Машинная графика
Computer Graphics

Лекция 15.

«Аппроксимация функций - II»

План лекции

- Фундаментальные сплайны
- Би-сплайны
- Рациональные сплайны
- NURBS
- Построение гладких поверхностей

Основные параметрические кубические кривые

C^1

формы Эрмита (Hermite)

кривые Безье (Bézier)

C^2

фундаментальные кубические сплайны

B-сплайны (би-сплайны от “basic”)

β-сплайны (бета-сплайны) – обобщение би-сплайнов, обеспечивают G^2

рациональные сплайны – отношение двух сплайновых функций.

NURBS – (Nonunifirm Rational B-splines) - неравномерные рациональные би-сплайны.

Разновидности сплайновых функций

В книге Херна и Бейкера «Компьютерная графика и стандарт OpenGL» описаны следующие разновидности сплайнов:

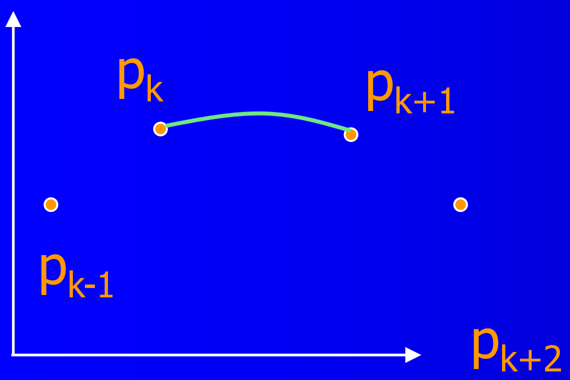
- естественные кубические сплайны (стр. 603),
- Эрмитова интерполяция (стр. 604),
- фундаментальные сплайны (стр. 607),
- сплайны Коханека-Бартелса (стр. 609),
- сплайновые кривые Безье (стр. 611),
- кубические кривые Безье (стр. 620),
- би-сплайны (стр. 624),
- равномерные периодические би-сплайны (стр. 626),
- кубические периодические би-сплайны (стр. 630),
- открытые равномерные би-сплайны (стр. 632),
- неравномерные би-сплайны (стр. 634),
- бета-сплайны (стр. 636),
- рациональные сплайны (стр. 638),
- NURBS (стр. 639).

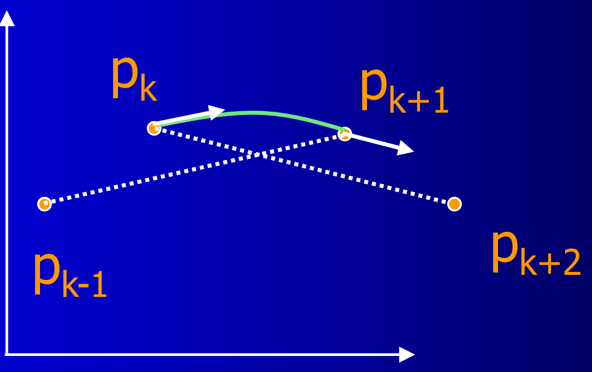
Фундаментальные сплайны

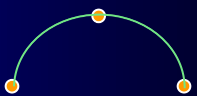
- Фундаментальные сплайны – это интерполирующие кусочно-кубические полиномы с заданными касательными в конечных точках (на границах участков кривой).
- В отличие от форм Эрмита значения касательных в конечных точках вводить отдельно не требуется.
- Для фундаментального сплайна касательная в контрольной точке вычисляется по координатам двух соседних контрольных точек (узлов интерполяции).
- Участок фунд. сплайна полностью задаётся положениями четырёх последовательных узлов интерполяции (контр. точек). Две средние точки являются конечными точками участка, две другие используются при расчёте касательных в конечных точках.
- Пусть: $P(0) = p_k$, $P(1) = p_{k+1}$, тогда одним из вариантов м.б. - $P'(0) = ½ (1\text{-}w)(p_{k+1}\text{-} p_{k\text{-}1})$ и $P'(1) = ½ (1\text{-}w)(p_{k+2}\text{-} p_k)$.

