Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.5

Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой

И. А. Иванишко, В. Г. Кротов

Установлены условия компактности вложений некоторых классов функций на метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Эти классы определяются в терминах L^p-суммируемости максимальных функций, измеряющих локальную гладкость.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Пусть X — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. На протяжении всей работы мы будем систематически пользоваться следующими обозначениями

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

для шара с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ и

$$f_B = \fint_B f\,d\mu = \frac{1}{\mu B}\int_B f\,d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$. Кроме того, через $L^p(X)$, $p \geqslant 1$, обозначаем множество (классов эквивалентности) измеримых функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Мы предполагаем, что мера μ удовлетворяет условию удвоения: существует постоянная $c_\mu > 0$, такая что

$$\mu B(x,2r) \leqslant c_\mu \mu B(x,r), \quad x \in X, \quad r > 0. \tag{1.1}$$

В таком случае (X,d,μ) обычно называют пространством однородного типа [1].

Введем еще классы функциональных параметров. Для $a > 0$ обозначим через $\Omega(a)$ класс возрастающих функций $\eta : (0,1] \to (0,+\infty)$, для которых $\eta(+0) = 0$ и $\eta(r)r^{-a}$ убывает. Кроме этого, положим

$$\Omega = \bigcup_{a>0} \Omega(a). \tag{1.2}$$

Для $\eta \in \Omega$ определим максимальные операторы

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_{B(y,r)\ni x} \frac{1}{\eta(r)} \fint_{B(y,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y), \tag{1.3}$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B(y,r)$ радиуса $0 < r \leqslant 1$, содержащим точку $x \in X$. Значения функции понимаются как $\lim_{r\to+0} f_{B(x,r)}$, который существует почти всюду для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ (см. [2], с. 4).

Впервые такие максимальные функции появились в работах А.Кальдерона [3] и А.Кальдерона–Р.Скотта [4] в случае $X = \mathbb{R}^n$ для $\eta(r) = r^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. В [3, 4] рассматривались также более общие операторы, когда $\alpha > 0$ и в определении $\mathcal{N}_\eta$ вместо $f(x)$ вычитается некоторый многочлен, степень которого зависит от α. Систематическому изучению максимальных функций такого сорта на $\mathbb{R}^n$ посвящена монография [5].

Для любой функции $\eta \in \Omega(1)$ операторы $\mathcal{N}_\eta$ в случае $X = [0,1]^n$ впервые изучал В.И.Коляда [6, 7]. Мотивировкой для рассмотрения такого спектра характеристик η было расширение возможностей для более тонкой классификации функций по их локальной гладкости — как показывает следующее простое неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \eta(d(x,y))[\mathcal{N}_\eta f(x) + \mathcal{N}_\eta f(y)],$$

$\mathcal{N}_\eta f$ измеряет локальную гладкость функции f.

Отметим также, что в неявном виде максимальные операторы $\mathcal{N}_\eta$ встречались также в работе К.И.Осколкова [8] при изучении задачи П.Л.Ульянова о количественных оценках C-свойства Лузина для функций с заданной мажорантой L^p-модуля непрерывности.

Для $\eta \in \Omega$ рассмотрим классы

$$C^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C^p_\eta} = \|f\|_{L^p(X)} + \|\mathcal{N}_\eta f\|_{L^p(X)} < \infty\}. \tag{1.4}$$

Замечание 1. *В случае $\eta(r) = r$ и $X = \mathbb{R}^n$ класс $C^p_\eta(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Соболева $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ (А.Кальдерон, [3], см. также [5]).*

Если X — произвольное метрическое пространство и $\eta(r) = r$, то $C^p_\eta(X)$ совпадает с пространством Хайлаша–Соболева [9].

Для классов $C^p_\eta(X)$ справедлива следующая теорема вложения, в которой предполагается, что X ограничено.

Теорема 1. *Пусть, $1 \leqslant p < q < \infty$, $\sigma \in \Omega$,*

$$\eta(r) = \sigma(r) r^{\gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}. \tag{1.5}$$

Тогда[1]

$$\|\mathcal{N}_\sigma f\|_{L^q(X)} \leqslant c \|\mathcal{N}_\eta f\|_{L^p(X)} \tag{1.6}$$

В частности, $C^p_\eta(X) \subset C^q_\sigma(X)$.

[1]Здесь и всюду ниже через c мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, лишь от параметров p, q, η, σ и т.д., определяющих рассматриваемые пространства функций.

В теореме 1 участвует показатель $\gamma > 0$ из количественной формы условия удвоения (2.1), который выполняет роль "размерности" пространства X — если $X = \mathbb{R}^n$, то $\gamma = n$.

В случае $X = \mathbb{R}^n$ для степенных функций $\eta(r) = r^\alpha$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\sigma(r) = r^\beta$, $\beta = \alpha - n(1/p - 1/q)$ утверждение теоремы 1 доказано в работе [4].

Для $X = [0,1]^n$, $n \geqslant 1$, теорема 1 доказана В.И.Колядой [6, 7]. В [7] показано также, что условие (1.5) в теореме 1 является неулучшаемым. Общий вариант теоремы 1 доказал первый автор [10], используя метод работы [7][2].

Целью нашей работы является нахождение условий для компактности вложений (1.6) и $C^p_\eta(X) \subset L^q(X)$ — они будут рассмотрены в разделе 4. Кроме того, в разделе 3 будет показано, что с помощью функций $\mathcal{N}_\eta$, $\eta \in \Omega$, можно получить полную классификацию функций из $L^p(X)$.

Отметим, что формулировках теоремы 1 в работах [7, 10] вместо условия $\sigma \in \Omega$ (см. (1.2)) фигурировало $\eta, \sigma \in \Omega(1)$, но на самом деле в доказательствах использовалось лишь то, что $\sigma \in \Omega$.

