Процессы «единичного корня».
Тесты «единичного корня»: ADF, PP, KPSS.

- Для проверки гипотезы об отнесении временного ряда к классу стационарных (относительно линейного тренда) или нестационарных процессов имеется ряд различных тестов. Однако все тесты обладают некоторыми недостатками или ограничениями
  - Низкая мощность: часто не отвергается исходная (нулевая) гипотеза, когда она в действительности не выполняется;
  - Невыполнение теоретических предпосылок для вспомогательных моделей в тестах: смещена статистика теста. Может даже отвергаться нулевая гипотеза, когда в действительности она верна. Пример: DF-тест.

- Для достоверности результатов при анализе рядов на принадлежность их к классу стационарных или нестационарных принято использовать не один, а несколько тестов и подкреплять полученные выводы графическими процедурами

- К графическим процедурам анализа временных рядов относят не только анализ непосредственно их графиков, но и анализ графиков автокорреляционных функций, т.е. коррелограмм

- Автокорреляционная функция (ACF или АКФ):

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\mathrm{cov}(k)}{\mathrm{var}} = \frac{\mathrm{cov}(y_t; y_{t-k})}{\mathrm{var}(y_t)}; |\rho_k| \le 1$$

- Частная автокорреляционная функция (PACF или ЧАКФ) определяется, как частная корреляция между значениями y_t и y_{t-k}, «очищенная» от влияния на них промежуточных переменных $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_{t-k+1}$ (ACF(1)=PACF(1))

	Стационарный ряд	**Нестационарный ряд**
ACF	Независимо от значений в первом лаге, коррелограмма ***быстро убывает*** после несколько первых значений	Значения в первом лаге, т.е. ACF(1), близки к единице, а затем коррелограмма ***медленно убывает*** по угасающей экспоненте (синусоиде)
PACF	Также ***быстро убывает*** после несколько первых значений	Значение в первом лаге ACF(1)=PACF(1) близко к единице, однако остальные значения коэффициентов корреляции статистически незначимы, т.е. значения функций на коррелограмме не выходят за пределы доверительного интервала

- Коррелограмма временного ряда, стационарного относительно тренда, может быть схожа с коррелограммой нестационарного временного ряда, однако значения функций ACF и PACF в первых лагах не будут близки к единице, будучи при этом статистически значимыми
- На коррелограмме временного ряда с сезонностью можно отметить значимые значения функций при лагах, соответствующих сезонам

Sample: 2000Q1 2010Q4
Included observations: 44

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.928	0.928
		2	0.890	0.206
		3	0.843	-0.031
		4	0.780	-0.163
		5	0.702	-0.216
		6	0.624	-0.106
		7	0.554	0.023
		8	0.463	-0.131
		9	0.381	-0.034
		10	0.303	-0.005
		11	0.231	0.019
		12	0.158	-0.007

Sample: 2000Q1 2010Q4
Included observations: 43

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	-0.413	-0.413
		2	0.055	-0.139
		3	0.299	0.329
		4	-0.157	0.145
		5	0.103	0.089
		6	-0.116	-0.226
		7	-0.015	-0.213
		8	0.043	-0.059
		9	-0.115	0.039
		10	-0.051	-0.051
		11	0.011	-0.067
		12	-0.039	-0.048

Sample: 2000Q1 2010Q4
Included observations: 43

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	-0.040	-0.040
		2	-0.044	-0.045
		3	-0.047	-0.051
		4	0.004	-0.003
		5	-0.000	-0.005
		6	-0.004	-0.007
		7	-0.008	-0.009
		8	-0.012	-0.013
		9	-0.016	-0.018
		10	-0.019	-0.023
		11	-0.023	-0.028
		12	-0.027	-0.033

Sample: 2000Q1 2010Q4
Included observations: 43

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.018	0.018
		2	-0.801	-0.801
		3	-0.112	-0.202
		4	0.754	0.309
		5	0.095	-0.162
		6	-0.709	-0.199
		7	-0.093	0.136
		8	0.662	0.018
		9	0.086	-0.132
		10	-0.622	0.025
		11	-0.085	0.045
		12	0.577	-0.077