Фундаментальные сплайны

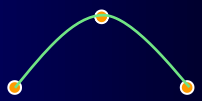
- Таким образом, касательные в точках p_k и p_{k+1} считаются пропорциональными хордам $p_{k-1}p_{k+1}$ и p_kp_{k+2}, а w называется параметром натяжения – он отвечает за то, насколько «тесно» сплайн соответствует входным контрольным точкам.







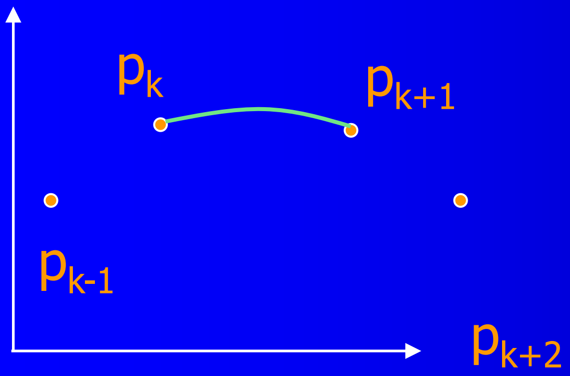
W<0 (Более «ослабленная» кривая)

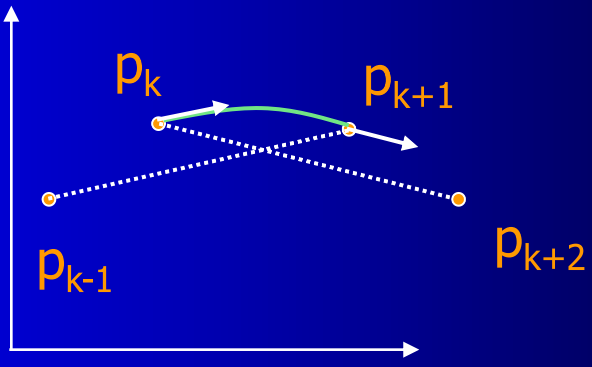


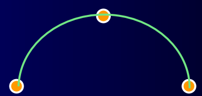
W>0 (Более «натянутая» кривая)

Фундаментальные сплайны

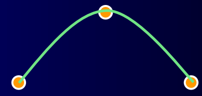
- При $w=0$, данный класс кривых называется сплайнами Катмалла-Рома (Catmull-Rom splines) или сплайнами Оувергаузера (Overhauser splines).







W<0 (Более «ослабленная» кривая)



W>0 (Более «натянутая» кривая)

Фундаментальные сплайны

Аналогично формам Эрмита и кривым Безье, можно выразить:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} p_{k-1} \\ p_k \\ p_{k+1} \\ p_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где s = (1-w)/2

$$Q(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1 + (-3t^3 + 3t^2)P_2 + t^3 P_3$$

$$Q(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(t-1)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P$$

Фундаментальные сплайны

$$M_C = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где s = (1-w)/2

В развёрнутом виде:

$$Q(t) = (-st^3 + 2st^2 - st)\,p_{k-1} + ((2-s)t^3 + 6(s-3)t^2 + 1)\,p_k +$$
$$+ ((s-2)t^3 + (3-2s)t^2 + st)\,p_{k+1} + (st^3 - st^2)\,p_{k+2}$$

или:

$$Q(t) = CAR_0(t)\,p_{k-1} + CAR_1(t)\,p_k + CAR_2(t)\,p_{k+1} + CAR_3(t)\,p_{k+2}$$

