Лекции 8,9.

Глава 5. Непрерывность функции

5.1. Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий высшей математики. Очевидно, графиком непрерывной функции является сплошная, нигде не прерывающаяся линия. Дадим определение непрерывности функции в точке.

Определение 1.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если существует конечный предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Из этого определения следует, что функция непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

1. функция определена в точке a и в некоторой её окрестности;
2. функция имеет предел в точке a;
3. этот предел равен значению функции в точке a.

Пример 1.

Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 0$, так как выполнены все условия непрерывности: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = f(0) = 0$.

Пример 2.

Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, а $f(0) = 1$,

Пример 3.

Функция $f(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 0, \\ x-1, x < 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, так как предел функции в этой точке не существует (левосторонний и правосторонний пределы не равны: $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -1$, а $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$).

Пример 4.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, так как в этой точке не определена.

Сформулируем второе определение непрерывности функции в точке, основанное на понятии приращении аргумента и функции.

Определение 2.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке a и в некоторой её окрестности. Разность $\Delta x = x - a$ называется приращением аргумента, а разность $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ - соответствующим приращением функции. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0$.

Пример 5.

Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$ в произвольной точке x.
Задав приращение аргумента Δx, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Значит, по второму определению непрерывности функции функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке x.

Теорема 1.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x), g(a)\neq 0$ также непрерывны в точке a.

Доказательство.

Докажем теорему для $f(x)+g(x)$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то из определения непрерывности функции следуют равенства:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Отсюда, используя свойства пределов, получим

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Следовательно, по первому определению непрерывности функции сумма функций $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке a.
Эта теорема справедлива для любого *конечного* числа слагаемых.
Остальные случаи теоремы можно доказать аналогично.

Теорема 2.

Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = g(a)$, а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке a, то сложная функция $y = f(u(x))$ непрерывна в точке a.
Доказать теорему можно на основе второго определения непрерывности функции. Из непрерывности функции $u = g(x)$ следует, что бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение Δu. А в силу непрерывности функции $y = g(u)$ бесконечно малому приращению аргумента Δu соответствует бесконечно малое приращение Δy.

Из теоремы 2 следует равенство:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)).$$

Это значит, что для непрерывной функции можно переставлять символы предела и функции.

Пример 6.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$

5.2. Непрерывность функции на промежутке

Функция называется *непрерывной на интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция определена в точке a и при этом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то функция $f(x)$ в точке a *непрерывна справа*. Аналогично, если функция определена в точке b и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, то функция $f(x)$ в точке b *непрерывна слева*.

Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке a - непрерывна справа, в точке b - непрерывна слева).

Наименьшим значением функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется такое её значение $m=f(x_1)$, что $f(x_1)\le f(x)$ для всех $x\in[a;b]$.

Наибольшим значением функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется такое её значение $M=f(x_2)$, что $f(x_2)\ge f(x)$ для всех $x\in[a;b]$.

Теорема 3.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a;b]$, то обратная ей функция $y=f^{-1}(x)$ непрерывна и строго монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$.

Из теорем 1, 2 и 3 следует важное следствие: любая элементарная функция *непрерывна на своей области определения*.

Рациональная функция $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна на всей числовой прямой за исключением тех точек, в которых знаменатель $Q_m(x)$ –обращается в ноль.

Пример 7.

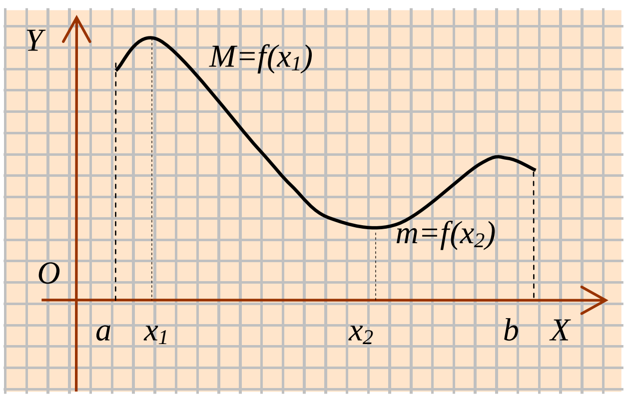
Функция $y=\sin x$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Обратная ей функция $y=\arcsin x$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[-1;1]$.

Теорема 4 (Вейерштрасса).

