Лекции 17-19.

Глава 7. Исследование функции

7.1. Возрастание и убывание функции

Теорема о монотонности функции. *Если* $f'(x)>0$ *на промежутке* $(a;b)$*, то на этом промежутке функция* $f(x)$ *возрастает. Если* $f'(x)<0$ *на промежутке* $(a;b)$*, то функция убывает.*

Пусть x_1 и x_2 — любые числа из промежутка $(a;b)$, и $x_1<x_2$. Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число c из промежутка $(x_1;x_2)$, для которого справедливо равенство

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

Так как $f'(x)>0$ для всех $x\in(a;b)$, то $f'(c)>0$, и из условия $x_1<x_2$ следует, что $f(x_2)-f(x_1)>0$. Таким образом, возрастание функции $f(x)$ на промежутке доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

►**Пример 1.** Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-2.$$

Данная функция определена для всех $x\in R$. Вычислим производную

$$f'(x)=3x^2-12x^2+9=3(x^2-4x^2+3)=3(x-1)(x-3)$$

и найдем её промежутки знакопостоянства. Для этого необходимо решить неравенство:

$$3(x-1)(x-3)>0.$$

Отсюда получаем: $f'(x)>0$ для всех $x\in(-\infty;1)\bigcup(3;+\infty)$ и, следовательно, функция на этом множестве возрастает и $f'(x)<0$ для $x\in(1;3)$, где функция убывает.

◄

Теорема о постоянстве функции. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на промежутке* $(a;b)$*. Тогда для того, чтобы функция* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $f'(x)=0$ *для всех* $x\in(a;b)$*.*

Доказательство.

Необходимость. Если $f(x)\equiv C$ на отрезке $[a;b]$, то $f'(x)=0$ в любой точке $(a;b)$.

Достаточность. Если $f'(x)=0$ для всех $x\in(a;b)$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c\in(a;x),$ для которой справедливо равенство

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a).$$

Отсюда, так как $f'(x)=0$, и получаем $f(x)=f(a)$ для всех $x\in(a;b)$.

Следствие. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и непрерывные на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемые на промежутке $(a;b)$, имеют равные производные на промежутке $(a;b)$, то они отличаются на постоянную.

Действительно, производная разности функций $(f(x)-g(x))'=0$, поэтому $f(x)-g(x)=C$.

7.2. Экстремумы функции

При изучении свойств функции область определения функции разбивают на такие промежутки, в которых производная либо имеет постоянный знак, либо равна нулю. Эти промежутки соответствуют монотонному изменению или постоянству функции. В точках соединения таких промежутков на графике функции возникают вершины или впадины локальных максимумов или минимумов. Примеры локальных экстремумов приведены на рисунках (рис. 1).

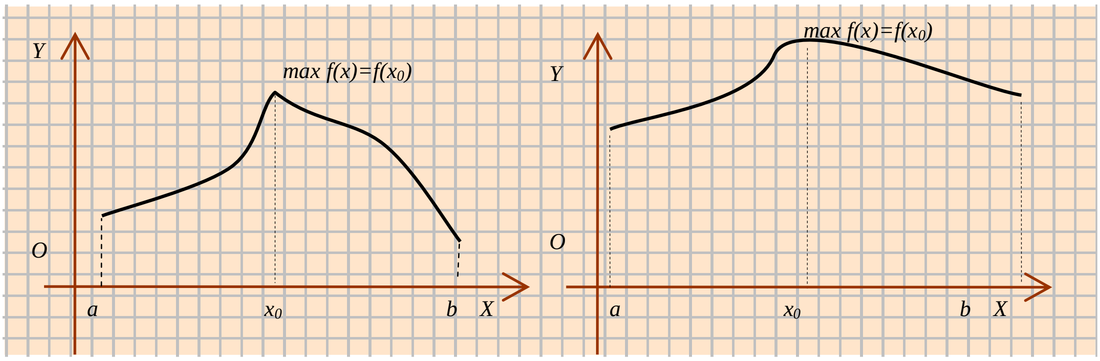

Рис. 1

Теорема. (Необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция* $f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0*, то её производная в этой точке равна нулю:* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 - точка максимума, тогда в окрестности этой точки выполнятся неравенство

$$f(x_0) > f(x_0+\Delta x),$$

где Δx - достаточно малое приращение аргумента. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$, если $\Delta x>0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$, если $\Delta x<0$.

По условию теоремы производная $f'(x_0)$ существует. Вычисляя $f'(x_0)$ по определению, получим $f'(x_0)\ge 0$, если $\Delta x<0$ и $f'(x_0)\le 0$ если $\Delta x<0$. Поэтому $f'(x_0)=0$. Подобным образом доказывается теорема, если x_0 - точка минимума.

Если $f'(x_0)=0$, это еще не значит, что в точке x_0 есть экстремум. Примером может служить функция $y=x^3$. В точке x=0 её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рис. 2.

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной, например, $y=|x|$ (см. рис. 3).