Фундаментальные сплайны

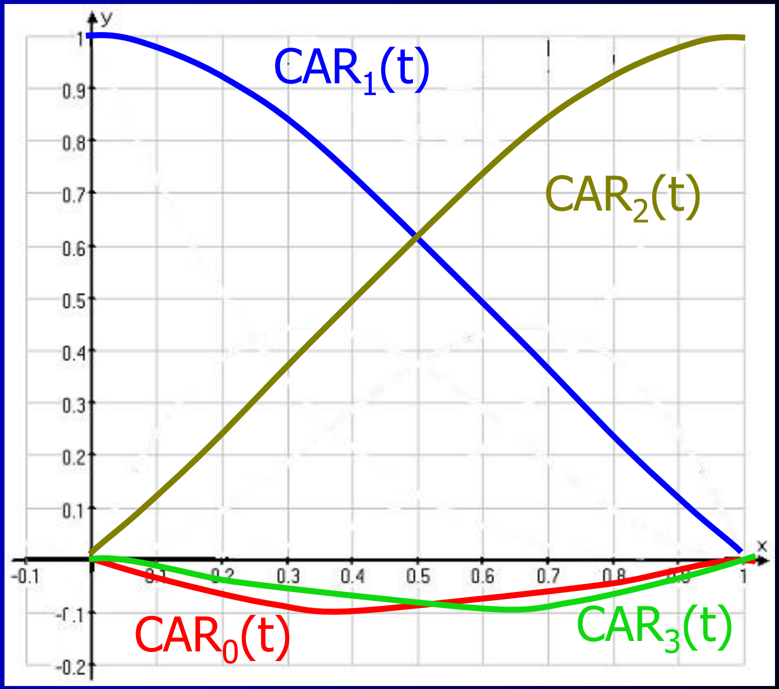
Стыковочные функции фундаментальных сплайнов:

$$CAR_0(t) = -st^3 + 2st^2 - st$$

$$CAR_1(t) = (2-s)t^3 + 6(s-3)t^2 + 1$$

$$CAR_2(t) = (s-2)t^3 + (3-2s)t^2 + st$$

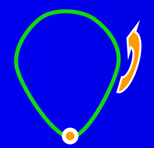
$$CAR_3(t) = st^3 - st^2$$



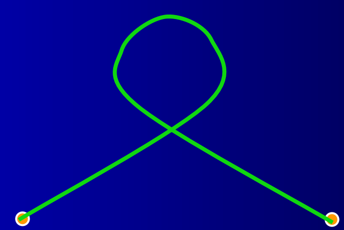
при w=0 (s = ½)

Фундаментальные сплайны

Примеры:



Петля фундаментального сплайна, полученная при совпадающих конечных точках кривой. Натяжение w=0.



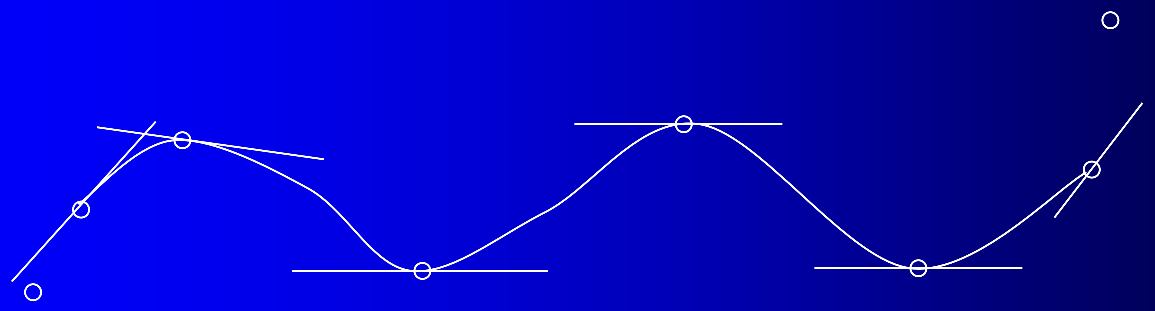
Самопересекающаяся кривая, порождённая близостью расположенных конечных точек. Натяжение w=0.

Example Interpolation Spline.

Catmull-Rom spline interpolates control points. The gradient at each control point is the vector between adjacent control points.

$$P^i(t) = T \cdot M_{CR} \cdot G_B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$



Би-сплайны

- Би-сплайны ближе к кривым Безье, чем к формам Эрмита.
- Би-сплайны аппроксимируют (!) набор контрольных точек.
- По сравнению с кривыми Безье следующие преимущества:
  - Степень полинома би-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определёнными ограничениями),
  - Би-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой.

- Недостаток – б**о**льшая сложность би-сплайнов по сравнению с кривыми Безье.

