Лекция 29,30

Глава 2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Системы координат на плоскости

Прямоугольная и полярная системы координат

Системой координат на плоскости называется способ, позволяющий определять положение точки заданием чисел. Этот способ позволяет решение геометрических задач сводить к алгебраическим. Существуют различные способы задания положения точки на плоскости. В соответствии с этим существуют и разные системы координат, например, *прямоугольная декартова и полярная.*

Для задания прямоугольной системы координат необходимо на плоскости провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой которых выбрать положительное направление и задать масштаб. Прямые называются *координатными осями,* точка их пересечения - *началом координат* (рис.1).

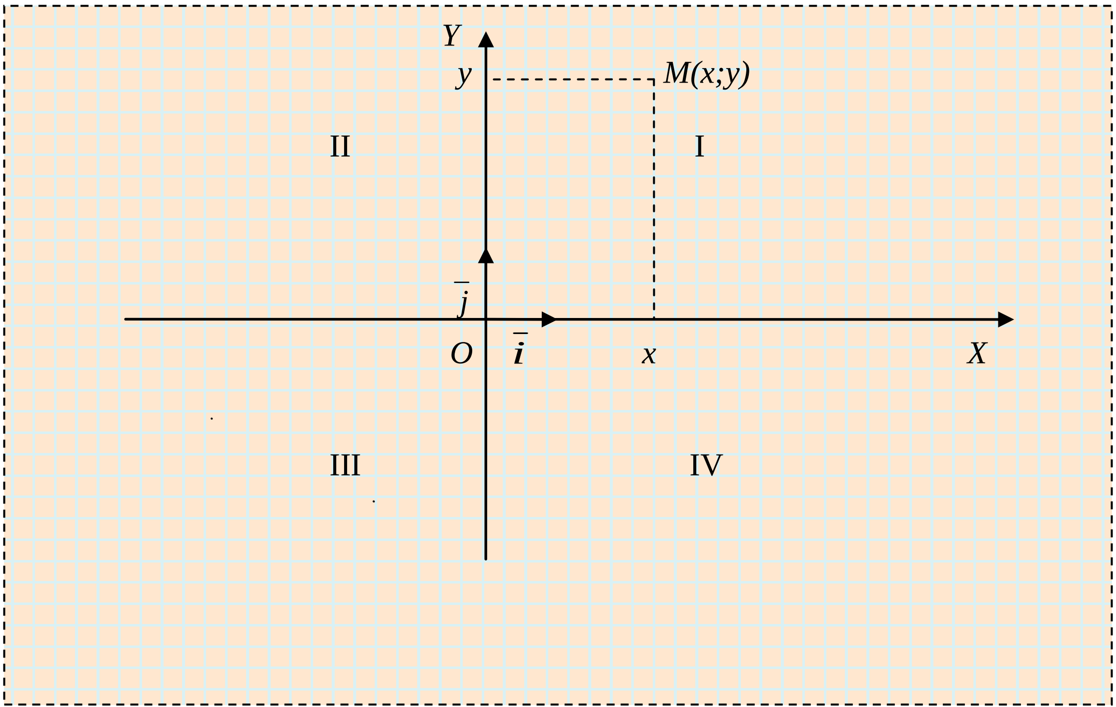

Рис. 1

Как правило, горизонтальную и направленную слева направо, ось называют осью *абсцисс* (осью *OX*), другую вертикальную, направленную снизу вверх – осью *ординат* (осью *OY*).

Единичные векторы, которые задают масштаб, обозначают $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

Систему координат обозначают *OXY*, а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью.* Координатные оси делят координатную плоскость на четыре *координатные четверти* (или *квадранты*).

Рассмотрим произвольную точку *M* плоскости *Oxy*. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки *M*.

Координатами точки M в системе координат *OXY* называются координаты вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} =(x;y)$, то координаты точки *M* записывают так: *M*(*x;y*), число *x* называется *абсциссой* точки *M*, *y* – *ординатой* точки *M*.

Эти два числа *x* и *y* полностью определяют положение точки на плоскости , а именно: каждой паре чисел *x* и *y* соответствует единственная точка *M* плоскости, и наоборот.

Полярная система координат

Полярная система координат задаётся точкой *O*, называемой *полюсом,* лучом *Op*, называемым *полярной осью,* и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч *Op* (рис.2).

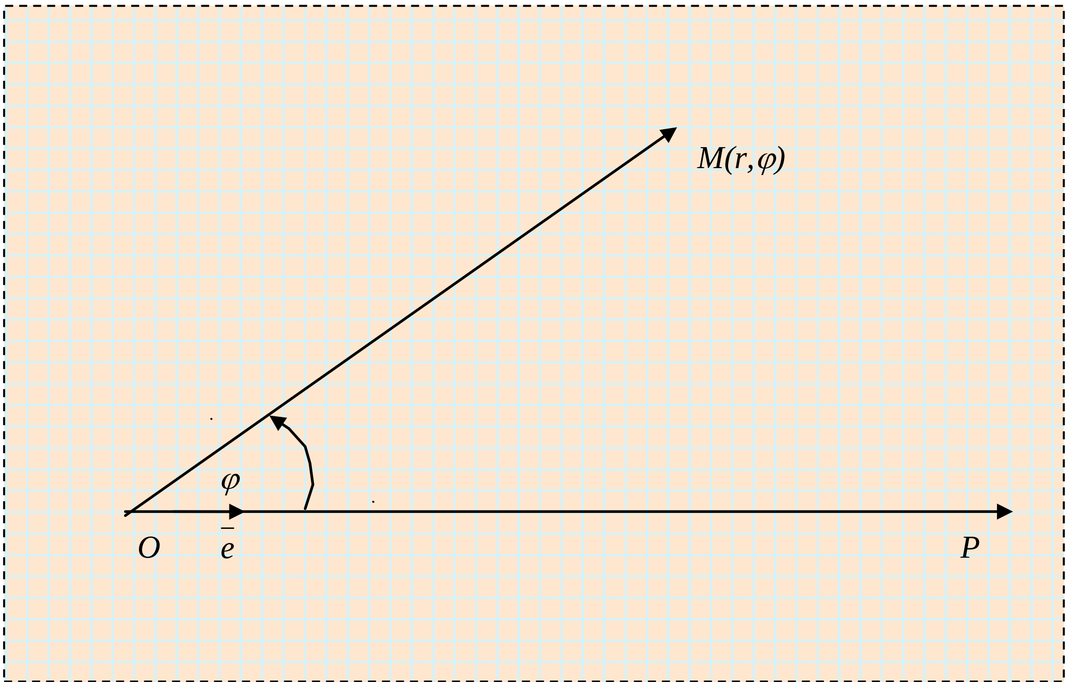

Рис. 2

Положение произвольной точки *M* на плоскости определяется двумя числами: её расстоянием *r* от полюса *O* и углом φ, образованным отрезком *OM* с полярной осью (отсчёт углов ведётся против движения часовой стрелки).

Числа *r* и φ называются *полярными координатами* точки *M*, обозначают $M(r;\varphi)$ и *r* называют *полярным радиусом,* φ *- полярным углом.*

Каждой точке плоскости соответствует определенное значение $r \geq 0$. Значение полярного угла φ определено с точностью до слагаемого $2\pi k$ (*k* – целое). Чтобы каждая точка плоскости имела единственные полярные координаты, достаточно ограничится промежутком $0 \leq \varphi < 2\pi$. В этом случае между любой точкой плоскости кроме полярного полюса и парой чисел *r* и φ существует взаимно-однозначное соответствие.

Найдем соотношения между прямоугольными и полярными координатами. Для этого на плоскости зададим прямоугольную и полярную системы координат. Начало координат прямоугольной системы совместим с полярным полюсом, а полярную ось – с положительной полуосью *Ox*. Пусть *x* и *y* – прямоугольные координаты точки *M*, а *r* и φ - её полярные координаты (рис. 3).