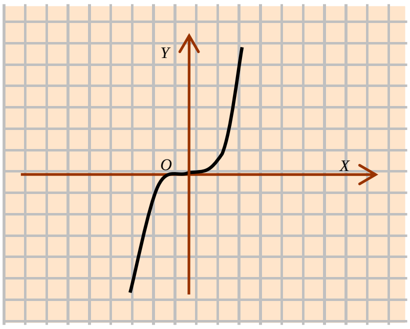

Рис. 2

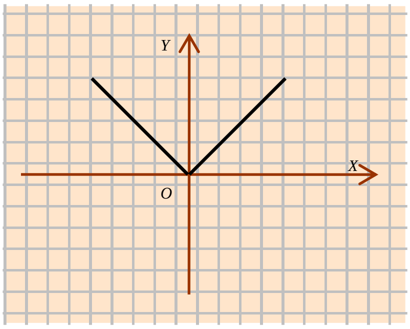

Рис. 3

Из необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума и тем более нельзя указать какой экстремум – максимум или минимум. Необходимое условие лишь утверждает, что точки экстремума следует искать среди точек, в которых производная равна нулю или не существует.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются *критическими*.

Для нахождения экстремумов функции применяют достаточное условие экстремума.

Теорема. (Первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в критической точке* x_0 *и дифференцируема в некоторой её окрестности . Тогда:*

1) *если* $f'(x)>0$ *для* $x<x_0$ *и* $f'(x)<0$ *для* $x>x_0$, *то точка* x_0 *– точка максимума функции* $f(x)$*;*
2) *если* $f'(x)<0$ *для* $x<x_0$ *и* $f'(x)>0$ *для* $x>x_0$, *то точка* x_0 *– точка минимума функции* $f(x)$.

Докажем первое утверждение теоремы.
Пусть $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ - окрестность точки x_0, для которой выполняются условия теоремы: $f'(x)>0$ для $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(x_0-\varepsilon;x_0)$ и убывает на $(x_0;x_0+\varepsilon)$. Поэтому значение $f(x_0)$ - наибольшее *значение* функции $f(x)$ на $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$. Следовательно, x_0 – точка максимума и $f(x_0)$ - максимум функции $f(x)$.
Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

►**Пример 2.** Найти экстремумы функции

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3.$$

Функция определена для всех значений аргумента. Найдем её производную:

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

Вычислим критические точки: $f'(x)=0$ при $x=-1$, $x=\dfrac{1}{5}$ и $x=1$.

Найдем промежутки знакопостоянства $f'(x)$, для этого решим неравенство

$$f'(x)>0 \text{ или } (x-1)(x+1)^2(5x-1)>0$$

методом интервалов.

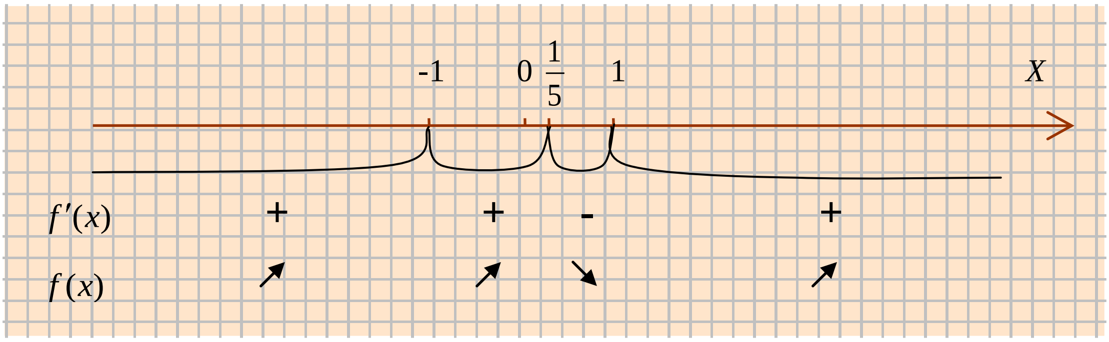

Рис. 4

Отсюда получаем: $f'(x)>0$ для всех $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\frac{1}{5})\cup(1;+\infty)$, и $f'(x)<0$ для $x\in(\frac{1}{5};1)$. Следовательно, в точке $x=-1$ экстремума нет, так как при переходе через неё производная не меняет свой знак; значение $x=\frac{1}{5}$ - точка максимума и $x=1$ - точка минимума.

Вычислим экстремумы функции: $f_{\max}=f(\frac{1}{5})=\frac{2^7 3^3}{5^5}=\frac{3456}{3125}\approx 1{,}106$ и $f_{\max}=f(1)=0$.

◄

►**Пример 3.** Найти экстремумы функции

$$f(x)=x\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Данная функция определена для всех $x\in(-\infty;+\infty)$. Найдем её производную:

$$f'(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}=\frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

Найдем критические точки: $f'(x)=0$ при $x=\frac{5}{6}$, и производная не существует при $x=2$.

Найдем промежутки знакопостоянства $f'(x)$. Для этого необходимо решить неравенство:

$$f'(x)>0 \text{ или } \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}>0.$$

Решая его получаем: $f'(x)>0$ для всех $x\in(-\infty;\frac{6}{5})\cup(2;+\infty)$, где функция возрастает, и $f'(x)<0$ для $x\in(\frac{6}{5};2)$, где функция убывает. Следовательно, точка $x=\frac{5}{6}$ - точка максимума, так как при переходе через неё слева направо производная меняет свой знак с плюса на минус; значение $x=2$ - точка минимума, производная меняет знак с минуса на плюс.

Вычислим экстремумы функции: $f_{\max}=f(\frac{6}{5})=\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\approx 1{,}034$ и $f_{\max}=f(2)=0$.