Замечание 2. *Если $X = \mathbb{R}^n$ или $X = [0,1]^n$ с евклидовой метрикой и мерой Лебега, то в определении классов $C^p_\eta(X)$ естественно рассматривать только функции $\eta \in \Omega(1)$. Причиной для этого является то, что при условии*

$$\lim_{r \to +0} \frac{\eta(r)}{r} = 0. \tag{1.7}$$

любая функция $f \in C^p_\eta(X)$ будет эквивалентна постоянной.

Утверждение из замечания 2 можно доказать следующим образом. Пусть, например, $X = \mathbb{R}^n$ и функция $f \in C^p_\eta(\mathbb{R}^n)$. Так как при условии (1.7) класс $C^p_\eta(\mathbb{R}^n)$ содержится в обычном соболевском пространстве $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ (см. замечание 1), то f имеет обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \dots, n)$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение

$$\lim_{r \to +0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \left| f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)(y_k - x_k) \right| dy = 0$$

(см., например, [11], с. 176). С другой стороны, так как $f \in C^p_\eta(\mathbb{R}^n)$ и выполнено (1.7), то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \to +0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0.$$

Отсюда легко вывести, что $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому f эквивалентна постоянной (см. [12], с. 129).

Замечание 3. *В общем случае возможны ситуации, в которых классы $C^p_\eta(X)$ нетривиальны для некоторых функций η со свойством (1.7). Это следует из того, что обычные классы Гельдера*

$$H_\alpha(X) = \{f : |f(x) - f(y)| \leqslant c d^\alpha(x,y)\}$$

[2] На самом деле в [7, 10] было доказано более сильное утверждение $\|\mathcal{N}_\sigma f\|_{q,p} \leqslant c\|\mathcal{N}_\eta f\|_p$ с нормой в пространстве Лоренца в левой части.

могут быть нетривиальными для некоторых пространств X и $\alpha > 1$ — например, на кривой Коха это справедливо при $0 < \alpha \leqslant \ln 4/\ln 3$ [13].

Замечание 3 показывает, что в случае произвольного метрического пространства X классы $C^p_\eta(X)$ естественно рассматривать для любой функции $\eta \in \Omega$.

Замечание 4. *Теорема 1 справедлива также в случае $\sigma(r) \equiv 1$.*

2. Основные понятия и вспомогательные утверждения. На самом деле мы будем рассматривать более общую ситуацию, чем указано во Введении. Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d. Последнее означает, что функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, лишь неравенство треугольника заменяется условием: существует такая постоянная $a_d \geqslant 1$, что

$$d(x, y) \leqslant a_d[d(x, z) + d(z, y)]$$

для любых $x, y, z \in X$. Кроме того, семейство открытых шаров $\{B(x, r)\}$ образует базу окрестностей топологии X.

Далее используются обозначения $r(B)$ — радиус шара B и $\mathcal{B}(x, t)$ — множество всех шаров B радиуса $r(B) < t$, содержащих точку x. Пусть еще $\mathcal{B}(x, 1) = \mathcal{B}(x)$.

Как уже говорилось во Введении, мы предполагаем выполненным условие удвоения (1.1). Ему можно придать количественный вид — при условии (1.1) для некоторого $\gamma > 0$ выполнено неравенство

$$\mu B(x, s) \leqslant c \left(\frac{s}{r}\right)^\gamma \mu B(x, r), \quad x \in X,\ 0 < r \leqslant s, \tag{2.1}$$

которое получается итерацией неравенства (1.1).

Замечание 5. *Очевидно, что условие (2.1) тем сильнее, чем меньше γ. Однако, наименьшее γ, для которого выполнено (2.1), может не существовать — если*

$$\gamma_0 = \inf\{\gamma : \textit{выполнено (2.1)}\},$$

то (2.1) может не выполняться с $\gamma = \gamma_0$.

Введем обычную максимальную функцию Харди-Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \fint_B |f(y)| d\mu(y). \tag{2.2}$$

При $p > 1$ она удовлетворяет неравенству(см. [2], с. 11)

$$\|Mf\|_{L^p(X)} \leqslant c\|f\|_{L^p(X)}, \tag{2.3}$$

Ниже мы будем использовать следующее утверждение из работы [14].

Лемма 1. *Пусть μ — конечная борелевская мера на X со свойством*

$$h(r) = \inf_{x \in X} \mu B(x, r) > 0, \quad r > 0. \tag{2.4}$$

Тогда ограниченное множество $K \subset L^p(X)$, $p \geqslant 1$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in K} \int_X |f(x) - f_{B(x,r)}|^p \, d\mu = 0, \tag{2.5}$$

является предкомпактным в $L^p(X)$.

В [14] это утверждение формулировалось для случая метрического пространства, но приведенное там доказательство проходит в значительно более общей ситуации. В частности, оно подходит и для случая квазиметрики.

Наряду с (1.3) нам понадобятся другие максимальные функции

$$\mathcal{S}_\eta f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{\eta(r(B))} ⨍_B |f(y) - f_B| d\mu(y), \tag{2.6}$$

$$\mathcal{R}_\eta f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \frac{|f(x) - f_B|}{\eta(r(B))}. \tag{2.7}$$

Ясно, что для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ максимальная функция $\mathcal{S}_\eta f$ является полунепрерывной снизу, и, следовательно, измеримой. Для функций $\mathcal{N}_\eta f$ и $\mathcal{R}_\eta f$ измеримость получается немного сложнее (см. ниже лемму 2).