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

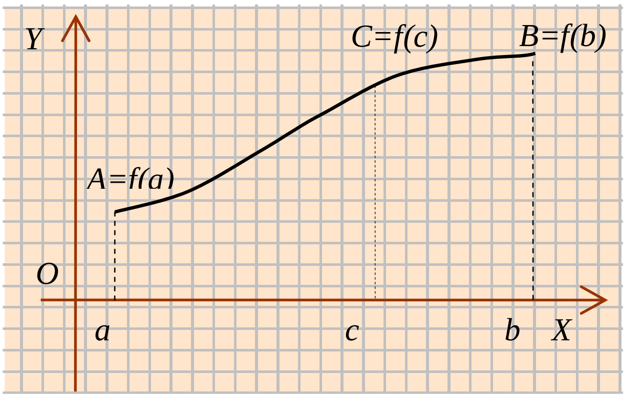
Из этой теоремы вытекает следствие: если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.



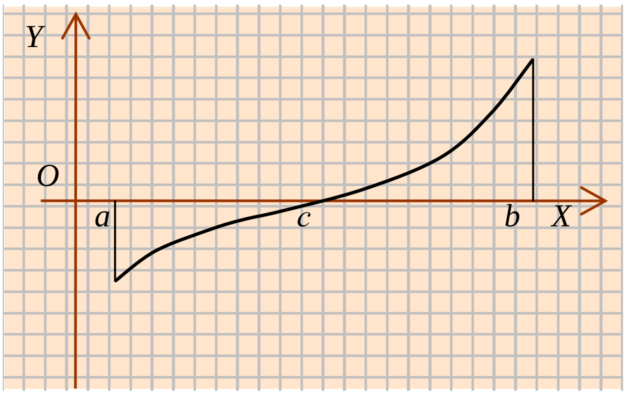
Теорема 5 (Больцано - Коши).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Теорема очевидна из следующего рисунка. Для числа $C \in [A;B]$ найдется точка c внутри отрезка $[a;b]$ такая, что $f(c) = C$.



Теорему 5 можно применять при решении уравнений $f(x) = 0$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой $f(x)$ обращается в ноль, т.е. $f(c) = 0$ (см. рисунок).



Утверждение о существовании корня уравнения $f(x) = 0$ находит применение в математической модели рынка. Рассмотрим рынок одного товара. Основными категориями рынка являются спрос и предложение. Эти категории зависят от многих факторов, но главный из них – цена товара. Пусть $g = g(p)$ - функция спроса, $s = s(p)$ - функция предложения, где p - цена товара. Предположим, что функции $g(p)$ и $s(p)$ непрерывны для положительных значений p. Тогда есть возможность решить задачу об отыскании такой цены p, при которой спрос равен предложению, т.е.

$$g(p) = s(p).$$

Так как функции $g(p)$ и $s(p)$ непрерывны, то существует решение p_0 этого уравнения. Цена p_0 называется равновесной.

5.3. Точки разрыва и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции $y = f(x)$ называются *точками разрыва*. Если точка a - точка разрыва, то в этой точке не выполняется, по крайней мере, одно условие непрерывности функции:

1. функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a, но не определена в самой точке a.
2. функция $y = f(x)$ определена в точке a и её окрестности, но не существует предел функции в этой точке.
3. функция $y = f(x)$ определена в точке a и её окрестности, существует предел функции в этой точке, но он не равен значению функции в точке a.

Определение 3.

Точка разрыва называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b_1 \text{ и } \lim_{x\to a+0} f(x) = b_2 .$$

Если $b_1 = b_2$, то точка a называется *точкой устранимого разрыва*.

Если $b_1 \neq b_2$, то точка a называется *точкой конечного скачка*. Величину $|b_1 - b_2|$ называют *скачком функции*.

Определение 4.

Точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*, если в этой точке, по крайней мере, один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример 7.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 2, x = 0 \end{cases}$.

Данная функция имеет различное аналитическое представление. При $x \neq 0$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ - непрерывная функция. Следовательно, точкой разрыва может быть только точка $x = 0$. Предел в этой точке существует, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, но он не равен значению функции в этой точке. Значит, это точка разрыва первого рода, точнее – точка устранимого разрыва. Если принять $f(0) = 1$, то функция $f(x)$ станет непрерывной.

Пример 8.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Преобразуем функцию: $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}1, x>1,\\ -1, x<1.\end{cases}$

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1$. Так как односторонние пределы не равны, то точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода, а именно – точкой конечного скачка. Скачок функции равен 2.

Пример 9.

Найти точки разрыва функции $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Данная функция может иметь разрыв в точках, в которых знаменатель обращается в ноль. Решив квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$, получим $x_1=2$ и $x_2=3$. Значит, функцию можно записать так:

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Вычислим односторонние пределы в точке $x_1=2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=-\infty.$$

Следовательно, $x_1=2$ - точка разрыва второго рода.