◄

Теорема. (Второе достаточное условие экстремума). *Пусть в точке* x_0 *первая производная* $f'(x_0)=0$*, а вторая производная существует и* $f''(x_0)\neq 0$*. Тогда, если* $f''(x_0)<0$*, то* x_0 *– точка максимума функции* $f(x)$*, если* $f''(x_0)>0$*, то* x_0 *– точка минимума.*

Пусть, для определенности, $f''(x_0)<0$. Тогда

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности точки x_0 справедливо неравенство

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

Отсюда, если $\Delta x<0$, то $f'(x_0+\Delta x)>0$, если $\Delta x>0$, то $f'(x_0+\Delta x)<0$. Таким образом, при переходе через точку x_0 слева направо первая производная меняет знак с плюса на минус и поэтому x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

►**Пример 4.** Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=x^3-27x.$$

Функция определена для всех $x\in(-\infty;+\infty)$. Найдем первую производную:

$$f'(x)=3x^2-27.$$

Стационарные точки: $x=-3$ и $x=3$.

Вторая производная $f''(x)=6x$.

Так как $f''(-3)=-18$ и $f''(3)=+18$, то $x=-3$ - точка локального максимума, $x=3$ - точка минимума.

Вычислим экстремумы функции: $f_{\max}=f(-3)=54$ и $f_{\min}=f(3)=-54$.

◄

►**Пример 5.**

В теории производства известно, что уровень наиболее экономичного производства определяется минимумом средних издержек. Отсюда следует правило: уровень экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек.

Действительно, пусть x - объем выпускаемой продукции, $S(x)$ - издержки производства, необходимые для выпуска продукции в объеме x, тогда средние издержки $AS(x)=\frac{S(x)}{x}$, т.е. издержки производства продукции, разделенные на количество продукции.

Минимум функции $y=AS(x)$ достигается в критической точке:

$$AS'(x)=\frac{S'(x)x-S(x)}{x^2}=0,\ S'(x)x-S(x)=0,\ S'(x)=\frac{S(x)}{x}.$$

Отсюда получаем требуемое равенство $MS(x)=AS(x)$.

◄

►**Пример 6.** Максимизация прибыли.

Пусть x - объем выпускаемой продукции, $S(x) = 100 + \dfrac{968000}{x^2}$ - издержки производства единицы продукции, $P(x) = 300 - 0{,}5x$ - стоимость единицы продукции.

Найти количество выпускаемой продукции, при котором прибыль максимальна.

Расходы на производство x единиц продукции равны

$$xS(x) = x\left(100 + \frac{968000}{x^2}\right)$$

и выручка от продажи –

$$xP(x) = x(300 - 0{,}5x).$$

Следовательно, прибыль определяется функцией

$$C(x) = xP(x) - xS(x) = x(300 - 0{,}5x) - x\left(100 + \frac{968000}{x^2}\right) = 200x - \frac{x^2}{2} - \frac{968000}{x},$$

максимум которой необходимо найти.

Найдем производную и вычислим критические точки $C(x)$.

$$C'(x) = 200 - x + \frac{968000}{x^2} = \frac{200x \; - x^3 + 968000}{x^2}.$$

Числитель производной разложим на множители:

$$C'(x) = \frac{200x^2 - x^3 + 968000}{x^2} = \frac{-x^3 + 220x^2 - 20x^2 + 968000}{x^2} =$$

$$= \frac{-x^2(x-220) - 20(x^2 - 48400)}{x^2} = \frac{-x^2(x-220) - 20(x-220)(x+220)}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-220)(-x^2 - 20x^2 - 44000)}{x^2}.$$

Квадратный трехчлен $-x^2 - 20x^2 - 4400$ принимает только отрицательные значения, значит, функция имеет две критические точки: $x = 0$ и $x = 220$. По экономическому смыслу рассматриваем только $x = 220$.

Так как $C'(x) > 0$ для $x \in (0;220)$ и $C'(x) < 0$ для $x \in (220;+\infty)$, то $x = 220$ - точка максимума и $C_{\max} = C(200) = 15160$.

◄

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, принимает наибольшее и наименьшее значения, т.е. *глобальные экстремумы*. Функция принимает эти значения или на концах отрезка $[a;b]$ или в критических точках.

Для вычисления наибольшего и наименьшего значений необходимо:

1) вычислить критические точки функции, принадлежащие интервалу $(a;b)$, пусть это будут $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$;
2) вычислить значения функции в критических точках и на концах интервала:
$$\{f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(a); f(b)\}.$$
3) среди вычисленных значений выбрать набольшее и наименьшее значения:
$$y_{\min} = \min\{f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(a); f(b)\},$$
$$y_{\max} = \max\{f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(a); f(b)\}.$$

►**Пример 7.** Вычислить функции набольшее и наименьшее значения
$$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$$
на отрезке $[0;4]$.

Функция определена для всех $x \geq 0$. Вычислим её производную
$$f'(x) = 2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 = 2x - 3\sqrt{x} + 1.$$

Найдем критические точки, для этого решим уравнение:
$$2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0,$$
$$t = \sqrt{x},\ 2t^2 - 3t + 1 = 0,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = 1,$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{2},\ x_1 = \frac{1}{4},\ \sqrt{x} = 1,\ x_2 = 1.$$

Вычислим значения функции в точках $x \in \{0; 0{,}25; 1; 4\}$:

x	0	0,25	1	4
y	-4	-3,94	-4	0

Следовательно, $y_{\min} = -4,\ y_{\max} = 0$.