Операторы $\mathcal{N}_\eta$, $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{R}_\eta$ тесно связаны друг с другом — для них справедливы следующие очевидные поточечные неравенства

$$\mathcal{S}_\eta f(x) \leqslant 2\mathcal{N}_\eta f(x) \tag{2.8}$$

и

$$\mathcal{R}_\eta f(x) \leqslant \mathcal{N}_\eta f(x) \leqslant \mathcal{R}_\eta f(x) + M(\mathcal{R}_\eta f)(x), \tag{2.9}$$

где M — оператор Харди–Литтлвуда (2.2) и $\eta \in \Omega$.

Обратное к (2.8) неравенство

$$\mathcal{N}_\eta f(x) \leqslant c\mathcal{S}_\eta f(x) \tag{2.10}$$

доказано [15, 16] лишь для функций $\eta \in \Omega$, удовлетворяющих условию Бари

$$\int\limits_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds \leqslant c\eta(t), \quad t > 0. \tag{2.11}$$

Аналогично (1.4), но с $\mathcal{S}_\eta$ на месте $\mathcal{N}_\eta$, определим классы

$$S^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{S^p_\eta} = \|f\|_{L^p(X)} + \|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p(X)} < \infty\}. \tag{2.12}$$

В работе [16] для классов $C^p_\eta(X)$ и $S^p_\eta(X)$ получено много различных описаний (см. также [17] в степенном случае $\eta(t) = t^\alpha$).

Замечание 6. *В определениях максимальных операторов (1.3), (2.6) и (2.7) можно было бы брать точную верхнюю грань по всем шарам, содержащим точку x — не ограничивая их радиусы. Именно так они определялись, например, в* [16].

Легко видеть, что такое изменение приведет к тем же классам $C^p_\eta(X)$ и $S^p_\eta(X)$ (см. (1.4) и (2.12)) с эквивалентными нормами.

При условиях теоремы 1 справедливо также включение

$$S^q_\sigma(X) \subset S^p_\eta(X).$$

Это следует из неравенств (2.8) и (2.10), так как функция η из (1.5) удовлетворяет условию Бари (2.11). Отметим, что в работах второго автора [18, 19] рассматривались также весовые вложения такого типа.

3. Классификация функций из L^p.

Лемма 2. *Для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ максимальные функции (1.3) и (2.7) μ-измеримы.*

Доказательство. Достаточно доказать измеримость (2.7) на любом шаре $B_0 \subset X$. По теореме Н.Н.Лузина для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое измеримое множество $E_n \subset B_0$, что $\mu(B_0 \setminus E_n) < 2^{-n}$ и сужение $f|_{E_n}$ непрерывно на E_n.

Зададим $\lambda > 0$ и покажем, что множество

$$E_n^\lambda = \{\mathcal{R}_\eta f > \lambda\} \cap E_n$$

является измеримым. Для этого возьмем точку $x \in E_n^\lambda$, найдем шар $B \in \mathcal{B}(x)$ со свойством $|f(x) - f_B| > \lambda\eta(r(B))$, положим

$$\varepsilon = \frac{|f(x) - f_B|}{\eta(r(B))} - \lambda > 0$$

и определим $\delta > 0$ так, чтобы $B(x,\delta) \subset B$ и

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\eta(r(B))} < \varepsilon \quad \text{при} \quad y \in B(x,\delta) \cap E_n.$$

Тогда при $y \in B(x,\delta) \cap E_n$ выполнено неравенство

$$\frac{|f(y) - f_B|}{\eta(r(B))} \geqslant \frac{|f(x) - f_B|}{\eta(r(B))} - \frac{|f(x) - f(y)|}{\eta(r(B))} > (\lambda + \varepsilon) - \varepsilon = \lambda.$$

Следовательно, $B(x,\delta) \cap E_n \subset E_n^\lambda$. Это означает, что E_n^λ является пересечением E_n и некоторого открытого множества и потому измеримо. Осталось заметить, что если

$$E = B_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то $\mu E = 0$ и

$$\{\mathcal{R}_\eta f > \lambda\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^\lambda\right) \cup \left(E \cap \{\mathcal{R}_\eta f > \lambda\}\right),$$

причем все множества справа измеримы.

Это же рассуждение подходит и для максимальной функции (1.3).

Отметим, что доказательстве следующей леммы условие удвоения (1.1) не используется.

Теорема 2. *Пусть $p > 1$ и $f \in L^p(X)$. Тогда $\mathcal{N}_\eta f \in L^p(X)$ для некоторой функции $\eta \in \Omega$.*

Доказательство. Можно считать, что f не эквивалентна постоянной. Введем обозначение

$$g(x,t) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x,t)} \fint_B |f(x) - f(y)|\, d\mu(y), \quad 0 < t \leqslant \operatorname{diam} X.$$

Тогда выполнены условия

1) $0 \leqslant g(x,t_1) \leqslant g(x,t_2)$ при $0 < t_1 < t_2 \leqslant \operatorname{diam} X$,

2) $\lim_{t\to+0} g(x,t) = 0$ почти всюду,

3) $g \in L^p(X)$, где $g(x) = g(x, \operatorname{diam} \mathrm{X})$,

4) $g(x) > 0$ для всех $x \in X$.

Свойство 4) следует из того, что f не эквивалентна постоянной, 3) следует из (2.3), а 2) — из теоремы Лебега (см. [2], с. 12).