Подобным способом можно показать, что $x_2=3$ тоже точка разрыва второго рода.

5.4. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.1 – 5.10 найти множество, на котором функция $f(x)$ непрерывна.

5.1. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-15}$.

5.2. $f(x)=\frac{1}{x^2-4x-12}$.

5.3. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-5}$.

5.4. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$.

5.5. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

5.6. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

5.7. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$.

5.8. $f(x)=\frac{2+x}{8+x^3}$.

5.9. $f(x)=\ln\frac{x}{x^2-x-2}$

5.10. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2}}$.

В задачах 5.11 – 5.20 найти точки разрыва функции $f(x)$ и указать их характеристики.

5.11. $f(x)=\begin{cases}-x, x<0;\\ x^2, 0<x<1;\\ x^3-1, x\ge 1.\end{cases}$.

5.12.. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le -1;\\ x^2, -1<x\le 0;\\ 4, x>0.\end{cases}$

5.13. $f(x)=\begin{cases}1, x<0;\\ \cos x, 0<x<\pi;\\ x, x\geq\pi.\end{cases}$

5.14. $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<\dfrac{\pi}{2};\\ 1, \dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi.\end{cases}$

5.15. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

5.16. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$.

5.17. $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-1}-1}$.

5.18. $f(x)=\dfrac{1}{3^{x-2}-1}$.

5.19. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+2}$

5.20. $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{4-x}$.

В задачах 5.21 – 5.30 найти точки разрыва функции $f(x)$. Доопределить функцию в точках разрыва, если это возможно, чтобы функция в точках разрыва стала непрерывной.

5.21. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

5.22. $f(x)=\dfrac{tg 2x}{x}$.

5.23. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

5.24. $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

5.25. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

5.26. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

5.27. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

5.28. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5.29. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$

5.30. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-14x+13}$.

В задачах 5.31 – 5.40 определить, имеет ли уравнение $f(x)=0$ корни, принадлежащие отрезку $[a;b]$.

5.31. $x^3+3x^2-3=0,[-2;0]$.

5.32. $x^3+3x^2-24x+1=0,[0;1]$.

5.33. $2^x-5x-3=0,[2;3]$.

5.34. $3^{-x}-x+1=0,[1;2]$.

5.35. $\dfrac{1}{1+x^2}+x-2=0,[1;2]$.

5.36. $\dfrac{x}{1+x^2}-x^2-x-1=0,[0;2]$.

5.37. $2\sin x-x+4=0,[\pi;\dfrac{3}{2}\pi]$.

5.38. $\cos 2x+2x-1=0,[0;\pi]$.

5.39. $\ln x-x=0,[0{,}1;1]$.

5.40. $\ln x+x^2+x+1=0,[0{,}1;1]$.

Решение задачи 5.11.

Необходимо найти множество, на котором функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-15}$ непрерывна.

Данная функция может иметь точки разрыва только в тех точках, в которых знаменатель обращается в ноль. Для этого решим уравнение $x^2+2x-15=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}, x_1=-5, x_2=3.$$

Вычислим односторонние пределы в точках $x_1=-5, x_2=3$:

$$\lim_{x\to-5-0}f(x)=\lim_{x\to-5-0}\frac{1}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to-5-0}\frac{1}{(x+5)(x-3)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-5+0}f(x)=\lim_{x\to-5+0}\frac{1}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to-5+0}\frac{1}{(x+5)(x-3)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to3-0}f(x)=\lim_{x\to3-0}\frac{1}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to3-0}\frac{1}{(x+5)(x-3)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x^2+2x-15} = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{(x+5)(x-3)} = +\infty.$$

В обеих точках односторонние пределы равны бесконечности, следовательно, они являются точками разрыва второго рода. Поэтому функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-15}$ непрерывна на множестве $x \in (-\infty;-5) \bigcup (-5;3) \bigcup (3;+\infty)$.

Решение задачи 5.11.

Необходимо найти точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} -x, x < 0; \\ x^2, 0 < x < 1; \\ x^3 - 1, x \geq 1. \end{cases}$ и указать их характеристики..

Данная функция представлена тремя формулами, каждая из которых непрерывна при всех значениях аргумента. Поэтому функция может иметь точки разрыва только в точках $x = 0$ и $x = 1$.