◄

7.4. Выпуклость функции

Промежутки возрастания (убывания) и точки экстремума определяют свойства функции и её график. Кроме этого, имеются и другие особенности функции. Например, функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(a;b)$, но поведение функции и её график может быть разным (см. рис.). Так график функции 1 выпуклый вверх, функции 2 – изгибается, функции 3 - прямая, функции 4 – выпуклый вниз.

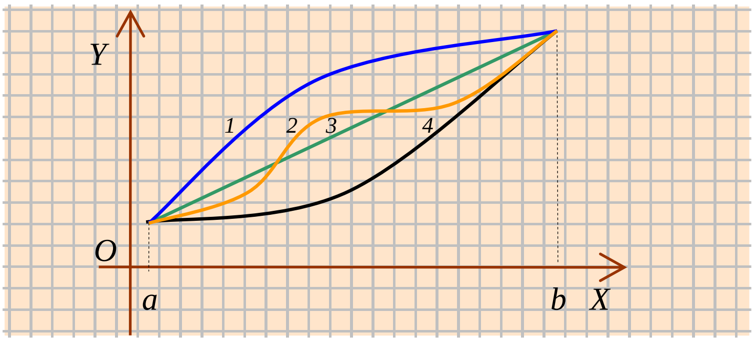

Рис. 5

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на множестве X , если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f(\frac{1}{2}(x_1)+(x_2)) \le \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Геометрическая интерпретация этого определения означает, что отрезок, соединяющий любые две точки графика функции, лежит целиком над графиком, а любая касательная к графику на этом множестве находится ниже графика (см. рис. 6).

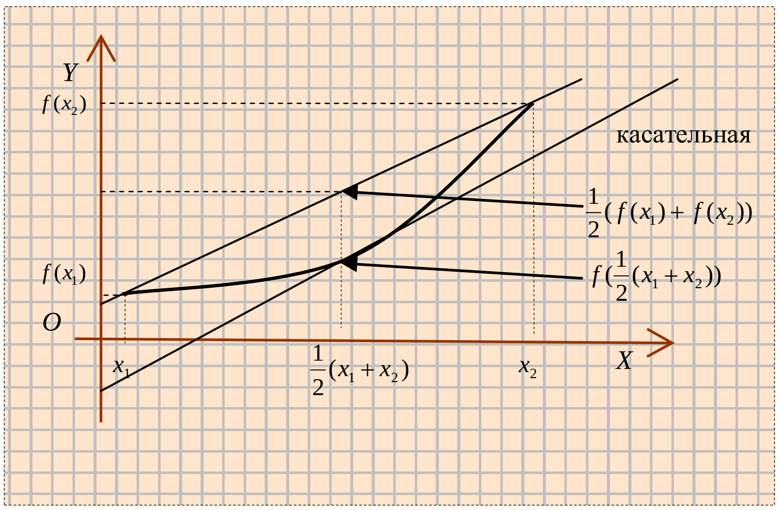

Рис. 6

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на множестве *X*, если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f(\frac{1}{2}(x_1)+(x_2)) \ge \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Геометрически это означает, что отрезок, соединяющий любые две точки графика функции, лежит целиком под графиком, а любая касательная к графику на этом множестве находится выше графика (см. рис. 7).

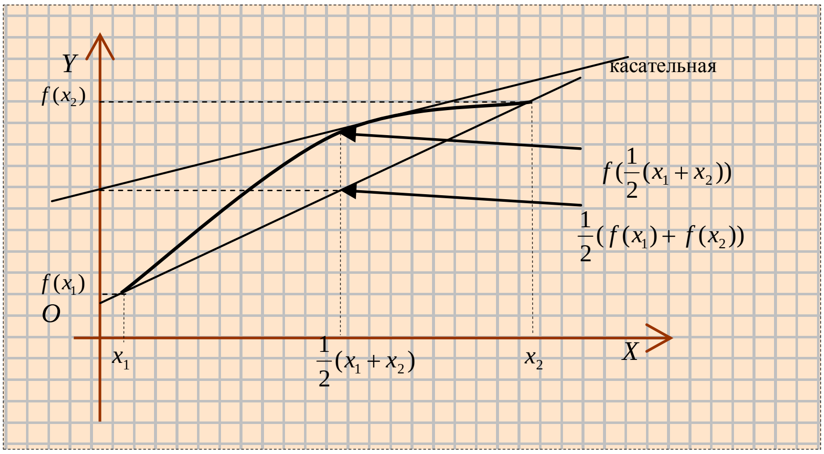

Рис. 7

Теорема. *Дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *выпукла вниз (вверх) на множестве* X *тогда и только тогда, когда её первая производная на этом множестве возрастает (убывает).*

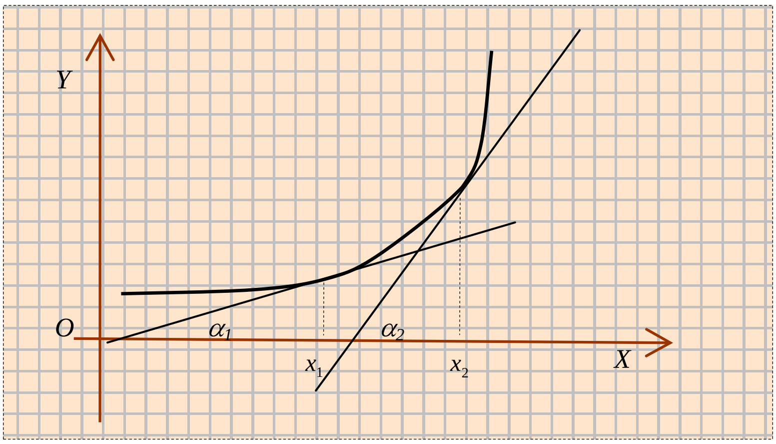

Рис. 8

Геометрический смысл теоремы состоит в следующем. Для функции выпуклой вниз её первая производная $f'(x)$ возрастает, значит, возрастает и угол наклона касательной к графику функции (см. рис. 8). Для функции выпуклой вверх её первая производная $f'(x)$ убывает, значит убывает и угол наклона касательной к графику функции (см. рис. 9).