Возьмем последовательность $\lambda_n \downarrow 0$ и обозначим

$$A_n = \{x \in X : g(x) > \lambda_n\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

тогда $A_{n-1} \subset A_n$ и $\mu A_n < +\infty$. Ряд

$$\int_X g^p \, d\mu = \int_{A_1} g^p \, d\mu + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{A_n \setminus A_{n-1}} g^p \, d\mu$$

сходится, поэтому существует последовательность $a_n \downarrow 0$, для которой

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} \int_{A_n \setminus A_{n-1}} g^p \, d\mu < +\infty.$$

В силу абсолютной непрерывности для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем $\delta_n > 0$ так, чтобы

$$\int_E g^p \, d\mu < \frac{a_n^p}{2^n} \quad \text{при} \quad \mu E < \delta_n.$$

По теореме Д.Ф.Егорова существует такая последовательность измеримых множеств E_n, что

$$E_{n-1} \subset E_n \subset A_n, \quad \mu(A_n \setminus E_n) < \delta_{n+1}$$

и $g(x,t)/g(x)$ сходится к нулю при $t \to 0$ равномерно на E_n. Поэтому существует такая последовательность $t_n \downarrow 0$, что

$$g(x,t_n) \leqslant a_{n+1} g(x) \quad \text{при} \quad x \in E_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Определим теперь функцию ψ равенством $\psi(1) = a_0$ и

$$\psi(t) = \begin{cases} a_{n-1} \text{ при } t = t_n, \\ \\ \text{линейна и непрерывна на } [t_n, t_{n-1}] \end{cases} \qquad (n \geqslant 1)$$

$(a_0 = t_0 = 1)$. Тогда функция ψ возрастает, $\psi(+0) = 0$ и $\psi \in C(0,1]$.

В качестве искомой функции η можно взять выпуклую мажоранту равномерного модуля непрерывности для ψ (см. [20], с.153-154), тогда $\eta \in \Omega(1) \subset \Omega$ и $\eta(t) \geqslant \psi(t)$.

Докажем, что

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0. \tag{3.1}$$

В самом деле, ясно, что[3]

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(A_k^c \cup (A_k \setminus E_k)\right).$$

[3]Всюду в работе $E^c = X \setminus E$ — дополнение множества $E \subset X$.

Если $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k^c \cup (A_k \setminus E_k))$, то для каждого k либо $x \in A_k^c$, либо $x \in A_k \setminus E_k$. Но $x \in A_k^c$ для бесконечно многих k невозможно (иначе $g(x) \leqslant \lambda_k$ для таких k и $g(x)=0$ — противоречие), поэтому $x \in A_k \setminus E_k$, начиная с некоторого k. Следовательно,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(A_k \setminus E_k).$$

Но так как для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $m \geqslant n$

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}(A_k \setminus E_k)\right) \leqslant \mu(A_m \setminus E_m) \leqslant \delta_m \to 0 \quad (m \to \infty),$$

то

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(A_k \setminus E_k)\right) = 0$$

и (3.1) доказано.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E_n$, тогда $x \in E_k$ при всех $k \geqslant n$. Оценим

$$\sup_{0<t\leqslant 1}\frac{g(x,t)}{\eta(t)} = \sup_{k\geqslant 0}\sup_{t\in[t_{k+1},t_k]}\frac{g(x,t)}{\eta(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant k<n}\frac{g(x,t_k)}{a_k},\ \sup_{k\geqslant n}\frac{g(x,t_k)}{a_k}\right\} \leqslant \frac{g(x)}{a_n},$$

так как $g(x,t_k) \leqslant a_{k+1}g(x)$ при $k \geqslant n$. Итак,

$$h(x) = \sup_{0<t\leqslant 1}\frac{g(x,t)}{\eta(t)} \leqslant \frac{g(x)}{a_n} \quad \text{при} \quad x \in E_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Используя (3.1), последнее неравенство и очевидное включение

$$E_n \setminus E_{n-1} \subset (E_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus E_{n-1}),$$

оценим

$$\int_X h^p\,d\mu \leqslant \frac{1}{a_1^p}\int_{E_1} g^p\,d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}\int_{E_n\setminus E_{n-1}} g^p\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a_1^p}\int_{E_1} g^p\,d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}\left(\int_{A_n\setminus A_{n-1}} g^p\,d\mu + \int_{A_{n-1}\setminus E_{n-1}} g^p\,d\mu\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a_1^p}\int_{E_1} g^p\,d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}\left(\int_{A_n\setminus A_{n-1}} g^p\,d\mu + \frac{a_n^p}{2^n}\right) < +\infty$$

и мы получаем утверждение теоремы.

В случае $X=[0,1]^n$ утверждение теоремы 2 можно вывести из результатов работы [7], относящихся к связи $\mathcal{N}_\eta f$ и L^p-модуля непрерывности функции f.

Теорема 2 показывает, что

$$L^p(X) = \bigcup_{\eta\in\Omega} C_\eta^p(X)$$

и, таким образом, мы получаем полную классификацию всех функций из $L^p(X)$ по их локальной гладкости с помощью максимальных функций $\mathcal{N}_\eta$ или $\mathcal{R}_\eta$.

Отметим, что при $p=1$ теорема 2 теряет силу. Действительно, пусть X ограничено и $\operatorname{diam} X = 1$, тогда при $\eta \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\mathcal{N}_\eta f(x) \geqslant \frac{Mf(x) - |f(x)|}{\eta(1)},$$

а функция Харди–Литтлвуда Mf не обязана быть суммируемой для $f \in L^1(X)$ (см., например, [21], с. 53).