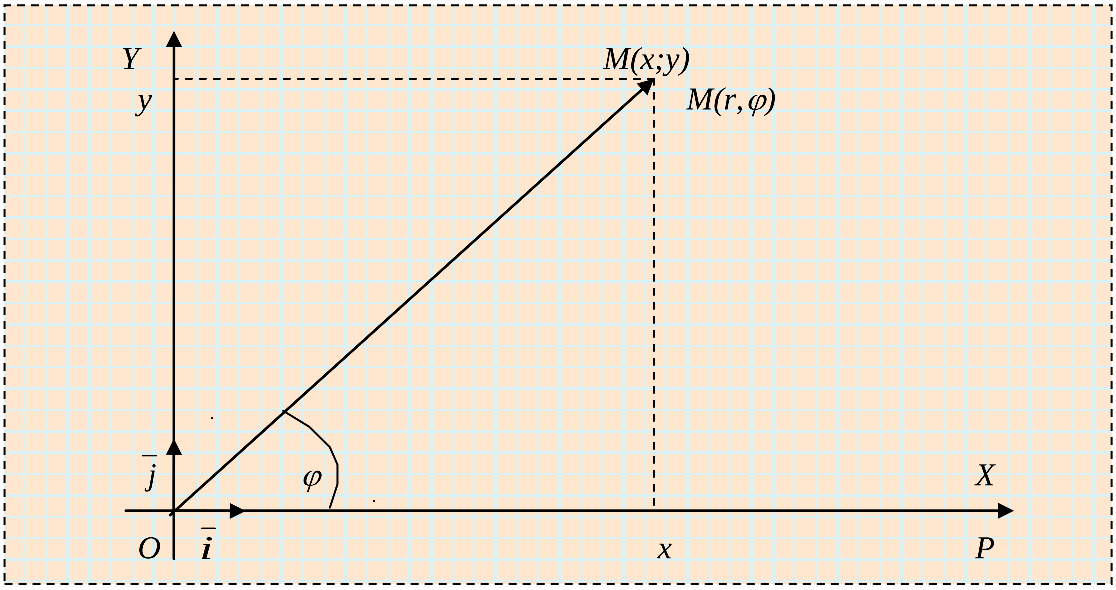

Рис. 3

.

Очевидно, что прямоугольные координаты точки *M(x;y)* выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cdot cos\varphi, \\ y = r\cdot sin\varphi. \end{cases}$$

Для представления полярных координат точки *M(r;φ)* через прямоугольные координаты справедливы формулы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

При вычислении значения угла φ необходимо по знакам x и y определить четверть, в которой лежит искомый угол, и учесть, что $0 \le \varphi < 2\pi$.

►***Пример 1***. Определить прямоугольные координаты точки $A(8;\frac{\pi}{4})$, заданной в полярной системе координат.

На плоскости зададим прямоугольную и полярную системы координат. Для этого совместим полярный полюс *O* с началом координат *OXY*, а полярную ось – с положительной полуосью *Ox*.

Пусть x и y – прямоугольные координаты точки A, а $r = 8$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ - её полярные координаты (см. рис. 4).

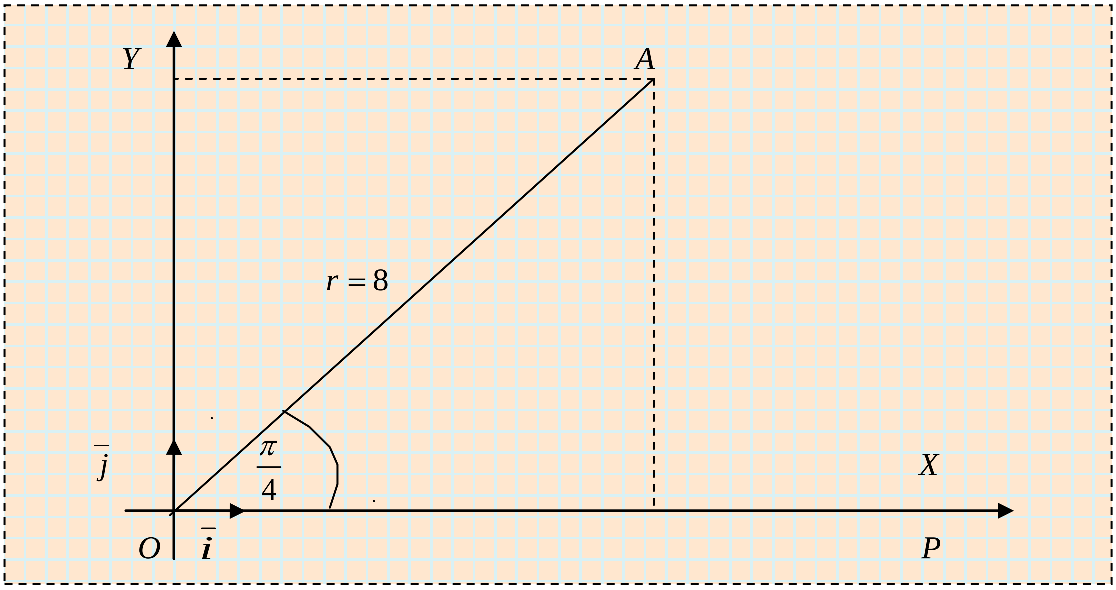

Рис. 4

Тогда $x = 8\cos\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$ и $y = 8\sin\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$.

◄

2.2. Преобразование прямоугольной системы координат

На плоскости можно задать несколько прямоугольных систем. Любая точка плоскости в разных системах координат имеет разные координаты. Необходимо установить соотношения между координатами точки в разных системах координат. Рассмотрим два простейших случая взаимного расположения двух прямоугольных систем координат. В первом системы координат имеют разные начала координат, а соответствующие координатные оси одинаково направлены. Во втором – системы имеют одно начало координат, а направления координатных осей не совпадают. Переход от одной системы координат в другую называется *преобразованием системы координат.*

Параллельный перенос осей координат

Пусть задана прямоугольная система координат OXY. При *параллельном переносе* осей координат понимают переход от системы координат OXY к новой $O'X'Y'$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб не изменяются.

Пусть начало системы координат $O'X'Y'$ точка O' имеет координаты $(x_0;\ y_0)$ в старой системе координат OXY, т.е. $O'(x_0; y_0)$ а произвольная точка M плоскости в системе OXY имеет координаты $(x;\ y)$ и в новой системе $O'X'Y'$ - $(x';\ y')$. Необходимо найти соотношения между $(x;\ y)$ и $(x';\ y')$ (см рис. 5).