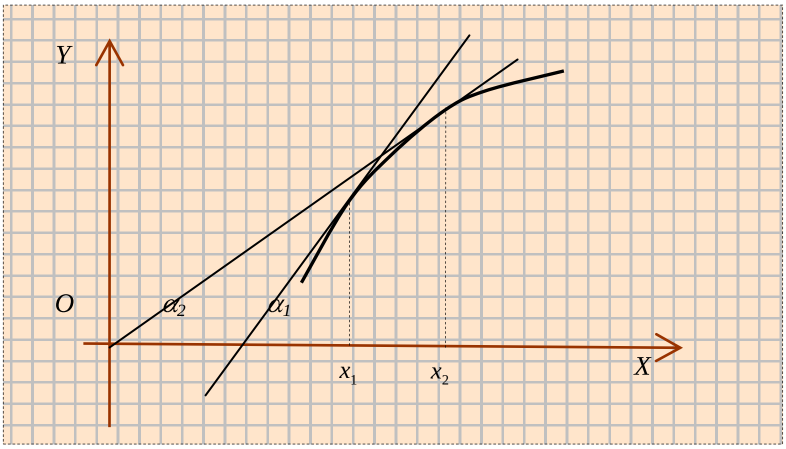

Рис. 9

Возрастание и убывание первой производной функции $f'(x)$ связано со знаком второй производной $f''(x)$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ во всех точках множества X имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то функция на этом множестве X выпукла вверх. Если же $f''(x) > 0$, функция выпукла вниз.*

Область оределения функции состоит из промежутков различной выпуклости. Точки области определения функции, в которых меняется направление выпуклости, называются *точками перегиба.*

Для отыскания точек перегиба можно применять предыдущие теоремы. Если функция имеет непрерывную вторую производную, то точками перегиба являются те точки области определения, в которых вторая производная меняет свой знак.

►**Пример 8.** Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции

$$f(x) = x(x-1)^3.$$

Функция определена для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдем последовательно первую производную

$$f'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$$

и вторую:

$$f''(x) = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 6(x-1)(2x-1).$$

Нули второй производной: $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$. Решив неравенство $f''(x) > 0$ или

$$(x-1)(2x-1) > 0,$$

получим, что вторая производная положительна на множестве $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$. Следовательно, на этом множестве функция выпукла вниз. Далее, $f''(x) < 0$ на промежутке $(\frac{1}{2}; 1)$, на котором функция выпукла вверх.

Отсюда следует, что точки перегиба $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$ (см. рис. 10).

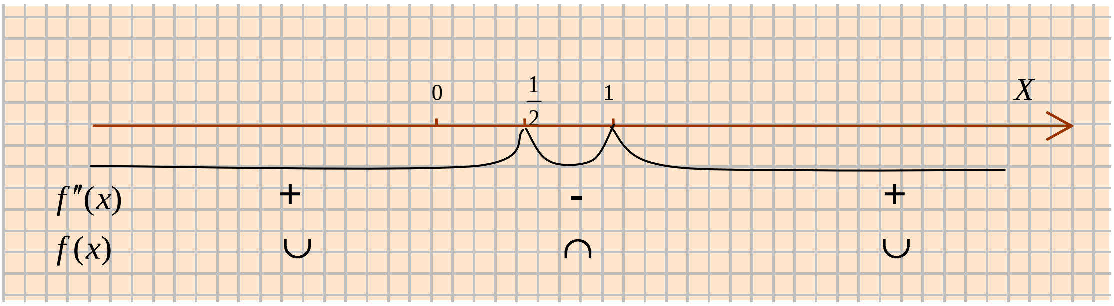

Рис. 10

◄

7.5. Экономический смысл выпуклости

Закон убывающей эффективности производства утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства прирост объема продукции, начиная с некоторого момента, замедляется.

Пусть функция

$$V(k) = \frac{V_{\lim}}{1 + e^{a-bk}}$$

задает объем продукции в зависимости от капитальных затрат k, где a и b - положительные числа, определяются условиями производства, $V_{\lim}$ - максимально возможный объем продукции.

Первая производная $V'(k)$ определяет скорость роста производства, т.е. производительность, вторая производная $V''(k)$ выражает скорость роста производительности, т.е. темп роста производства.

Если функция $V(k)$ выпукла вниз, то $V''(k) > 0$ и, следовательно, возрастает производительность $V'(k)$. Если $V(k)$ выпукла вверх, то $V''(k)$ отрицательна и темп роста производства снижается (производство замедляется).

Найдем первую и вторую производную функции $V(k)$:

$$V'(k) = \frac{bV_{\lim}e^{a-bk}}{\left(1 + e^{a-bk}\right)^2},$$

$$V''(k) = \frac{b^2V_{\lim}e^{a-bk}\left(e^{a-bk} - 1\right)}{\left(1 + e^{a-bk}\right)^2}.$$

Из равенства $V''(k) = 0$ находим $k = \frac{a}{b}$ - это точка перегиба, в этой точке выпуклость вниз меняется на выпуклость вверх.