Общий вид:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(t), \quad t_{\min} \le t \le t_{\max}, \quad 2 \le d \le n+1$$

Би-сплайны

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(t), \quad t_{\min} \le t \le t_{\max}, \quad 2 \le d \le n+1$$

где: p_k – входной набор из n+1 контрольных точек.

Стыковочные функции би-сплайна $B_{k,d}$ – это полиномы степени d-1, где d- параметр степени.

Стыковочные функции для би-сплайнов определяются рекурсивными формулами Кокса-де-Бура (Cox-deBoor):

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1, \text{если} \;\; t_k \le t \le t_{k+1}, \\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$B_{k,d}(t)=\frac{(t-t_k)}{t_{k+d-1}-t_k} B_{k,d-1}(t)+\frac{(t_{k+d}-t)}{t_{k+d}-t_{k+1}} B_{k+1,d-1}(t)$$

Би-сплайны

Каждая стыковочная функция определена на своём подинтервале (общее число - d) общего диапазона t.

Конечная точка каждого подинтервала t_j называется узлом, а весь набор конечных точек выбранных подинтервалов - вектором.

Значения конечных точек подинтервалов можно выбирать любыми при условии, что $t_j \leq t_{j+1}$. После чего, значения t_{min} и t_{max} зависят от числа выбранных контрольных точек, значения параметра d и вектора узлов.

Прим. – Поскольку элементы вектора узлов можно выбрать так, что некоторые знаменатели в формулах Кокса-де Бура будут обращаться в 0, принимается что 0/0 будет равным 0.

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1, \textit{если} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \\ 0, \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{(t - t_k)}{t_{k+d-1} - t_k} B_{k,d-1}(t) + \frac{(t_{k+d} - t)}{t_{k+d} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}(t)$$

Рациональные сплайны

Рациональная функция представляет собой просто отношение двух полиномов. Соответственно, рациональный сплайн – это отношение двух сплайновых функций.

Например, рациональный би-сплайн можно описать радиус-вектором:

$$P(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k p_k B_{k,d}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_{k,d}(t)}$$

где p_k- набор из n+1 положений контрольных точек. Параметры w_k – весовые коэффициенты контрольных точек. Чем больше значение опре-делённого w_k, тем ближе кривая притягивается к контрольной точке p_k, взвешенной этим параметром. Когда всем весовым коэффициентам будут присвоены значения 1, получим стандартный би-сплайн, поскольку знаменатель в этом случае – просто набор стыков. функций (их сумма =1)

Рациональные сплайны

Преимущества:

Рациональные сплайны точно представляют кривые второго порядка (конические сечения), как окружности, эллипсы и т.д.

Нерациональные сплайны могут только аппроксимировать конические сечения.

Рациональные сплайны инвариантны относительно перспективной проекции. Это означает, что перспективное преобразование можно примерять к контрольным точкам рациональной кривой и получится правильная проекция кривой.

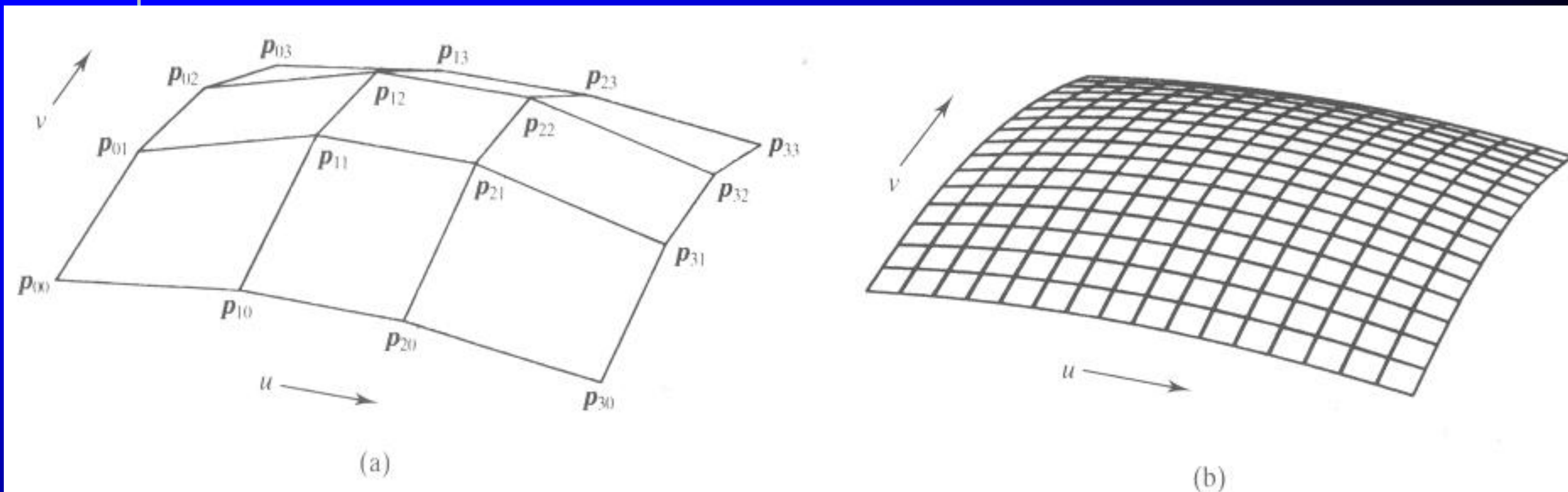
Не рациональные сплайны не инвариантны к перспективной проекции.