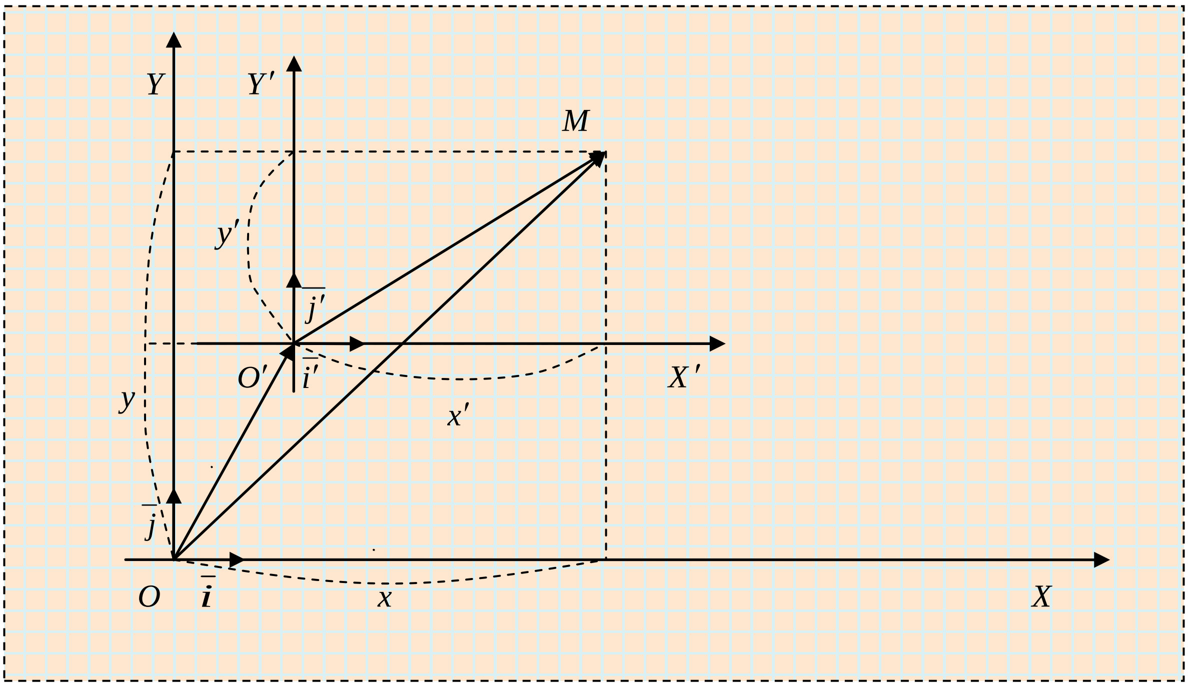

Рис. 5

Рассмотрим векторы

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j},\ \overline{OO'} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \quad \overline{O'M} = x'\bar{i} + y'\bar{j},$$

Так как

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}\text{, то } x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j},\text{ т.е.}$$

$$x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} = (x_0 + x')\bar{i} + (y_0 + y')\bar{j}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y'.

Поворот осей координат

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O'X'Y'$ получена поворотом координатных осей системы OXY на угол α.

Пусть M - произвольная точка плоскости, $(x;y)$ – её координаты в старой системе и $(x'; y')$- в новой системе.

Введём две полярные системы координат с общим полюсом О и полярными осями OX и OX' (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha+\varphi$ и φ, где φ- полярный угол в полярной системе OX' (см рис. 6).

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(\alpha+\varphi), \\ y = r\cdot\sin(\alpha+\varphi). \end{cases}$$

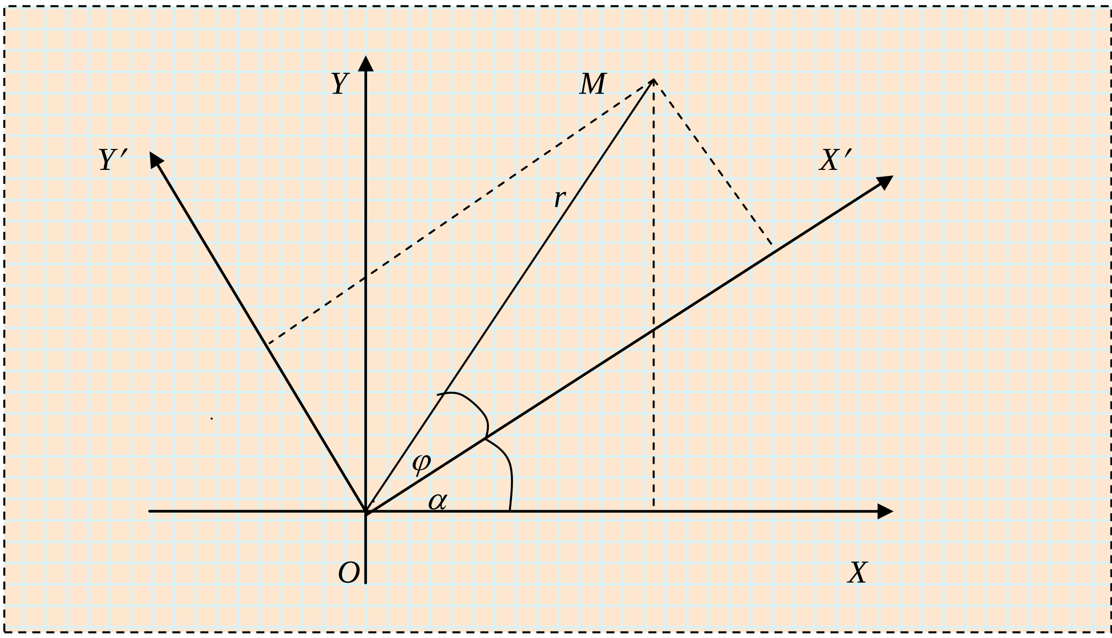

Рис. 6

Отсюда получим

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\alpha - r\sin\varphi\cdot\sin\alpha, \\ y = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha + r\sin\varphi\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Так как $x' = r\cdot\cos\varphi$ и $y' = r\cdot\sin\varphi$, то

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Полученные формулы устанавливают связь между старыми координатами $(x;y)$ произвольной точки M и новыми координатами $(x';y')$ этой же точки M.

Пусть новая система координат $O'X'Y'$ получена из старой OXY путём параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α, тогда формулы, выражающие старые координаты x и y произвольной точки через её новые координаты x' и y', имеют вид.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

2.3. Прямая на плоскости

Уравнением линии на плоскости является уравнение $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y линии и только они. Прямая на плоскости определяется уравнением первой степени. Существуют разные способы задания прямой, что приводит к различным по форме уравнениям.

Общее уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через заданную точку $M_0\ (x_0, y_0)$ и перпендикулярна ненулевому вектору $\bar{n} = (A;B)$ (см. рис. 7) Тогда для произвольной точки $M(x;y)$, принадлежащей этой прямой, получим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, перпендикулярный заданному вектору $\bar{n} = (A;B)$. Следовательно,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Отсюда получим *общее уравнение* прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

где x и y - координаты произвольной точки прямой (*текущие координаты*), вектор $\bar{n} = (A;B)$ - *нормальный вектор* прямой, $C = -Ax_0 - By_0$.

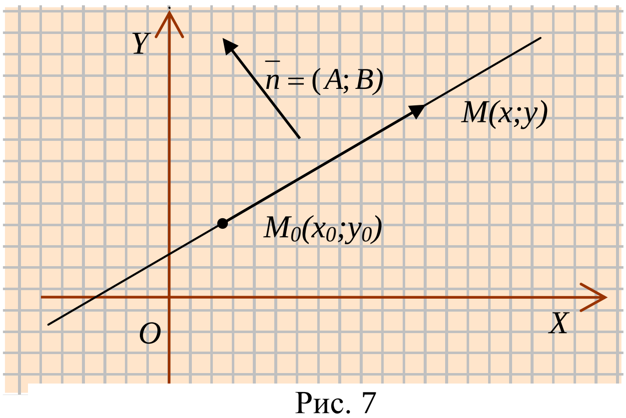

Рис. 7

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b,$$

где k - угловой коэффициент прямой $k = tg\alpha$, α - угол, между прямой и положительным направлением оси OX, b – ордината точки пересечения прямой с осью OY (см. рис.8).

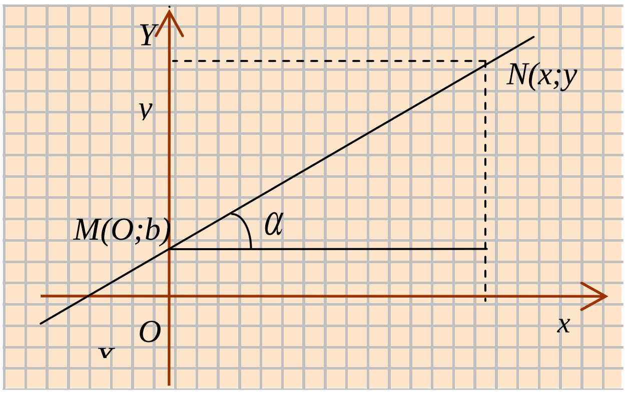

Рис. 8

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k - угловой коэффициент прямой $k = tg\alpha$, α - угол, между прямой и положительным направлением оси *OX*, $M\ (x_0, y_0)$ – заданная точка (см рис.9).