Для каждой функции $f \in L^1(X)$ мы можем утверждать лишь, что существует функция $\eta \in \Omega$, для которой

$$\mu\{\mathcal{N}_\eta f > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(X)}, \quad \lambda > 1.$$

4. Компактность вложения $C^p_\eta \subset C^q_\sigma$. В этом разделе и всюду далее в работе предполагаем, что пространство X является ограниченным (для простоты будем считать, что $\operatorname{diam} X = 1$ и $\mu X = 1$). В таком случае из условия (2.1) вытекает, что

$$\mu B(x,r) \geqslant cr^\gamma, \quad x \in X, \quad 0 < r \leqslant 1. \tag{4.1}$$

В самом деле, для любого $x \in X$

$$\mu X = \mu B(x,1) \leqslant c\left(\frac{1}{r}\right)^\gamma \mu B(x,r).$$

Поэтому условие (2.4) леммы 1 выполнено. Этим обосновано использование леммы 1 ниже в доказательстве теоремы 3.

Кроме того, нам понадобится следующее простое неравенство

$$\|f\|_{L^p(X)} \leqslant \sigma(1)\|\mathcal{R}_\sigma f\|_{L^p(X)} + \|f\|_{L^1(X)}. \tag{4.2}$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma \in \Omega$, η определяется равенством (1.5). Тогда если $\sigma_0 \in \Omega$ такова, что*

$$\lim_{r\to+0} \frac{\sigma(r)}{\sigma_0(r)} = 0, \tag{4.3}$$

то вложения $C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$ и $S^p_\eta(X) \subset S^q_{\sigma_0}(X)$ компактны.

Доказательство. Пусть K — ограниченное множество в $C^p_\eta(X)$ и

$$A(K) = \sup_{f\in K}\big(\|f\|_{L^p(X)} + \|\mathcal{N}_\eta f\|_{L^p(X)}\big) < +\infty. \tag{4.4}$$

Докажем, что K является вполне ограниченным в $C^q_{\sigma_0}(X)$ — зададим $\varepsilon > 0$ и построим для него конечную ε-сеть.

Введем обозначение

$$\eta_0(r) = \sigma_0(r) r^{\gamma\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{4.5}$$

тогда в силу (4.3)

$$\omega(t) = \sup_{0<r\leqslant t}\frac{\eta(r)}{\eta_0(r)} = \sup_{0<r\leqslant t}\frac{\sigma(r)}{\sigma_0(r)} \to 0, \quad t \to +0. \tag{4.6}$$

Выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы

$$\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{A(K)}, \tag{4.7}$$

В частности, из (4.4) следует, что K ограничено в $L^p(X)$ и в силу левого неравенства (2.9) выполнено (2.5) . По лемме 1 множество K является вполне ограниченным и для него существует конечная $\varepsilon\eta_0(\delta)$-сеть $\{f_i\}_{i=1}^m$ в $L^p(X)$, причем можно считать, что $f_i \in K$ $(i = 1, \dots, m)$.

Покажем, что$\{f_i\}_{i=1}^m$ является $c\varepsilon$-сетью для K в $C^q_{\sigma_0}(X)$. Пусть $f \in K$ и $1 \leqslant i \leqslant m$ выбрано так, что

$$\|h\|_{L^p(X)} < \eta_0(\delta)\varepsilon, \quad h = f - f_i. \tag{4.8}$$

Докажем, что

$$\|h\|_{C^q_{\sigma_0}(X)} < c\varepsilon. \tag{4.9}$$

Сначала отметим, что так как $f, f_i \in K$, то

$$\|\mathcal{N}_\eta h\|_{L^p(X)} \leqslant 2A(K). \tag{4.10}$$

(см. (4.4)). Далее, для почти всех $x \in X$

$$\sup_{B\in\mathcal{B},\, r(B)\geqslant\delta} \frac{1}{\eta_0(r(B))} \fint_B |h(x) - h(y)|\, d\mu(y) \leqslant \frac{2Mh(x)}{\eta_0(\delta)}$$

так как $|h(x)| \leqslant Mh(x)$ почти всюду на X. Кроме того (см. (4.6))

$$\sup_{B\in\mathcal{B}(x,\delta)} \frac{1}{\eta_0(r(B))} \fint_B |h(x) - h(y)|\, d\mu = \sup_{B\in\mathcal{B}(x,\delta)} \frac{\eta(r(B))}{\eta_0(r(B))} \cdot \frac{1}{\eta(r(B))} \fint_B |h(x) - h(y)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta) \sup_{B\in\mathcal{B}(x,\delta)} \frac{1}{\eta(r(B))} \fint_B |h(x) - h(y)|\, d\mu(y) \leqslant \omega(\delta)\mathcal{N}_\eta h(x).$$

Из последних двух неравенств вытекает оценка

$$\|\mathcal{N}_{\eta_0} h\|_{L^p(X)} \leqslant \frac{2\|Mh\|_{L^p(X)}}{\eta_0(\delta)} + \omega(\delta)\|\mathcal{N}_\eta h\|_{L^p(X)}. \tag{4.11}$$

Кроме того, из (4.2), (2.9) и неравенства (1.6) из теоремы 1 (примененной к функциям σ_0 и η_0 из (4.5)), получаем $\|h\|_{C^q_{\sigma_0}(X)} \leqslant c\|h\|_{C^p_{\eta_0}(X)}$.

Отсюда и из (4.11), (4.7), (4.8) и (4.10), вытекает неравенство

$$\|h\|_{C^q_{\sigma_0}(X)} \leqslant c\left(\frac{\|h\|_{L^p(X)}}{\eta_0(\delta)} + \omega(\delta)\|\mathcal{N}_\eta h\|_{L^p(X)}\right) < c\varepsilon \tag{4.12}$$

и (4.9) доказано.

Компактность вложения $S^p_\eta(X) \subset S^q_{\sigma_0}(X)$ следует из уже доказанного и из неравенств (2.8) и (2.10), так как функция η из (1.5) удовлетворяет условию Бари (2.11). Теорема 3 доказана.

Далее мы установим, что условие (4.3) является необходимым для компактности рассматриваемых вложений во многих ситуациях, но это можно сделать лишь при некоторых дополнительных предположениях относительно параметров.