Если $k < \frac{a}{b}$, то $V''(k)$ положительна и увеличение капитальных затрат приводит к интенсивному росту объему продукции, так как темп прироста продукции возрастает. При $k > \frac{a}{b}$ вторая производная $V''(k) < 0$, значит, темп прироста продукции падает и эффективность увеличения капитальных затрат снижается. График функции $V(k)$ см. на рис. 11.

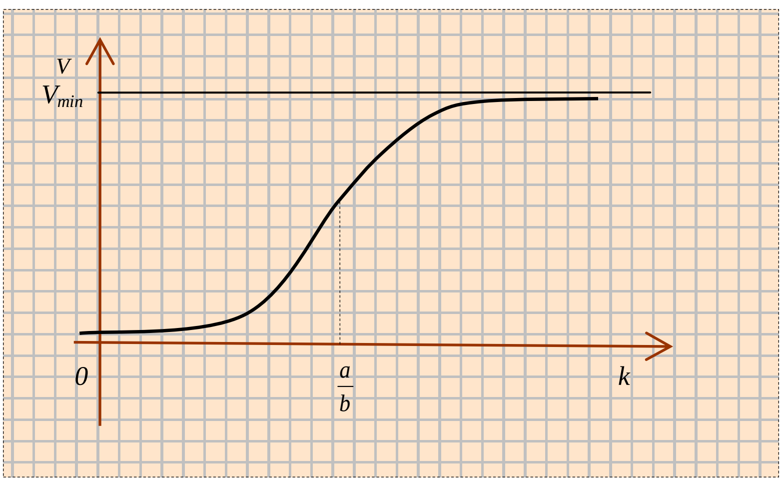

Рис. 11

Подобное прогнозирование позволяет определить тот объем капитальных вложений, сверх которого дополнительное увеличение затрат будет приводить все к меньшей отдаче при данных условиях производства. Выход из этой ситуации возможен, если изменить организацию производства, т.е. изменить параметры a, b, и $V_{\lim}$ так, чтобы дальнейшее увеличение капитальных вложений было эффективным.

7.6. Полное исследование функции и построение графика

Полное исследование функции $y = f(x)$ можно выполнять по следующей схеме:

- по виду функции и изменению её знака находят область определения, точки пересечения графика с координатными осями, промежутки знакопостоянства и анализируется поведение графика при бесконечном удалении точек графика от начала координат;
- по первой производной $f'(x)$ и изменению её знака определяются промежутки возрастания и убывания и локальные экстремумы функции;
- по второй производной $f''(x)$ и изменению её знака определяются промежутки выпуклости вверх или вниз и точки перегиба.

Рассмотрим, как анализируется поведение графика функции $y = f(x)$ при бесконечном удалении точек графика от начала координат. В этом случае решается задача асимптотического изменения функции при $x \to a \pm 0$ или при $x \to \pm\infty$. Для графика функции эта особенность проявляется в неограниченном приближении его к некоторой прямой (т.е. расстояние между точками графика функции и прямой неограниченно стремится к нулю), которая называется *асимптотой*.

Асимптоты бывают наклонные (рис. 12), горизонтальные (рис. 13) и вертикальные (рис. 14).

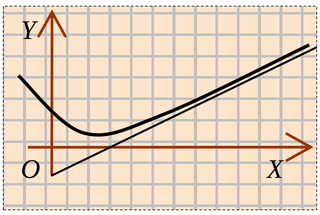

Рис. 12

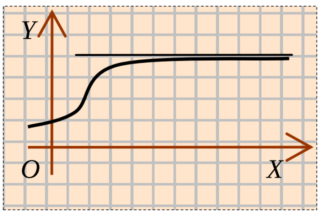

Рис. 13

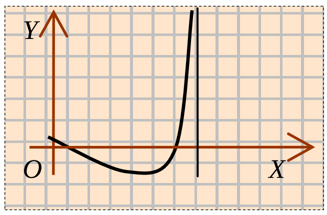

Рис. 14

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$, где коэффициенты k и b вычисляются следующим образом:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

Причем, если хотя бы один из пределов равен бесконечности или не существует, то наклонная асимптота не существует. Если $k = 0$, то получим горизонтальную асимптоту.

Вертикальные асимптоты связаны с существованием хотя бы одного бесконечного одностороннего предела в некоторой точке. Так, если

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty,$$

то прямая $x = a$ вертикальная асимптота.

►**Пример 8.** Найдем асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$.

Функция определена при всех $x \neq 2$. Вычислим односторонний предел

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2+0}\left(x + \frac{2}{x-2}\right) = +\infty.$$

Значит, прямая $x = 2$ - вертикальная асимптота.

Для определения наклонных асимптот вычислим сначала

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)} = 1.$$

Так как $k = 1$, то

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x}{x - 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x - 2} = 0.$$

Аналогичные результаты получим и при вычислении пределов при $x \to -\infty$.
Следовательно, на всей области определения наклонная асимптота $y = x$.
◄

►**Пример 9.** Найдем асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5}$.

Функция определена при всех $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;5) \cup (5;+\infty)$.