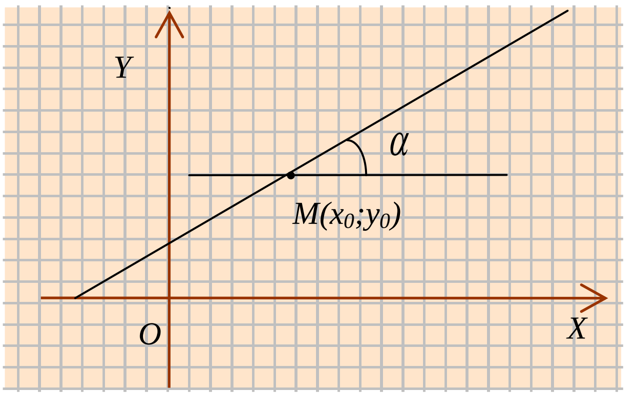

Рис. 9

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

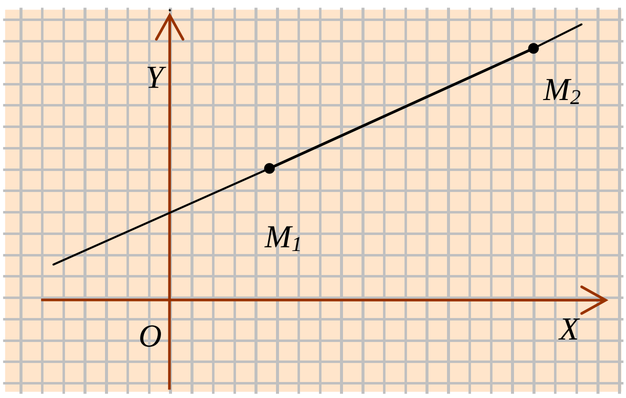

Рис. 10

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ (см. рис. 10):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Если $y_1=y_2$, то уравнение прямой $y=y_1$, если же $x_1=x_2$, то уравнение прямой $x=x_1$.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(a;0)$ и $M_2(0;b)$ (см. рис. 11), тогда, применяя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, получим

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

отсюда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

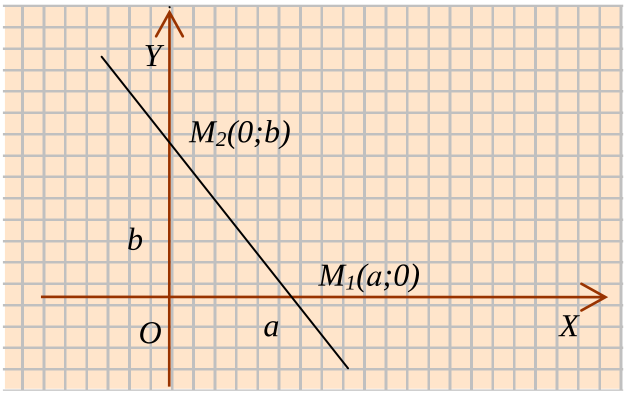

Рис. 11

Пример 1.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ перпендикулярно биссектрисе второго координатного угла.

По направлению биссектрисы второго координатного угла выберем вектор $\overline{n}=(-1;1)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(-1;1)$:

$$-1(x-1)+1(y-2)=0.$$

Отсюда

$$x-y+1=0.$$

Пример 2.

Составить уравнение медианы треугольника с вершинами $A(3;4)$, $B(4;-1)$ и $C(-2;1)$, проведенной к стороне *BC*.

Найдем координаты середины стороны *BC*: $M\left(\frac{4-2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)=M(1;0)$. Тогда уравнение медианы, как прямой, проходящей через две точки $A(3;4)$ и $M(1;0)$ выглядит так:

$$\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-3}{1-3}$$

или

$$y-2x+2=0.$$

Нормальное уравнение прямой

Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α- угол между положительным направлением оси OX и этим перпендикуляром (см.рис. 12).

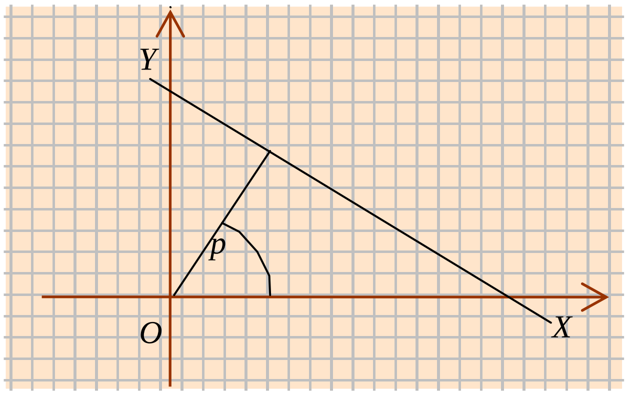

Рис. 12

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ можно преобразовать в нормальное уравнение, если умножить уравнение на множитель $\lambda=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (знак множителя берется противоположным знаку коэффициента C).

Параметрическое уравнение прямой

Зададим прямую l, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно ненулевому вектору $\overline{m}=(p;q)$ (см. рис. 13). Данные условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую.

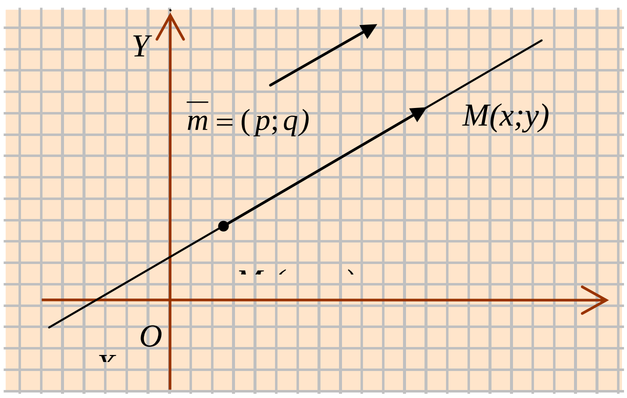

Рис. 13

Обозначим через $M(x, y)$ произвольную точку прямой l. Тогда векторы $\overline{m}=(p;q)$ и $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ коллинеарны, значит, $\overline{M_0M}=t\overline{m}$, где t - произвольное вещественное число. Запишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \end{cases} \quad t \in R.$$

Получено параметрическое уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0) параллельно вектору $\overline{m} = (p;q)$.

Пример 3.

Дано параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$

Запишем уравнение этой прямой в общем виде. Для этого необходимо исключить параметр t: $t = 2 - y,\ x = 1 + 2(2 - y),\ x + 2y = 5$.

Если точка A (11, -3) принадлежит данной прямой, то координаты точки должны удовлетворять системе $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$ Значит, найдется такое значение параметра t, которое является решением системы $\begin{cases} 11 = 1 + 2t, \\ -3 = 2 - t. \end{cases}$ Действительно, из системы находим $t = 5$.

Точка B (2, 1) не принадлежит прямой, так как система $\begin{cases} 2 = 1 + 2t, \\ 1 = 2 - t. \end{cases}$ не имеет решений.

Пример 4.

Написать параметрическое уравнение прямой $3x + 2y = 1$. Пусь $x = t$, тогда $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}(1 - 3t)$. Следовательно,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{2}(1 - 3t). \end{cases}$$

Уравнение отрезка

Запишем уравнение прямой l, проходящей через точки M_1 и M_2. Вектор $\overline{M_1M_2}$ параллелен прямой l, поэтому параметрическое уравнение прямой в векторной форме имеет вид

$$\overline{M} = \overline{M_1} + t\overline{M_1M_2}, \quad t \in R.$$

Если $t=0$, то точка M совпадает с точкой M_1, при увеличении параметра t точка M перемещается по прямой l от точки M_1 к точке M_2, и при $t=1$ точка M совпадает с точкой M_2 (рис. 14).