Прежде всего потребуем более сильного ограничения на связь меры μ и квазиметрики d. Именно, пусть

$$c^{-1}r^{\gamma} \leqslant \mu B(x,r) \leqslant cr^{\gamma}, \quad x \in X,\ 0 < r \leqslant 1. \tag{4.13}$$

В таком случае μ часто называют γ-регулярной, а (X,d,μ) — γ-множеством [22]. Неравенство (4.1) показывает, что по сравнению с условием удвоения (2.1) новым в (4.13) является лишь правое неравенство.

Кроме того, вместо $\eta \in \Omega$ будем требовать $\eta \in \Omega(1)$. Наконец, предположим, что d является метрикой.

Теорема 4. *Пусть $1 < p < q < \infty$, мера μ удовлетворяет условию (4.13), $\eta \in \Omega(1)$, σ определяется равенством (1.5). Тогда если $\sigma_0 \in \Omega$, то из компактности вложения $C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$ следует (4.3).*

Доказательство. Покажем, что если

$$\limsup_{r\to+0} \frac{\sigma(r)}{\sigma_0(r)} > 0, \tag{4.14}$$

то существует ограниченная последовательность $\{f_k\} \subset C^p_\eta(X)$, из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C^q_{\sigma_0}(X)$. При этом мы будем использовать конструкцию из доказательства предложения 3.2 в [7].

В силу (1.5) и (4.14) найдется такая последовательность положительных чисел $\rho_k > 0$, что

$$\frac{\eta(\rho_k)}{\sigma_0(\rho_k)\rho_k^{\gamma(1/p-1/q)}} \geqslant c > 0.$$

Далее, используя условие регулярности (4.13), легко построить последовательность непересекающихся шаров $B(x_k,t_k) \subset X$, $t_k \downarrow 0$. Для $k = 1, 2\ldots$ положим $r_k = \rho_j$, где $j = \min\{i : t_k \geqslant 2\rho_i\}$, тогда

$$B(x_i, 2r_i) \cap B(x_k, 2r_k) = \varnothing \quad (i \neq k)$$

и справедливы неравенства

$$\frac{\eta(r_k)}{\sigma_0(r_k)r_k^{\gamma(1/p-1/q)}} \geqslant c > 0. \tag{4.15}$$

Пусть $B_k \equiv B(x_k, r_k)$ и

$$f_k(x) = H_k\left(1 - \frac{d(x,x_k)}{r_k}\right)\chi_{B_k}(x), \quad H_k = \eta(r_k)r_k^{-\frac{\gamma}{p}}. \tag{4.16}$$

Покажем, что последовательность $\{f_k\}$ ограничена в $C^p_\eta(X)$. Сначала получим равномерную оценку для $\mathcal{R}_\eta f_k(x)$. Пусть $x \in X$ и $B \in \mathcal{B}(x)$. Если $r_k \leqslant r(B)$, то

$$\frac{|f_k(x) - [f_k]_B|}{\eta(r(B))} \leqslant \frac{2H_k}{\eta(r(B))} \leqslant \frac{2H_k}{\eta(r_k)}$$

Если же $r_k > r(B)$, то из неравенств

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leqslant H_k\frac{|d(x,x_k) - d(y,x_k)|}{r_k} \leqslant \frac{H_k}{r_k}d(x,y) \leqslant \frac{2H_k}{r_k}r(B), \quad y \in B,$$

и из условия $\eta \in \Omega(1)$ следует, что

$$\frac{|f_k(x) - [f_k]_B|}{\eta(r(B))} \leqslant \frac{1}{\eta(r(B))} \fint_B |f_k(x) - f_k(y)|\, d\mu(y) \leqslant \frac{2H_k}{\eta(r_k)}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_\eta f_k(x) \leqslant \frac{2H_k}{\eta(r_k)} \quad \text{при} \quad x \in X. \tag{4.17}$$

Мы будем использовать эту оценку при $d(x, x_k) \leqslant 2r_k$.

Для $d(x, x_k) > 2r_k$ (4.17) можно улучшить — тогда $x \notin B_k$ и для любого шара $B \in \mathcal{B}(x)$

$$\frac{|f_k(x) - [f_k]_B|}{\eta(r(B))} = \frac{|[f_k]_B|}{\eta(r(B))} \leqslant \frac{H_k}{\eta(r(B))} \cdot \frac{\mu(B \cap B_k)}{\mu B}.$$

Если $B \cap B_k \neq \varnothing$ и $y \in B \cap B_k$, то

$$d(x, x_k) \leqslant d(x, y_0) + d(y_0, y) + d(y, x_k) \leqslant 2r(B) + r_k$$

(y_0 — центр B) и $2r(B) \geqslant d(x, x_k) - r_k \geqslant d(x, x_k)/2$. Поэтому

$$\frac{|f_k(x) - [f_k]_B|}{\eta(r(B))} \leqslant c\frac{H_k}{\eta(r(B))} \cdot \frac{\mu B_k}{\mu B} \leqslant c\frac{H_k}{\eta(d(x, x_k))} \left(\frac{r_k}{d(x, x_k)}\right)^\gamma.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_\eta f_k(x) \leqslant c\frac{H_k}{\eta(d(x, x_k))} \left(\frac{r_k}{d(x, x_k)}\right)^\gamma \quad \text{при} \quad d(x, x_k) > 2r_k. \tag{4.18}$$

С помощью (4.18) и (4.17) оценим теперь норму

$$\|\mathcal{R}_\eta f_k\|^p_{L^p(X)} = \int_{X \setminus B(x_k, 2r_k)} [\mathcal{R}_\eta f_k]^p \, d\mu + \int_{B(x_k, 2r_k)} [\mathcal{R}_\eta f_k]^p \, d\mu \equiv I_1 + I_2$$