Вычислим предел функции в точке $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to -1+0} \frac{(x+1)(2x-9)}{(x+1)(x-5)} = \lim_{x\to -1+0} \frac{2x-9}{x-5} = -\frac{11}{6},$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to -1-0} \frac{2x-9}{x-5} = -\frac{11}{6}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5} = -\dfrac{11}{6}$ и прямая $x = -1$ не является асимптотой.

Рассмотрим точку $x = 5$.

$$\lim_{x\to 5+0} \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to 5+0} \frac{2x-9}{x-5} = \lim_{x\to 5+0} \frac{1}{x-5} = +\infty$$

Значит, прямая $x = 5$ - вертикальная асимптота.
Для определения наклонных асимптот вычислим

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 7x - 9}{x(x^2 - 4x - 5)} = 0.$$

Следовательно, $k = 0$ и далее

$$b = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 4x - 5} = 2.$$

Аналогичные результаты получим и при вычислении пределов при $x \to -\infty$. Значит,

прямая $y = 2$ - горизонтальная асимптота.
◄

►**Пример 10.** Выполнить полное исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область определения функции находится из условия $x^2 - 1 > 0$. Отсюда получаем $|x| > 1$ или $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Функция не периодична, четная. Поэтому исследование выполним на множестве $x \in (1;+\infty)$.

График функции не пересекает координатные оси.

Так как $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, то прямая $x = 1$ вертикальная асимптота и, имея в виду симметричность графика относительно оси ординат, вертикальной асимптотой является прямая $x = -1$.

Найдем наклонные асимптоты. Для этого вычислим

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

и

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0$$

Значит, прямая $y=x$ - наклонная асимптота и, учитывая четность функции, асимптотой является и прямая $y=-x$.

Найдем критические точки. Первая производная

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=\frac{2x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\frac{2xx^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$$

Критические точки: $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$.

Найдем промежутки возрастания и убывания, для этого решим неравенство

$$\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}>0 \text{ или } \frac{x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}(x+1)(x-1)}>0.$$

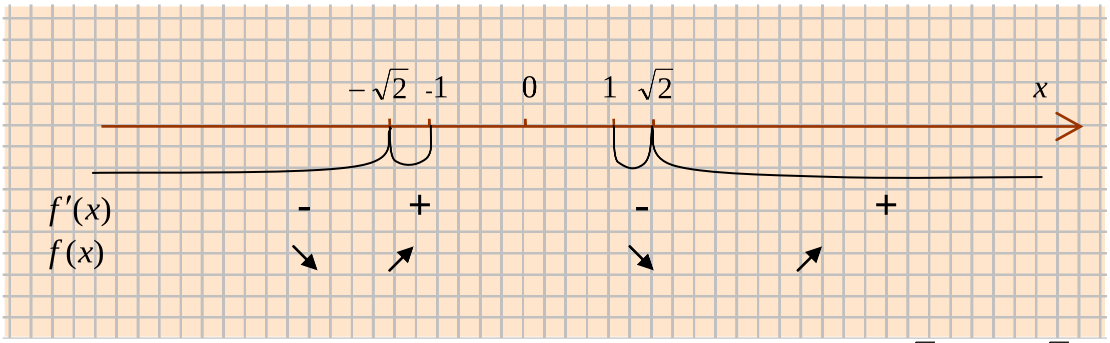

Рис. 15

) и

убывает на множестве $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(1;\sqrt{2})$. Значит, точки $x=\pm\sqrt{2}$ - точки локального минимума и $y_{\min}=f(\pm\sqrt{2})=2$.

Определим направление выпуклости графика функции. Вторая производная

$$f''(x)=\left(\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}\right)'=\frac{x^2+2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^5}}$$

положительна на всей области определения, следовательно график функции выпуклый вниз для всех допустимых значений аргумента (см. рис. 16)

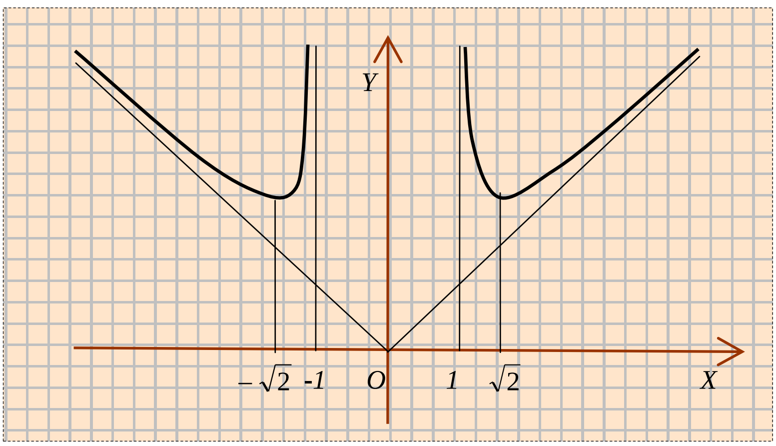

Рис. 16

◄

7.7. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 7.1 – 7.10 найти промежутки возрастания и убывания функции.

7.1. $f(x)=2x^3-9x^2-24x+6$. 7.2. $f(x)=2x^3+3x^2-36x-5$.

7.3. $f(x)=3x^4-16x^3-6x^2+48x$. 7.4. $f(x)=3x^4-12x^3-24x^2+144x$.

7.5. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$. 7.6. $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{2-x}$.

7.7. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$. 7.8. $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+x-2}$.

7.9. $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{x-2}$. 7.10. $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x+5}$.

В задачах 7.11 – 7.20 найти экстремумы функции.