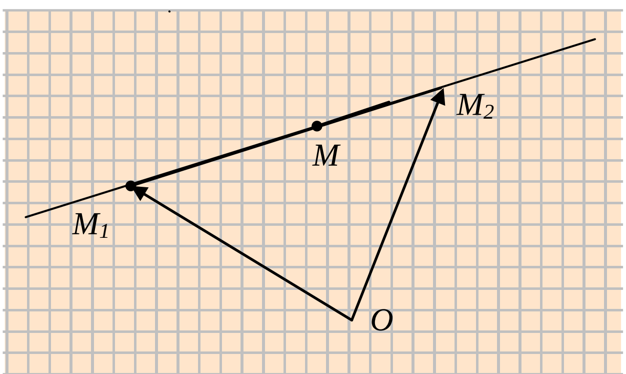

Рис. 14

Поэтому уравнение $\overline{M} = \overline{M_1} + t\overline{M_1M_2},\ \ 0 \le t \le 1,$ является параметрическим уравнением отрезка [M_1, M_2] в *векторной* форме. Так как $\overline{M_1M_2} = \overline{M_2} - \overline{M_1}$, то уравнение отрезка можно записать в следующем виде:

$$\overline{M} = (1-t)\overline{M_1} + t\overline{M_2},\ \ 0 \le \mathrm{t} \le 1.$$

Пусть точки M, M_1 и M_2 имеют соответственно координаты (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2), тогда:

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

2.4. Основные задачи на плоскости

Расстояние между двумя точками

Пусть на плоскости OXY заданы две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, тогда расстояние d между ними равно длине вектора $\overline{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$:

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - x_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - y_1)^2}\ .$$

Деление отрезка в заданном отношении

Необходимо разделить отрезок AB (см. рис. 5), соединяющий точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в заданном отношении $\lambda>0$, т.е. найти координаты точки $M(x;y)$ отрезка AB такой, чтобы выполнялось векторное равенство $\overline{AM} = \lambda\cdot \overline{MB}$.

Запишем это равенство в координатной форме:

$$(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} = \lambda(x_2 - x\ )\bar{i} + \lambda(y_2 - y\ )\bar{j}\ .$$

Приравняв координаты векторов

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x_1,\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y_1,$$

получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

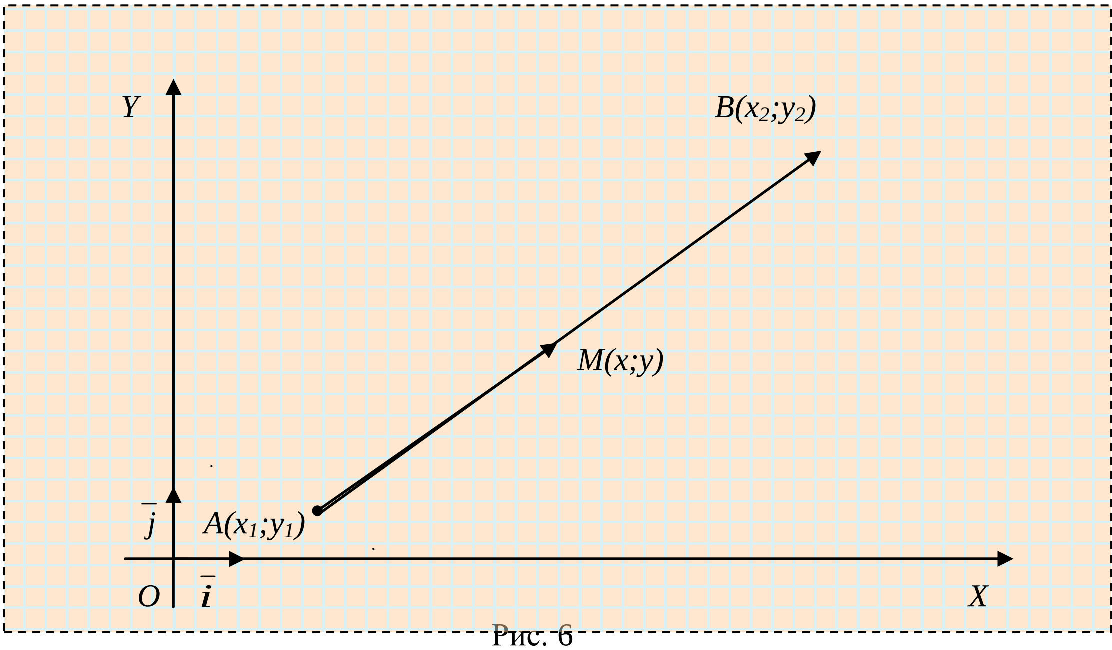

Рис. 6

Эти формулы называются *формулами деления отрезка в заданном отношении.* При $\lambda=1$ точка $M(x;y)$ является *серединой отрезка AB* и тогда

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \ y=\frac{y_1+y_2}{2}\,.$$

►***Пример 2***. Найти длину биссектрисы внутреннего угла *A* треугольника с вершинами в точках *A(1;-2)*, *B(5;4)*, и *C(-2;0)*.

В треугольнике *ABC* (см. рис. 6) биссектриса *AM* . Точка *M* делит сторону *BC* на

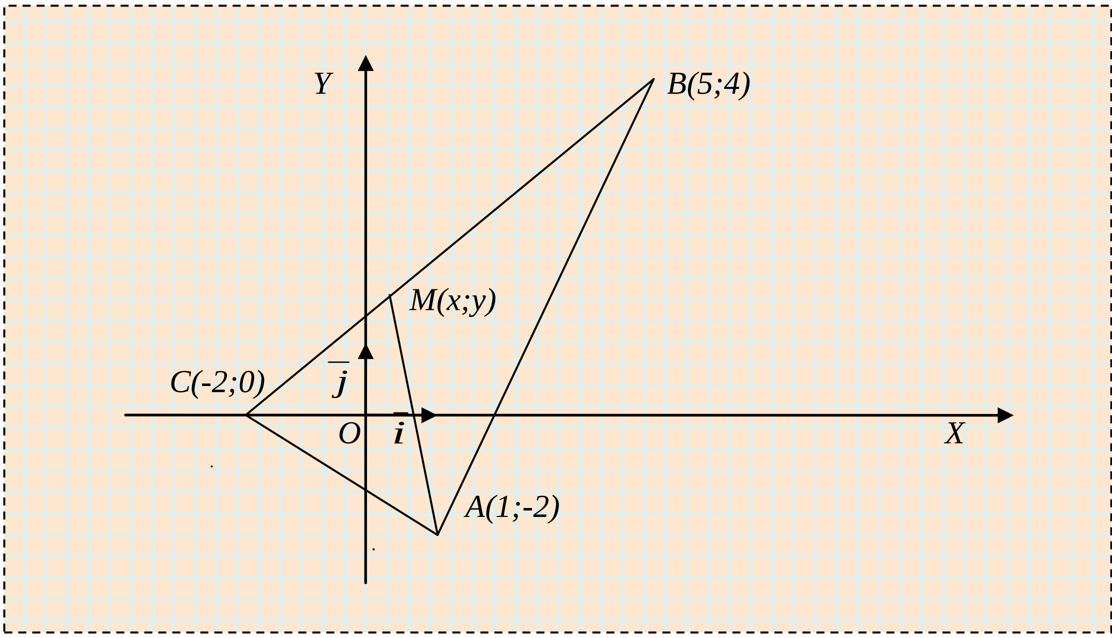

Рис. 7

части, пропорциональные прилегающим сторонам: $\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{AB}{AC}$.

Так как $AB=\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}$ и $AC=\sqrt{(-2-1)^2+(2)^2}=\sqrt{13}$, то

$\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}=2$. Координаты точки M определим, разделив отрезок в заданном отношении: *BM=2CM*:

$$x=\frac{5+2(-2)}{1+2}=\frac{1}{3},\ y=\frac{4+2(0)}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Вычислим длину отрезка $AM=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-2-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{104}}{3}$.

◀

Угол между двумя прямыми

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1 и l_2 соответственно уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ (см. рис. 9).