Для оценки I_1 воспользуемся неравенством (4.18)

$$I_1 \leqslant c r_k^{\gamma p} H_k^p \int\limits_{d(x, x_k) > 2r_k} \frac{d\mu(x)}{(\eta(d(x, x_k)))^p (d(x, x_k))^{\gamma p}} =$$

$$= c r_k^{\gamma p} H_k^p \sum_{i=0}^m \int\limits_{2^i r_k < d(x, x_k) \leqslant 2^{i+1} r_k} \frac{d\mu(x)}{(\eta(d(x, x_k)))^p (d(x, x_k))^{\gamma p}} \leqslant$$

$$= c r_k^{\gamma p} H_k^p \sum_{i=0}^m [\eta(2^i r_k)(2^i r_k)^\gamma]^{-p} (2^{i+1} r_k)^\gamma \leqslant$$

$$= c r_k^{\gamma p} H_k^p [\eta(r_k)]^{-p} r_k^{-\gamma p + \gamma} \sum_{i=0}^m 2^{i\gamma(1-p)} \leqslant c$$

(здесь $m = [\log_2 1/r_k] + 1$).

Для оценки I_2 применим (4.17)

$$I_2 \leqslant \left[\frac{2H_k}{\eta(r_k)}\right]^p \mu(2B_k) \leqslant c.$$

Итак, $\|\mathcal{R}_\eta f_k\|_{L_p(X)} \leqslant c$. Кроме того, очевидно, что $\|f_k\|_{L_p(X)} \leqslant c\eta(r_k) \leqslant c$. Следовательно, в силу неравенств (2.9) и (2.3) последовательность f_k ограничена в $C^p_\eta(X)$.

С другой стороны, с помощью условия (4.13) можно подобрать $\delta \in (0, 1/2)$ так, чтобы $\mu(B_k \setminus 2\delta B_k) \geqslant \mu B_k/2$ для всех k. Следовательно, для любых $k, i \in \mathbb{N}$ и $x \in \delta B_k$

$$\mathcal{N}_{\sigma_0}(f_k - f_i)(x) \geqslant \frac{1}{\sigma_0(r_k)} \fint_{B_k} |[f_k(x) - f_k(y)] - [f_i(x) - f_i(y)]| \, d\mu(y) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_0(r_k)\mu B_k} \int\limits_{B_k \setminus 2\delta B_k} |[f_k(x) - f_k(y)]| \, d\mu(y) =$$

$$\frac{H_k}{\sigma_0(r_k)\mu B_k} \int\limits_{B_k \setminus 2\delta B_k} \left[\frac{d(y, x_k) - d(x, x_k)}{r_k}\right] d\mu(y) \geqslant$$

$$\geqslant c \frac{H_k}{\sigma_0(r_k)} \cdot \frac{\mu(B_k \setminus 2\delta B_k)}{\mu B_k} \geqslant c r_k^{-\frac{\gamma}{q}}$$

(см. неравенство (4.15)). Отсюда получаем

$$\|f_k - f_i\|^q_{C^q_{\sigma_0}(X)} \geqslant \int_{\delta B_k} [\mathcal{N}_{\sigma_0}(f_k - f_i)]^q \, d\mu \geqslant c > 0$$

и из f_k нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C^q_{\sigma_0}(X)$. Теорема доказана.

Сделаем теперь ряд замечаний по поводу формулировки теоремы 4.

Прежде всего отметим, что утверждение теоремы 4 содержательно лишь при $1/p - 1/q < 1/\gamma$. Если это неравенство не выполнено, то условия (4.3) и $\sigma_0 \in \Omega$ в ее формулировке несовместимы.

Далее, дополнительные ограничения на μ и η в теореме 4 по сравнению с теоремой 3 являются существенными — без них утверждение теоремы 4 становится неверным.

Во-первых, если взять $X = [0, 1]^n$ с евклидовой метрикой и мерой Лебега, а для η выполнено (1.7), то (см. замечание 2) класс $C^p_\eta([0, 1]^n)$ состоит только из постоянных (с точностью до эквивалентности) функций. Поэтому вложение $C^p_\eta([0, 1]^n) \subset C^q_\sigma([0, 1]^n)$ в любой класс $C^q_\sigma([0, 1]^n)$ компактно. Взяв здесь $\eta(r) = r^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ получаем, что требование $\eta \in \Omega(1)$ в теореме 4 нельзя заменить любым условием $\eta \in \Omega(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Во-вторых, в теореме 4 условие регулярности (4.13) нельзя заменить условием (2.1) — тогда (2.1) может выполняться с некоторым $\widetilde{\gamma} < \gamma$ (см. замечание 5). По теореме 3 достаточным условием для компактности вложения $C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$ будет требование

$$\lim_{r \to +0} \frac{\eta(r) r^{\widetilde{\gamma}(1/q - 1/p)}}{\sigma_0(r)} = 0,$$

более слабое по сравнению с (4.3).