7.11. $f(x)=2x^3-3x^2-36x+4$. 7.12. $f(x)=2x^3-9x^2-24x-5$.

7.13. $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+6$. 7.14. $f(x)=3x^4-16x^3-24x^2+192x+9$.

7.15. $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+3}{x-2}$. 7.16. $f(x)=\dfrac{2x^2+6x+2}{x+3}$.

7.17. $f(x)=\dfrac{4x^2-12x-6}{x-3}$. 7.18. $f(x)=\dfrac{2x^2+10x-5}{x+2}$.

7.19. $f(x)=(x+2)\sqrt[3]{x^2}$. 7.20. $f(x)=(x+2)\cdot\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

В задачах 7.11 – 7.20 найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

7.21. $f(x)=x^3+3x^2-9x+8$, $x\in[-4;3]$.

7.22. $f(x)=2x^3-9x^2+12x+11$, $x\in[0;3]$.

7.23. $f(x)=3x^4+4x^3-24x^2-48x+3$, $x\in[-1;4]$.

7.24. $f(x)=3x^4-4x^3-54x^2+108x+7$, $x\in[0;4]$.

7.25. $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$, $x\in[1;3]$.

7.26. $f(x)=\left|x^2-2x-8\right|$, $x\in[-1;4]$.

7.27. $f(x)=\dfrac{x^2+10x-5}{x+3}$, $x\in[-2;1]$.

7.28. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+2}{x+4}$, $x\in[0;2]$.

7.29. $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$, $x\in[-5;4]$.

7.30. $f(x)=(x+4)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $x\in[-7;2]$.

7.31. Функция $V(k)=\dfrac{100}{1+e^{5-0,2k}}$ задает объем продукции в зависимости от капитальных затрат k. Найти то значение k, при котором дальнейшее увеличение капитальных затрат не будет эффективным. (Найти те значения k, при которых дальнейшее увеличение капитальных затрат будет эффективным)

7.32. Построить график функции $V(k)=\dfrac{100}{1+e^{5-0,2k}}$.

7.33. Функция $V(k)=\dfrac{75}{1+e^{4-0,1k}}$ задает объем продукции в зависимости от капитальных затрат k. Найти то значение k, при котором дальнейшее увеличение капитальных затрат не будет эффективным.

7.34. Построить график функции $V(k)=\dfrac{75}{1+e^{4-0,1k}}$.

Ответы

7.1. Возрастает на $(-\infty;-1)\bigcup(4;\infty)$, убывает на $(-1;4)$. **7.2.** Возрастает на $(-\infty;-3)\bigcup(2;\infty)$, убывает на $(-3;2)$. **7.3.** Возрастает на $(-1;1)\bigcup(4;\infty)$, убывает на $(-\infty;-1)\bigcup(1;4)$. **7.4.** Возрастает на $(-2;2)\bigcup(3;\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)\bigcup(2;3)$. **7.5.** Возрастает на $(-\infty;1)\bigcup(1;\infty)$. **7.6.** Убывает на $(-\infty;2)\bigcup(2;\infty)$. **7.7.** Убывает на $(-\infty;-3)\bigcup(-3;2)\bigcup(2;+\infty)$. **7.8.** Возрастает на $(-\infty;2)\bigcup(2;-1)\bigcup(-1;+\infty)$. **7.9.** Возрастает на $(\frac{5}{4};2)\bigcup(2;\infty)$, убывает на $(-\infty;\frac{5}{4})$. **7.10.** Возрастает на $(-\frac{15}{4};\infty)$, убывает на $(-\infty;-5)\bigcup(-5;-\frac{15}{4})$.

7.11. $f_{max} = f(-2) = 48$, $f_{min} = f(3) = -77$.

7.12. $f_{max} = f(-1) = 8$, $f_{min} = f(4) = -117$.

7.13. $f_{max} = f(1) = 13$, $f_{min} = f(-1) = f(3) = -3$.

7.14. $f_{max} = f(2) = 317$, $f_{min} = f(-2) = -295$, $f_{min} = f(4) = 137$.

7.15. $f_{max} = f(1) = 0$, $f_{min} = f(3) = 12$.

7.16. $f_{max} = f(-4) = -10$, $f_{min} = f(-2) = -2$.

7.17. Нет экстремумов. **7.18.** Нет экстремумов.

7.19. $f_{max} = f(-\frac{4}{5}) = 1{,}034$, $f_{min} = f(0) = 0$.

7.20. $f_{max} = f(\frac{8}{5}) = 3{,}415$, $f_{min} = f(4) = 0$.

7.21. $f_{max} = f(-3) = f(3) = 19$, $f_{min} = f(1) = -13$.

7.22. $f_{max} = f(3) = 20$, $f_{min} = f(0) = 11$.

7.23. $f_{max} = f(4) = 451$, $f_{min} = f(2) = -109$.

7.24. $f_{max} = f(4) = 87$, $f_{min} = f(4) = 87$.

7.25. $f_{max} = f(1) = 2$, $f_{min} = f(3) = 0$.

7.26. $f_{max} = f(1) = 9$, $f_{min} = f(4) = 0$.

7.27. $f_{max} = f(1) = 1{,}5$, $f_{min} = f(-2) = -21$.

7.28. $f_{max} = f(2) = 3$, $f_{min} = f(0) = 0{,}5$.

7.29. $f_{max} = f(4) = 5$, $f_{min} = f(-5) = -16$.

7.30. $f_{max} = f(2) = 6$, $f_{min} = f(-7) = -12$.