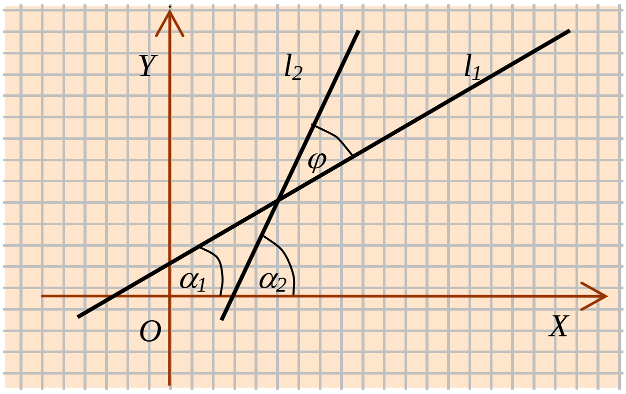

Рис. 9

Необходимо найти угол φ между прямыми l_1 и l_2. Так как $k_1=tg\alpha_1$, $k_2=tg\alpha_2$ и $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, то

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Из этой формулы вытекают условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$.

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

Пример 5.

Определить взаимное расположение прямых $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=1$ и $\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y=2$.

Уравнения прямых преобразуем к уравнениям с угловыми коэффициентами:

$$y=\frac{8}{9}x-\frac{4}{3}\ \text{ и } y=-\frac{9}{8}x-3.$$

Так $k_1=\frac{8}{9}$, $k_2=-\frac{9}{8}$ и $k_1k_2=-1$, то прямые перпендикулярны.

Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости заданы прямая l уравнением $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0;y_0)$. Расстояние от точки до прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 6.

Найти расстояние между прямыми $4x + 3y = 1$ и $4x + 3y = 10$.

На прямой $4x + 3y = 1$ выберем произвольную точку, например, *M(1;-1)* и вычислим расстояние от этой точки до другой прямой:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}.$$

2.5. Линии второго порядка на плоскости

Линией второго порядка на плоскости называется линия, задаваемая в прямоугольной системе координат уравнением второй степени относительно текущих координат. В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0, \quad (1)$$

где коэффициенты A,B,C,D,E и C действительные числа и, хотя бы одно из чисел A,B,C не равно нулю. Такое уравнение на плоскости может представлять: *окружность*, *эллипс, гиперболу, параболу, две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямую, точку или пустое множество*.

Окружность

В прямоугольной системе координат окружность с центром в точке $A(a;b)$ радиуса R определяется уравнением

$$(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=R^2. \quad (2)$$

Раскрыв скобки в этом уравнении, получим:

$$x^2+y^2\text{-}2ax\text{-}2ay+a^2+b^2\text{-}R^2=0.$$

Сравнив последнее уравнение с уравнением (1), видим, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах переменных равны и нет члена с произведением переменных. Следовательно, имеет смысл рассмотреть уравнение

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0. \quad (3)$$

Уравнение (3) разделим на $A\neq 0$ и выделим полные квадраты относительно x и y:

$$x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}. \quad (4)$$

Если $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}>0$, то уравнение (4) – уравнение окружности с центром в точке $M(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A})$ и радиуса $R=\sqrt{\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}}$.

Если $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}=0$, то уравнение (4) представляет одну точку $M(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A})$.

Если же $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}<0$, то уравнение (4) не определяет ни одну точку.

Эллипс

Эллипсом, называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, при условии, что эта величина больше расстояния между фокусами.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой, проходящей через фокусы F_1 и F_2, а начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2 (см. рис. 1). Пусть расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2c$. Тогда в выбранной системе координат $F_1\ (-c,\ 0)$, $F_2\ (c,\ 0)$ и справедливы равенства:

$$MF_1 + MF_2 = 2a, MF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, MF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

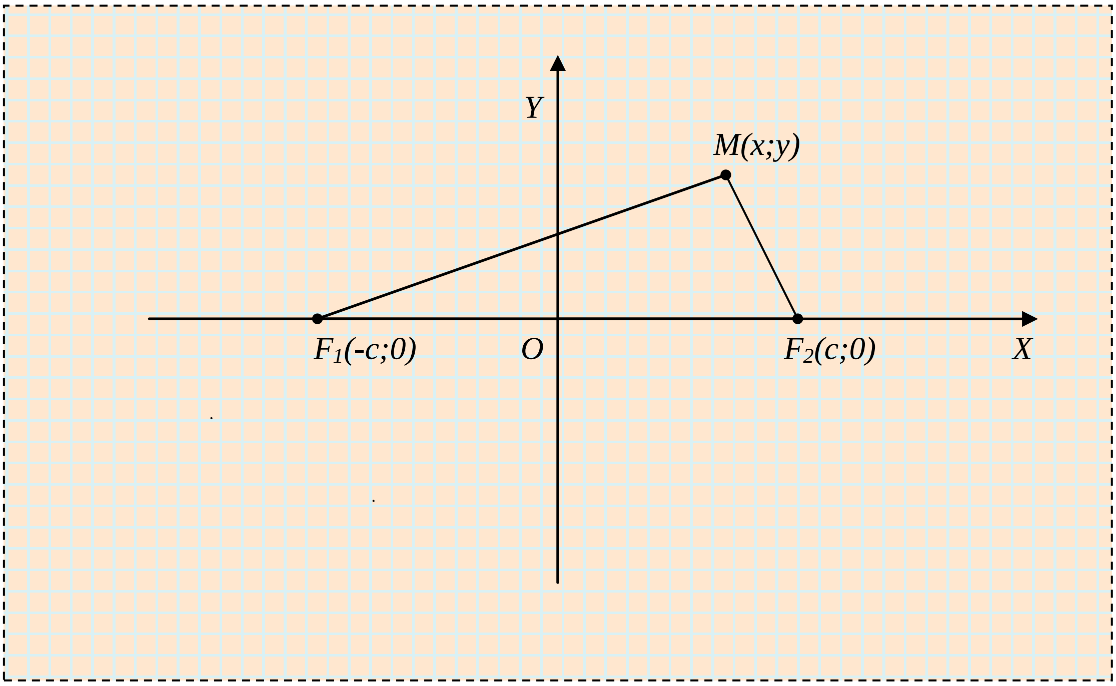

Рис. 8

После возведения в квадрат и упрощения получим уравнение:

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Обозначив $b^2 = a^2 - c^2\ (a > c)$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

По уравнению эллипса определим его свойства. Уравнение (5) содержит x и y в четных степенях, следовательно, координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром его симметрии, причем эту точку называют центром эллипса (см. рис. 2).

Точки пересечения эллипса с координатными осями: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $A_3(0;-b)$, $A_4(0;b)$ называют вершинами эллипса. Числа $2a$ и $2b$ называют соответственно большой и малой осями эллипса, a и b – большая и малая полуоси эллипса.