NURBS

Обобщение идеи рациональных сплайнов – рациональные би-сплайны с неравномерным представлением вектора узлов (именно для удобства перспективных преобразований). Данные сплайны называются NURBS:

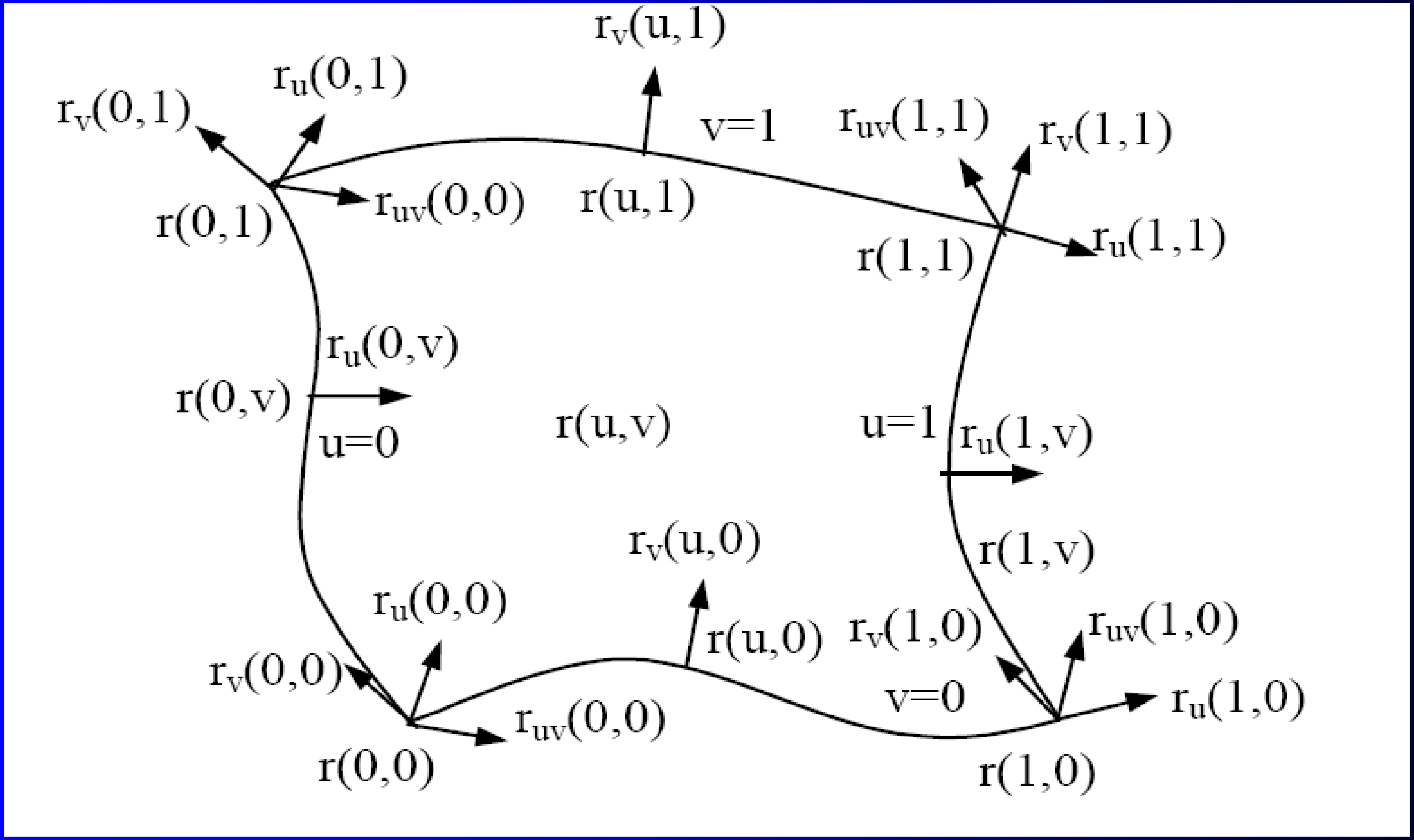
Non-uniform Rational B-Splines – неравномерные (неоднородные) рациональные би-сплайны.