В точке $x = 0$ функция не определена, значит, это точка разрыва. Для уточнения её типа вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0.$$

Оба односторонних предела равны нулю, следовательно, $x = 0$ - точка разрыва первого рода, точнее, точка устранимого разрыва. Чтобы функция стала непрерывной в этой точке, необходимо доопределить функцию: $f(0) = 0$.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (x^3 - 1) = 0.$$

Односторонние пределы конечны и неравны между собой. Следовательно, эта точка – точка конечного скачка. Скачок функции в точке $x = 1$ равен

$$\Delta = \left| f(1+0) - f(1-0) \right| = |0 - 1| = 0.$$

Ответ. $x = 0$ - точка устранимого разрыва; $x = 1$ - точка конечного скачка, скачок функции равен 1.

Решение задачи 5.21.

Необходимо найти точки разрыва и доопределить функцию в точках разрыва, чтобы функция в точках разрыва стала непрерывной.

Точкой разрыва для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ является $x = 0$, так как в ней функция не определена. И потому что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, эта точка является точкой устранимого разрыва. Функцию доопределим следующим образом: $f(0) = 1$.

Решение задачи 5.31.

Необходимо определить, имеет ли уравнение $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ корни, принадлежащие отрезку $[-2;0]$.

Вычислим значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ на концах отрезка: $f(-2) = 1$, $f(0) = -3$. Так как функция непрерывна на отрезке и принимает значения разных знаков на его концах, то существует, по крайней мере, один корень уравнения на этом отрезке.

Ответы.
5.1. $(-\infty;-5)\bigcup(-5;3)\bigcup(3;\infty)$. **5.2.** $(-\infty;-2)\bigcup(-2;6)\bigcup(6;\infty)$. **5.3.** $(-\infty;2)\bigcup(3;5)\bigcup(5;\infty)$. **5.4.** $[-1;2)\bigcup(;\infty)$. **5.5.** $x \neq k\pi$. **5.6.** $(0;1)\bigcup(1;\infty)$. **5.7.** $(-\infty;-1)\bigcup(-1;\infty)$. **5.8.** $(-\infty;-2)\bigcup(-2;\infty)$. **5.9.** $(-1;0)\bigcup(2;\infty)$**.** **5.10.** $(-\infty;-3)\bigcup(1;\infty)$. **5.11.** $x = 0$ - точка устранимого разрыва; $x = 1$ - точка разрыва конечного скачка, скачок функции равен 1. **5.12.** $x = -1$ - точка разрыва конечного скачка, скачок функции равен 1 ; $x = 0$ - точка разрыва конечного скачка, скачок функции равен 4. **5.13.** $x = 0$ - точка устранимого разрыва; $x = \pi$ - точка разрыва конечного скачка, скачок функции равен $\pi + 1$. **5.14.** $x = \frac{\pi}{2}$ - точка устранимого разрыва. **5.15.** $x = 1$ - точка устранимого разрыва; $x = 2$ - точка разрыва 1-го рода. **5.16.** $x = -2$ - точка устранимого разрыва; $x = 1$ - точка разрыва 1-го рода. **5.17.** $x = 1$ - точка разрыва 1-го рода**. 5.18.** $x = 2$ - точка разрыва 1-го рода. **5.19.** Функция непрерывна на множестве $x \in (-\infty;-2)\bigcup(1;\infty)$; точки $x = -2$ и $x = 1$- точки разрыва 1-го рода**. 5.20.** Функция непрерывна на множестве $x \in (3;4)$; точки $x = 3$ и $x = 4$- точки разрыва 1-го рода. **5.21.** $f(0) = 1$. **5.22.** $f(0) = 2$. **5.23.** $f(0) = \frac{1}{2}$**. 5.24.** $f(0) = 0$**. 5.25.** $f(0) = e$**. 5.26.** $f(0) = \frac{1}{6}$**.**
5.27. $x = 2$- точка разрыва 1-го рода, нельзя функцию доопределить, чтобы она непрерывной. **5.28.** $x = -1$- точка разрыва 1-го рода, нельзя функцию доопределить, чтобы она непрерывной. **5.29.** $x = -3$ - точка устранимого разрыва, в этой точке функцию можно доопределить: $f(-3) = -1$; $x = -2$ - точка разрыва 1-го рода, в этой точке функцию нельзя доопределить.
5.30. $x = 1$ - точка устранимого разрыва, в этой точке функцию можно доопределить: $f(1) = -\frac{1}{12}$; $x = 13$ - точка разрыва 1-го рода, в этой точке функцию нельзя доопределить. **5.31.** Да. **5.32.** Да. **5.33.** Нет. **5.34.** Да. **5.35.** Да. **5.36.** Нет. **5.37.** Да. **5.38.** Да. **5.39.** Нет. **5.40.** Да.