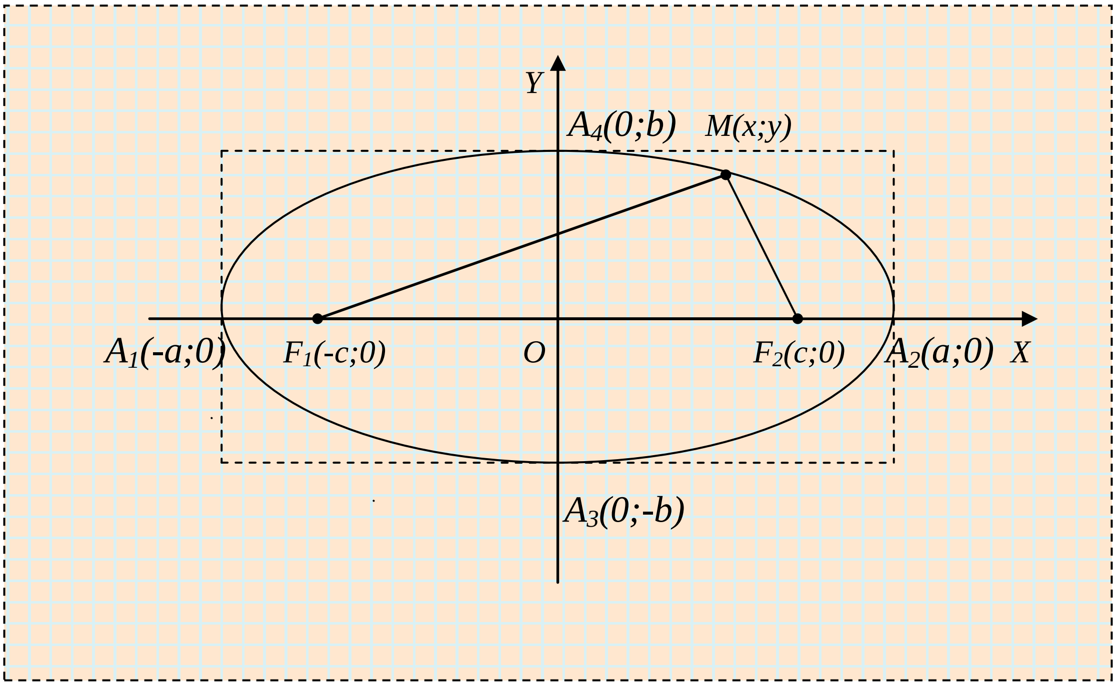

Рис. 9

Из уравнения эллипса следует: $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Следовательно, линия эллипса находится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Кроме того, если $|x|$ возрастает, то $|y|$ убывает, и наоборот, если $|y|$ возрастает, то $|x|$ убывает.

Гипербола

Гиперболой, называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, от каждой из которых до двух заданных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, при условии, что эта величина $\neq 0$ и меньше расстояния между фокусами (см. рис. 3):

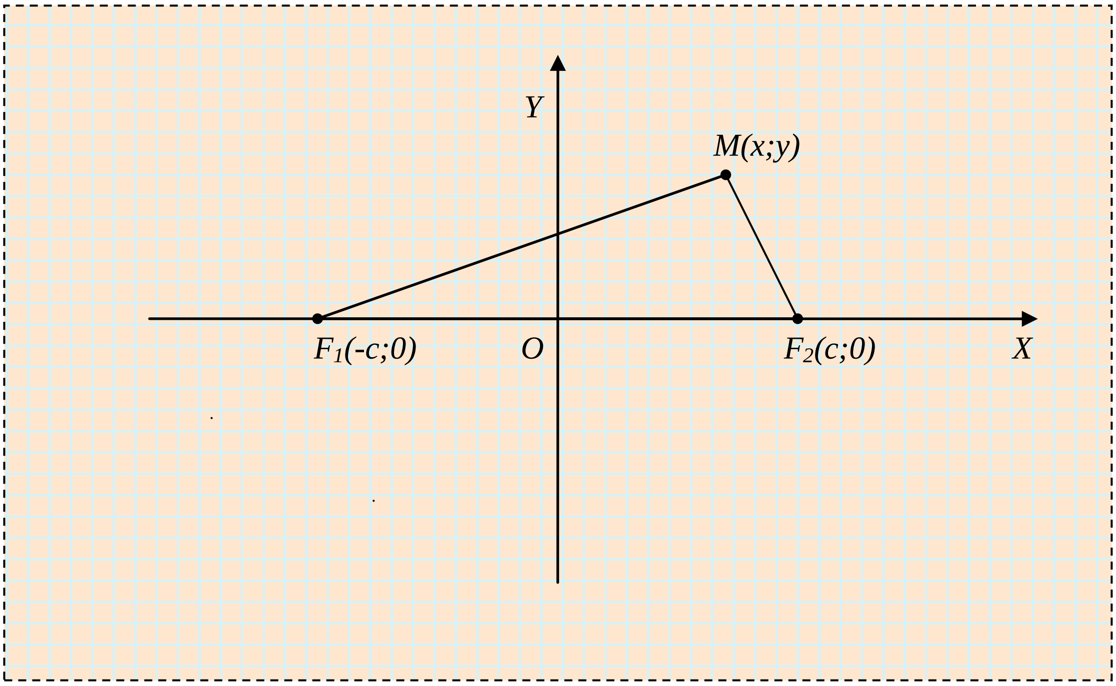

Рис. 10

$$\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a, 2a < 2c.$$

Отсюда, учитывая, что

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \text{ и } MF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, MF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2},$$

получим

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Далее, избавившись от иррациональностей, придем к каноническому уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b^2 = c^2 - a^2. \tag{6}$$

По этому уравнению определим свойства гиперболы. Уравнение (6) содержит x и y в четных степенях, следовательно, координатные оси являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – центром его симметрии (см. рис. 4). Центр симметрии гиперболы называется центром гиперболы.

Число a называют действительной полуосью гиперболы, число b – мнимой полуосью гиперболы, $2a$ и $2b$ - соответственно действительной и мнимой осями гиперболы. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ - вершины гиперболы, $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы (см. рис. 4).

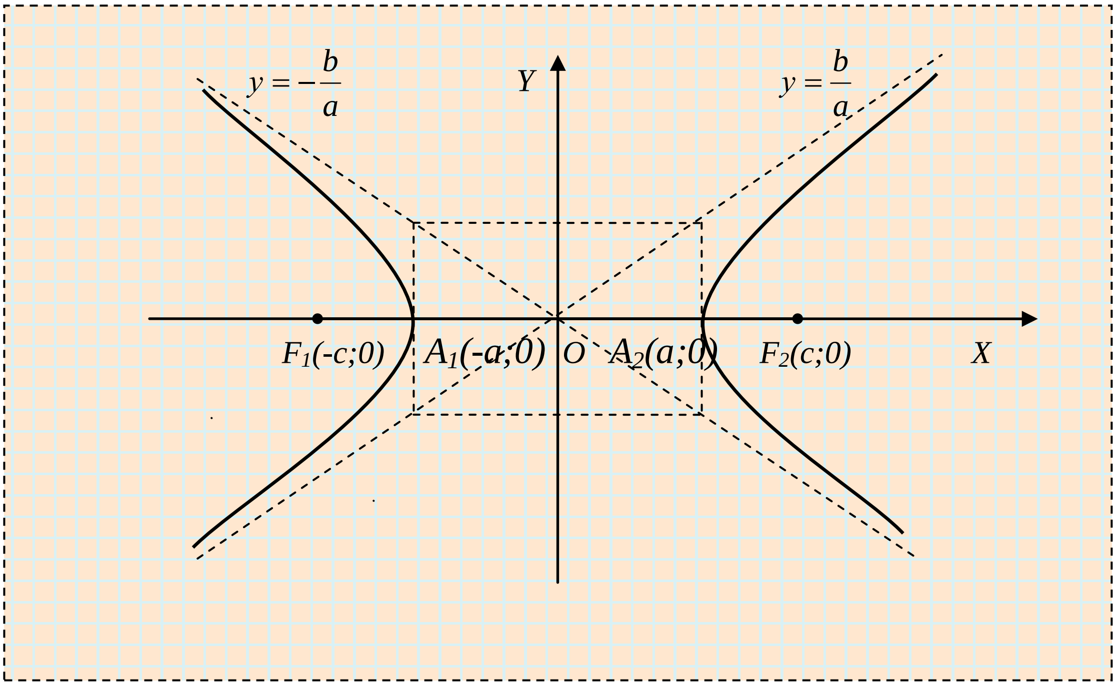

Рис. 11

Гипербола имеет асимптоты $y=-\frac{b}{a}$ и $y=\frac{b}{a}$.

Парабола

Параболой, называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки *F* (фокуса) и заданной прямой, называемой директрисой.