Поверхности Безье

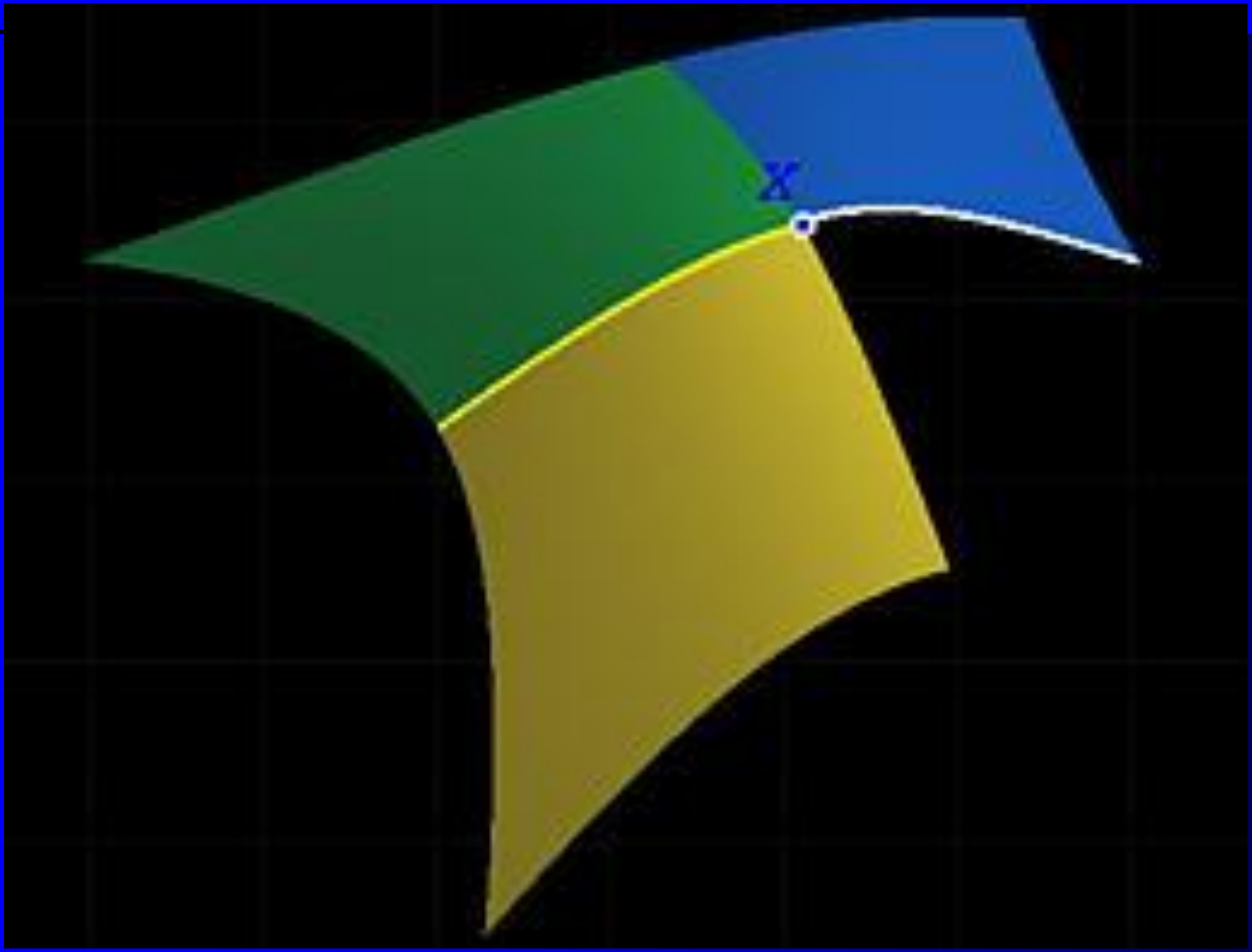


$$Q(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}p_{ij}b_i(u)b_j(v)$$

Непрерывность



Непрерывность



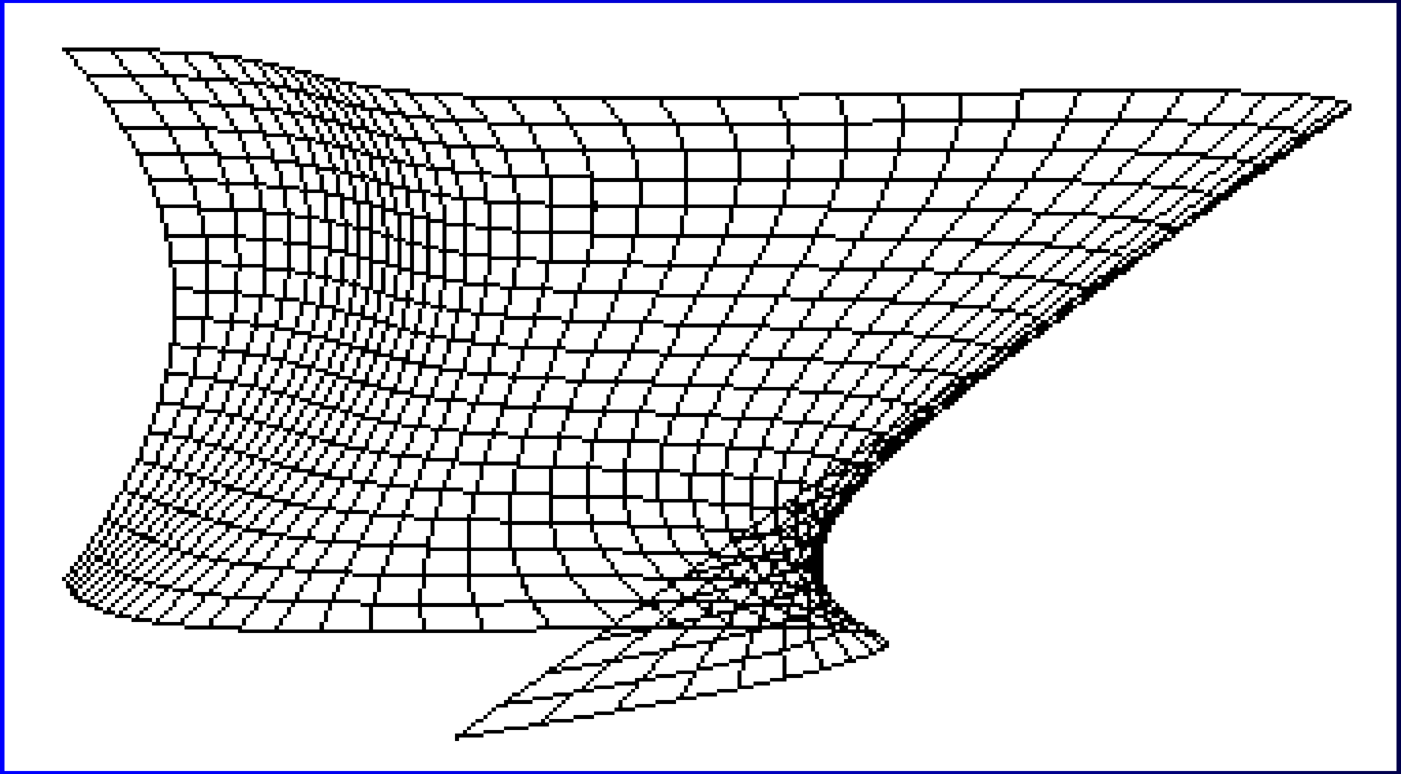
Surfaces – a simple extension

- Easy to generalise from cubic curves to bicubic surfaces.
- Surfaces defined by parametric equations of two variables, *s* a

$$0 \le s \le 1 \quad and \quad 0 \le t \le 1$$

- ie. a surface is approximated by a series of crossing parametric cubic curves
- Result is a polygon mesh and decreasing step size in *s* and *t* will give a mesh of small near-planar quadrilateral patches and more accuracy.

Example Bézier surface



Control of surface shape

- Control is now a 2D array of control points.
