнее выполнить переход от неявного задания к явному, в этом случае необходимо разрешить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно *y*, а это не всегда возможно.

Функция $y = y(x)$ задана ***параметрически***, если она определена системой двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t -параметр.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.1-3.10 найти область определения функции.

2.1. $y = \ln(1+x) + \sqrt{4-x^2}$.

2.2. $y = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$.

2.3. $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

2.4. $y = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

2.5. $y = \log_3(x^2-7x+10)$.

2.6. $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{9-x^2}$.

2.7. $y = \sqrt{(x^2-4)(25-x^2)}$.-

2.8. $y = \sqrt{\dfrac{x-7}{x^2-5x+4}}$.

2.9. $y = \arcsin\dfrac{2x+1}{3}$.-

2.10. $y = \arccos\dfrac{1-3x}{4}$.

В задачах 2.11-2.20 найти множество значений функции.

2.11. $y = x^2 + 2x + 3$

2.12. $y = x^2 + 6x + 6$

2.13. $y = 3^{|x|}$

2.14. $y = 5^{x^2}$

2.15. $y = 1 + 3\sin x$

2.16. $y = 3\sin x + 4\cos x$

2.17. $y = 10 + \sqrt{x+5}$

2.18. $y = \log_2(x^2+1)$

2.19. $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

2.20. $y = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

В задачах 2.21-2.30 определить, функция является четной, нечетной или общего вида.

2.21. $y = x^4 - 10x^2 + 6$

2.22. $y = \dfrac{x^3+x+1}{x-1}$

2.23 $y = \dfrac{\sin x + |x|\sin x}{2}$

2.24. $y = x|x|$

2.25 $y = \ln \cos x$

2.26. $y = 2^x$

2.27. $y = e^x - 2e^{-x}$

2.28. $y = \log_2 \left(\dfrac{1-x}{1+x} \right)$

2.29. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}$

2.30. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$.

В задачах 31-40 найти сложную функцию, область её определения и вычислить значение функции.

2.31. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$, вычислить $f(g(1))$.

2.32. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, вычислить $f(g(2))$.

2.33. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{3}x + 4$, вычислить $f(g(4))$.

2.34. Найти $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, вычислить $f(g(-4))$ и $g(f(4))$.

2.35. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$, вычислить $f(g(3))$.

2.36. Найти $f(f(x))$, если $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, вычислить $f(f(4))$.

2.37. Найти $f(f(x))$, если $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, вычислить $f(f(2))$.

2.38. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$, вычислить $f(g(2))$.

2.39. Найти $f(g(x))$, если $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, вычислить $f(g(3))$.

2.40. Найти $f(f(x))$, если $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$, вычислить $f(g(e^{-1}))$.

Решение задачи 2.1.

Область определения функции $y = \ln(1 + x) + \sqrt{4 - x^2}$ находится следующим образом: логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому $1 + x > 0$, корень квадратный можно извлекать только из неотрицательных значений, отсюда $4 - x^2 \ge 0$. Следовательно, необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 + x > 0, \\ 4 - x^2 \ge 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является интервал $(-1;\infty)$, а второго - $[-2;2]$. Значит, область определения исходной функции – множество $x \in (-1;2]$.

<u>*Ответ.*</u> $x \in (-1;2]$.

Решение задачи 2.11.

Для определения области значений функции $y = x^2 + 2x + 3$ выделим полный квадрат относительно x: $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2$. Так как $(x+1)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то искомая область значений функции – интервал $[2;\infty)$.

<u>*Ответ.*</u> $y \in [2;\infty)$.

Решение задачи 2.21.

Область определения функции $y = x^4 - 10x^2 + 6$ - вся числовая ось и, следовательно, симметрична относительно точки $x = 0$. Далее, так как

$$y(-x) = (-x)^4 - 10(-x)^2 + 6 = x^4 - 10x^2 + 6 = y(x),$$

то функция четная.

<u>*Ответ.*</u> Четная.

Решение задачи 31.

Найдем $f(g(x)) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x + 2 + 2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x + 4} = \dfrac{2}{x+8}$.

Область определения этой функции – множество $x \in (-\infty; -8) \cup (-8; +\infty)$.

Вычислим $f(g(1)) = \dfrac{2}{9}$.

Ответ. $f(g(x)) = \dfrac{2}{x+8}$, $x \in (-\infty; -8) \cup (-8; +\infty)$, $f(g(1)) = \dfrac{2}{9}$.

Ответы

1.1. $10-i$. **1.2.** $-2-8i$. **1.3.** $14+8i$. **1.4.** $-1-11i$. **1.5.** $2i$. **1.6.** $13+84i$. **1.7.** $1{,}6-0{,}2i$. **1.8.** $1{,}5+3{,}5i$. **1.9.** $-31+22i$. **1.10.** $24{,}5-37{,}5i$.

2.1. $x\in(-1;2]$. **2.2.** $x\in[-1;0)\cup(0;1)$. **2.3.** $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.
2.4. $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$, **2.5.** $x\in(-\infty;2)\cup(5;\infty)$. **2.6.** $x\in[-3;-1]\cup[1;3]$.
2.7. $x\in[-5;-2]\cup[2;5]$.**2.8.** $x\in(1;4)\cup[7;\infty)$. **2.9.** $x\in[-2;1]$. **2.10.** $x\in[-1;\frac{5}{3}]$.

2.11. $y\in[2;\infty)$. **2.12.** $y\in[-3;\infty)$. **2.13.** $y\in[1;\infty)$. **2.14.** $y\in[1;\infty)$. **2.15.** $y\in[-2;4]$.

2.16. $y\in[-5;5]$. **2.17**. $y\in[10;\infty)$. **2.18.** $y\in[0;\infty)$. **2.19**. $y\in(2;\infty]$. **2.20.** $y\in[1;\infty)$.

2.21. Четная. **2.22**. Общего вида. **2.23.** Нечетная. **2.24.** Нечетная. **2.25**. Общего вида. **2.26.** Общего вида. **2.27**. Общего вида. **2.28.** Нечетная. **2.29.** Нечетная. **2.30.** Четная. **2.31.** $f(g(x))=\dfrac{2}{x+8}$, $x\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$, $f(g(1))=\dfrac{2}{9}$.

2.32. $f(g(x))=x$, $x\in(-\infty;+\infty)$, $f(g(1))=3$. **2.33.** $f(g(x))=\dfrac{x+9}{x+15}$, $x\in(-\infty;-15)\cup(-15;+\infty)$, $f(g(4))=\dfrac{13}{19}$. **2.34.** $f(g(x))=|x|$, $x\in(-\infty;+\infty)$, $f(g(-4))=4$, $g(f(x))=x$, $x\in[0;+\infty)$, $f(g(4))=4$. **2.35.** $f(g(x))=x$, $x\in(0;+\infty)$, $f(g(3))=3$. **2.36.** $f(f(x))=\dfrac{x}{2x+1}$, $x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2};+\infty)$, $f(g(4))=\dfrac{4}{9}$. **2.37.** $f(f(x))=\dfrac{x+1}{x+2}$, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$, $f(g(2))=\dfrac{3}{4}$.**2. 38.** $f(g(2))=\dfrac{(x+1)^2}{3x^2+3x+1}$, $x\in(-\infty;+\infty)$, $f(g(2))=\dfrac{9}{19}$. **2.39.** $f(g(x))=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$, $x\in(-\infty;+\infty)$, $f(g(4))=\dfrac{4}{13}$.

2.40. $f(f(x))=-\ln(-\ln x)$, $x\in(0;1)$, $f(g(e^{-1}))=0$.