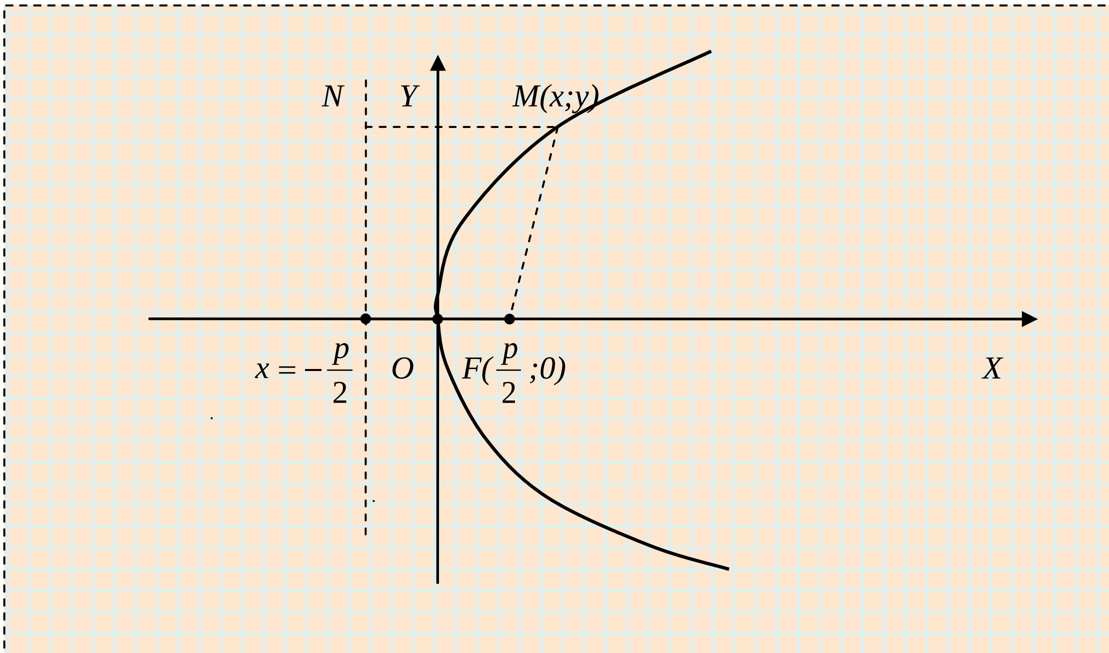

Рис. 12

Пусть расстояние между директрисой и фокусом равно р, прямоугольную систему координат зададим, направив ось абсцисс по перпендикуляру, опущенному из фокуса на директрису, начало координат совместим с серединой этого перпендикуляра (см. рис 5). В таком случае уравнение директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$, а фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Так как NM=FM, то

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получим каноническое уравнение параболы

$$y^2=2px.$$

Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

преобразуем путем поворота системы координат на угол α так, чтобы слагаемое с произведением переменных отсутствовало. В этом уравнении, применив формулы поворота системы координат

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases}$$

получим

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+$$
$$+2D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0.$$

Запишем коэффициент при произведении $x'y'$ и приравняем его к нулю:

$$-2A\sin\alpha\cos\alpha+2B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2C\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

Из этого равенства можно получить такие уравнения

$$tg2\alpha=\frac{2B}{A-C},\ ctg2\alpha=\frac{A-C}{2B},\ Btg^2\alpha+(C-A)tg\alpha+B=0.$$

Решив одно из их, найдем угол α, вычислим значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и, применив формулы поворота, получим уравнение

$$A_1x'^2+C_1y'^2+2D_1x'+2E_1y'+F=0.$$

Далее, это уравнение необходимо упростить, выделив полные квадраты относительно переменных x' и y'.

►***Пример 1***. Определить вид линии по его уравнению

$$9x^2+4xy+6y^2=10.$$

Преобразуем уравнение, применив формулы поворота системы координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$9(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 = 10.$$

Запишем коэффициент при произведении переменных x' и y' и приравняем его к нулю:

$$4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, разделив уравнение на $\cos^2\alpha$, получим

$$2tg^2\alpha + 3tg\alpha - 2 = 0.$$

Решим уравнение: $tg\alpha = \frac{1}{2}$ или $tg\alpha = -2$.

Возьмем значение $tg\alpha = \frac{1}{2}$, отсюда $\alpha = arctg0{,}5 \approx 26{,}5^\circ$.

Далее, вычислим: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и получим формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'). \end{cases}$$

Подставим x и y в исходное уравнение и упростим:

$$10x'^2 + 5y'^2 = 10.$$

Это уравнение эллипса, разделив на 10, получим каноническое уравнение:

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Полуоси эллипса $a = 1, b = \sqrt{2}$ (см. рис. 6) .

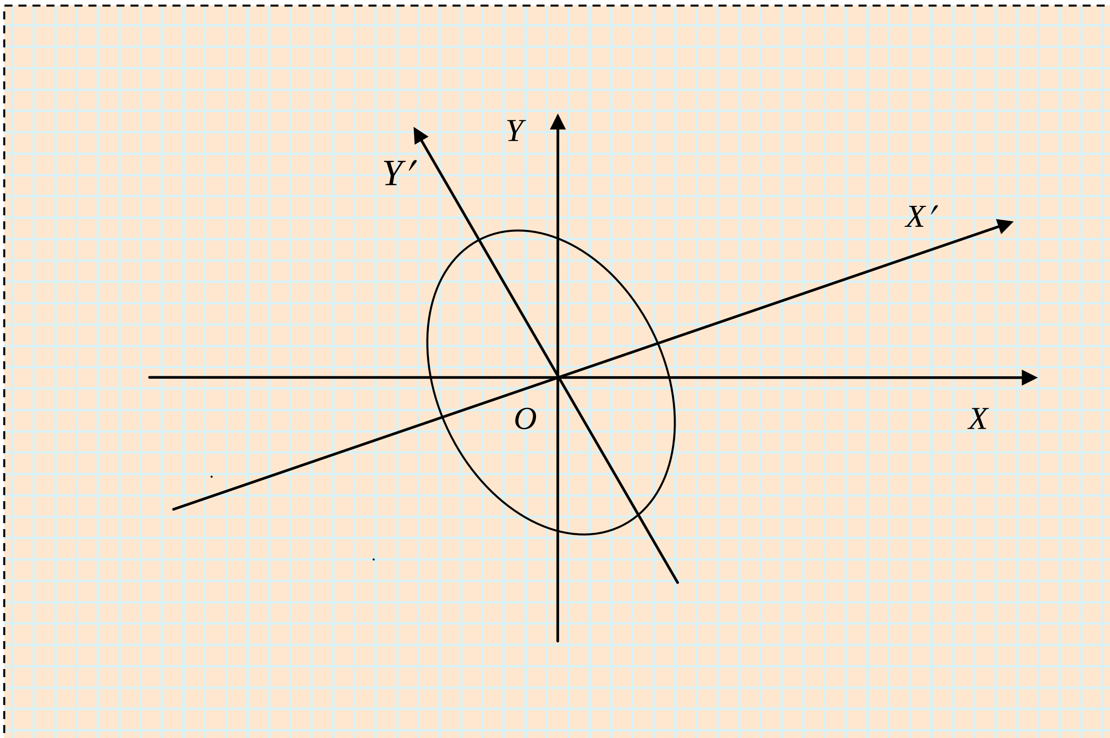

Рис. 13.

◄

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0 .$$

Преобразуем уравнение, применив формулы поворота системы координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 -$$
$$-10(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) - 6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 25 = 0.$$

Коэффициент при произведении переменных x' и y':

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 .$$

Отсюда получаем уравнение

$$tg^2\alpha - 1 = 0 ,$$

решая его получим: $tg\alpha = 1$ или $tg\alpha = -1$.

Возьмем значение $tg\alpha = 1$, отсюда $\alpha = 45^\circ$.

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Подставим x и y в исходное уравнение и упростим:

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0\,.$$

Это уравнение параболы, выделим полный квадрат относительно y':

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Вершина параболы в точке $M\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ◄