5. Компактность вложения $C^p_\eta \subset L^q$. Из теоремы 1 легко выводится следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\eta(r) = r^{\gamma(1/p-1/q)}$. *Тогда*

$$\|f\|_{L^q(X)} \leqslant c\|f\|_{C^p_\eta(X)}.$$

В частности, $C^p_\eta(X) \subset L^q(X)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, тогда $X \subset B_0 = B(x_0, 1)$. Применим теорему 1 в случае $\sigma(r) \equiv 1$ (см. замечание 4). Отсюда в силу (2.9) и (1.6) получаем

$$\|f\|_{L^q(X)} \leqslant \|f - f_{B_0}\|_{L^q(X)} + |f_{B_0}| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(1)\|\mathcal{R}_\sigma f\|_{L^q(X)} + (\mu X)^{1-1/p}\|f\|_{L^p(X)} \leqslant c\|f\|_{C^p_\eta(X)}.$$

Вопрос о компактности вложения из теоремы 5 решает следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < q < \infty$ *и* $\eta \in \Omega$

$$\lim_{r\to+0} \eta(r)r^{\gamma(1/q-1/p)} = 0. \tag{5.1}$$

Тогда вложение $C^p_\eta(X) \subset L^q(X)$ *компактно.*

Доказательство проходит так же, как и в теореме 3. Укажем необходимые изменения.

Пусть $\eta_0(r) = r^{\gamma(1/p-1/q)}$. Вместо (4.6) полагаем

$$\omega(t) = \sup_{0<r\leqslant t} \frac{\eta(r)}{\eta_0(r)}$$

и выбираем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось (4.7). После этого находим $\varepsilon\eta_0(\delta)$-сеть для K в $L^p(X)$ и повторим рассуждения из теоремы 3, применяя теорему 5 вместо теоремы 1. Тогда вместо (4.12) получим неравенство

$$\|h\|_{L^q(X)} \leqslant c\left(\frac{\|h\|_{L^p(X)}}{\eta_0(\delta)} + \omega(\delta)\|\mathcal{N}_\eta h\|_{L^p(X)}\right) < c\varepsilon.$$

Как и теорема 4 в предыдущем разделе, теорема 6 неулучшаема при тех же дополнительных ограничениях. В следующей теореме, как и в теореме 4, предполагаем, что d является метрикой.

Теорема 7. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, *мера* μ *удовлетворяет условию (4.13),* $\eta \in \Omega(1)$. *Тогда из компактности вложения* $C^p_\eta(X) \subset L^q(X)$ *следует (5.1).*

Доказательство. Повторим рассуждения из доказательства теоремы 4, взяв в них $\sigma_0(r) \equiv 1$. Тогда получим, что последовательность (4.16) ограничена в $C^p_\eta(X)$.

После этого, выбирая $0 < \delta < 1/4$ так, чтобы $\mu(B_k \setminus 2\delta B_k) \geqslant \mu B_k/2$ для всех k, получаем

$$\|f_k - f_i\|^q_{L^q(X)} \geqslant \int_{B_k} |f_k|^q\,d\mu \geqslant \int_{B_k\setminus 2\delta B_k} \left[H_k\left(1 - \frac{d(x, x_k)}{r_k}\right)\right]^q d\mu(x) \geqslant$$

$$\geqslant c\mu B_k H_k^q = \left[\eta(r_k)r_k^{\gamma(1/q-1/p)}\right]^q \geqslant c > 0$$

для всех $k, i \in \mathbb{N}$.

К теореме 7 сделаем следующие замечания. Во-первых, она содержательна лишь при $1/p - 1/q < 1/\gamma$ — без этого неравенства условия $\eta \in \Omega(1)$ и (5.1) в формулировке теоремы несовместимы.

Во-вторых, формулировке теоремы 7 нельзя отказаться от условия регулярности (4.13), заменив его условием (2.1). Кроме того, условие $\eta \in \Omega(1)$ нельзя заменить на $\eta \in \Omega(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Причины для этого такие же, как и указанные выше для теоремы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R.R. Coifman, G. Weiss, "Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés", *Lecture Notes in Math.*, **242** (1971), 1–176.

[2] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[3] A.P. Calderon, "Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions", *Studia Math.*, **44** (1972), 167–186.

[4] A. P. Calderon, R. Scott, "Sobolev type inequalities for $p > 0$", *Studia Math.*, **62** (1978), 75–92.

[5] R. DeVore, R. Sharpley, "Maximal functions measuring local smoothness", *Memoirs of AMS.*, **47** (1984), 1–101.

[6] В. И. Коляда, "Оценки максимальных функций, связанных с окальной гладкостью", *Доклады АН СССР*, **293**:4 (1987), 534–537.

[7] V.I. Kolyada, "Estimates of maximal functions measuring local smoothness", *Analisys Math.*, **35**:1 (1999), 277–300.

[8] К.И. Осколков, "Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры", *Матем. сборник*, **103**:4 (1977), 563–589.

[9] P. Hajłasz, "Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces", *Potential Anal.*, **5**:4 (1996), 403–415.

[10] И.А. Иванишко, "Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа", *Труды ин-та математики НАН Беларуси*, **12**:1 (2004), 64–67.

[11] Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск: Научная книга, 2002.

[12] Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Новосибирск: Научная книга, 1998.

[13] A. Jonsson, "Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **290**:1 (2004), 86—104.

[14] A. Kałamajska, "On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **24** (1999), 123–132.

[15] В.И. Коляда, *Теоремы вложения и метрические свойства функций: дисс.... докт. физ.-мат. наук*, Москва, 1987.

[16] И.А. Иванишко, "Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой", *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–940.

[17] D. Yang, "New characterizations of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces", *Science of China*, **46**:5 (2003), 675–689.

[18] В.Г. Кротов, “Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций”, *Доклады РАН*, **404**:2 (2005), 155–158.

[19] В.Г. Кротов, “Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой”, *Изв. НАН Армении, сер. матем.*, **41**:2 (2006), 27–42.

[20] В.К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Москва: Наука, 1977.

[21] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Москва: Мир, 1973.

[22] H. Triebel, *Theory of function spaces III*, Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006.

И. А. Иванишко
Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: ivanishko@bsu.by

Поступило
10.03.2009

В. Г. Кротов
Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: krotov@bsu.by