- The two parameter surface function, forming the tensor product with the blending functions

$$X(s,t) = \sum_{ij} f_i(s) f_j(t) q_{ij}$$

$$similarly\ \ for\, Y(s,t)\ and\ Z(s,t)$$

- Use appropriate blending functions for Bézier and B-Spline surface functions.
- Convex Hull property is preserved since bicubic is still a weighted sum (1).

Bézier example

- Matrix formulation is as follows:

$$x(s,t) = s^T.M_B.q_x.M_B^T.t$$

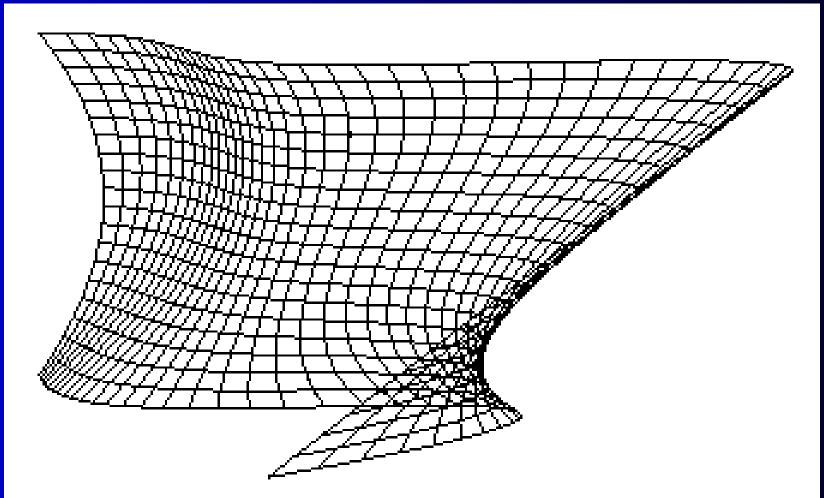
$$q_x \text{ is } 4\times 4 \text{ array of } x \text{ coords}$$

$$y(s,t) = s^T.M_B.q_y.M_B^T.t$$

$$q_y \text{ is } 4\times 4 \text{ array of } y \text{ coords}$$

$$z(s,t) = s^T.M_B.q_z.M_B^T.t$$

$$q_z \text{ is } 4\times 4 \text{ array of } z \text{ coords}$$



Substitute suitable values for *s* and *t* (20 in the above ex.)

B-Spline surfaces

- Break surface into 4-sided patches choosing suitable values for *s* and *t*.
- Points on any external edges must be multiple knots of multiplicity *k*.
- Lot more work than Bézier.
- There are other types of spline systems and NURBS modelling packages are available to make the work much easier.
- Use polygon packages for display, hidden-surface removal and rendering. (Bézier too)

Continuity of Bicubic patches.

- Hermite and Bézier patches
  - C_0 continuity by sharing 4 control points between patches.
  - C_1 continuity when both sets of control points either side of the edge are collinear with the edge.
- B-Spline patch.
  - C_2 continuity between patches.