- Рассмотренный ранее тест Дики–Фуллера (DF тест) рекомендовано использовать при отсутствии сезонных изменений и некоррелированности случайных отклонений тестируемой модели

- **ADF-тест (Расширенный тест Дики-Фуллера):**

Является модификацией теста Дики-Фуллера в тех случаях, когда предполагается автокоррелированность отклонений модели. В каждое уравнение теста вводятся авторегрессионные переменные (лаги) переменной разности Δy_t для коррекции возможной коррелированности случайных отклонений тестируемой модели

None $\Delta y_t = (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$

Const $\Delta y_t = \delta + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$

Trend $\Delta y_t = \delta + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \gamma t + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$

- В процедуру теста добавляется необходимость установления эмпирических путем порядка k для вводимых лагированных переменных и проверка статистической значимости коэффициента α_k переменной, соответствующей максимальному порядку, т.е. Δy_{t-k} (аналогично проверке статистической значимости переменной спецификации)

- Подбор порядка k можно осуществлять с помощью анализа соответствующих коррелограмм:
  - при проверке гипотезы для y_t (level) анализируется коррелограмма эндогенной переменной вспомогательной модели, т.е. Δy_t (1st difference)
  - при проверке гипотезы для Δy_t (1st difference) анализируется коррелограмма эндогенной переменной вспомогательной модели, т.е. Δy_t (2st difference) и т.д.

◆ PP-тест (тест Филлипса-Перрона):

Используется при нарушении гипотезы о некоррелированности и гомоскедастичности отклонений в тестируемой модели, т.е. случайные отклонения могут быть автокоррелированы, иметь различные дисперсии и не быть распределены согласно нормальному закону, что позволяет использовать тест для более широкого класса временных рядов. Так, PP-тест рекомендуется к использованию в случаях наличия ярко выраженной сезонности и структурных сдвигов.

None $\Delta y_t = (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$

Const $\Delta y_t = \delta + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$

Trend $\Delta y_t = \delta + (\rho - 1) \cdot y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t$

KPSS-тест (тест Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина):

Основное отличие от рассмотренных ранее тестов: в DF, ADF, PP тестах в качестве нулевой гипотезы тестируется принадлежность временного ряда к DS-рядам; критерий KPSS в качестве нулевой проверяет гипотезу о принадлежности ряда к TS-рядам

$$\{Ряд\} = \left\{ \begin{matrix} детерминированный \\ тренд \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} стохастический \\ тренд \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} стационарная \\ ошибка \end{matrix} \right\}$$

Спецификации KPSS-теста

Const $y_t = \delta + \beta t + \xi_t + \varepsilon_t$

Trend $y_t = \delta + \xi_t + \varepsilon_t$

$H_0 : \xi_t = const \Rightarrow y_t \text{ является } TS - \text{рядом}$

$H_1 : \xi_t \neq const \Rightarrow y_t \text{ не является } TS - \text{рядом}$

Схема согласования результатов тестирования временного ряда с помощью тестов на принадлежность к TS и DS рядам (на примере тестов ADF и KPSS)

KPSS / ADF	Нулевая гипотеза	Альтернативная гипотеза
	H0: TS не отвергается	**H1: TS отвергается**
H0: DS не отвергается	Исход 1	**Исход 2**
H1: DS отвергается	**Исход 3**	Исход 4

(1) если наблюдается исход 1, то это можно объяснить низкой мощностью обоих критериев;

(2) если наблюдается исход 2, то это говорит в пользу DS-гипотезы;

(3) если наблюдается исход 3, то это говорит в пользу TS-гипотезы;

(4) если наблюдается исход 4, то это может говорить о том, что процесс порождения данных (DGP) не описывается DS или TS моделями, а может быть, например, дробно-интегрированным процессом или процессом с нелинейным трендом.

Пример: DF vs. ADF