

## ЭКОНОМЕТРИКА

### Лекция 7.

#### § 7. Анализ качества эмпирического уравнения множественной линейной регрессии.

Построение эмпирического уравнения регрессии является начальным этапом эконометрического анализа. Построенное по выборке уравнение зачастую бывает не совсем удовлетворительным. Поэтому одной из важнейших задач анализа является проверка качества уравнения регрессии.

Проверка статистического качества оцениваемого уравнения регрессии осуществляется по следующим направлениям:

- проверка статистической значимости коэффициентов уравнения;
- проверка общего качества уравнения регрессии;
- проверка выполнимости предварительных условий, на основании которых построено уравнение (например, проверка выполнимости предпосылок метода наименьших квадратов).

#### 1. Проверка статистической значимости коэффициентов уравнения линейной множественной регрессии.

Как и в случае парной регрессии, статистическая значимость коэффициентов множественной линейной регрессии с  $m$  объясняющими переменными проверяется на основе  $t$ -статистики

$$t = \frac{a_j}{S_{a_j}}, \quad (7.1)$$

имеющей распределение Стьюдента с  $\nu = T - m - 1$  степенями свободы. При заданном уровне значимости  $\alpha$  наблюдаемое значение  $t$ -статистики сравнивается с критической точкой  $t_{\frac{\alpha}{2}, T - m - 1}$  распределения Стьюдента.

Если  $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}, T - m - 1}$ , то коэффициент  $a_j$  считается статистически значимым. В противном случае, т.е. при  $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, T - m - 1}$ , коэффициент  $a_j$  считается статистически незначимым (слишком близким к нулю). Это означает, что фактор  $X_j$  линейно не связан с зависимой переменной  $Y$ . Его использование в уравнении регрессии в качестве одной из объясняющих переменных не является статистически оправданным. Поэтому данный фактор можно исключить из рассмотрения (без особого ущерба для оценки зависимости  $Y$  от факторных переменных). Это не приведет к существенной потере качества модели.

При проверке статистической значимости коэффициентов регрессии иногда возможно (при условии, что выборка имеет достаточный объем) использовать *грубое правило*:

если  $|t| \leq 1$  (т.е.  $|a_j| \leq S_{a_j}$ ), то соответствующий коэффициент считается статистически незначимым;

если  $1 < |t| \leq 2$  (т.е.  $S_{a_j} < |a_j| \leq 2S_{a_j}$ ), то коэффициент  $a_j$  считается статистически мало (относительно) значимым. В этом случае рекомендуется провести более точный анализ с использованием таблиц критических точек распределения Стьюдента;

если  $2 < |t| \leq 3$ , то коэффициент  $a_j$  считается статистически значимым. Данное утверждение можно принять на веру при числе степеней свободы  $\nu > 20$  и  $\alpha \leq 0,05$ ;

если  $|t| > 3$ , то коэффициент  $a_j$  считается статистически сильно значимым. Вероятность ошибки в данном случае при достаточном объеме выборки не превосходит 0,01.

## 2. Проверка общего качества уравнения линейной множественной регрессии.

После проверки значимости каждого из коэффициентов регрессии обычно проверяется общее качество уравнения. Для этого используется значение *коэффициента детерминации*

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2}. \quad (7.2)$$

Этот коэффициент описывает долю разброса значений зависимой переменной  $Y$ , объясненной уравнением регрессии. Он принимает значения между нулем и единицей ( $0 \leq R^2 \leq 1$ ). Чем ближе значение коэффициента к единице, тем точнее уравнение регрессии объясняет поведение зависимой переменной  $Y$ . Поэтому естественно построить регрессию с наибольшим значением  $R^2$ .

Для множественной регрессии коэффициент детерминации является неубывающей функцией числа объясняющих переменных. Добавление новой объясняющей переменной может лишь дополнить, но не сократить информацию, объясняющую поведение зависимой переменной. Это, по крайней мере, не увеличивает область неопределенности в поведении  $Y$ .

Иногда при расчете коэффициента детерминации для получения несмещенных оценок в формуле (7.2) делается поправка на число степеней свободы. *Скорректированный (исправленный) коэффициент детерминации вычисляется по формуле:*

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2 / (T - m - 1)}{\sum (y_t - \bar{y})^2 / (T - 1)}. \quad (7.3)$$

Знаменатель дроби в формуле (7.3) ( $\sum (y_t - \bar{y})^2 / (T - 1)$ ) представляет собой несмещенную оценку *общей дисперсии* – дисперсии отклонений значений переменной  $Y$  от  $\bar{y}$ . При этом число ее степеней свободы равно  $(T - 1)$ . Одна степень свободы теряется при вычислении среднего значения  $\bar{y}$ . Числитель же  $\sum e_t^2 / (T - m - 1)$  является несмещенной оценкой *остаточной дисперсии* – дисперсии случайных отклонений (отклонений точек наблюдения от линии регрессии). Ее число степеней свободы равно  $(T - m - 1)$ . Потеря  $(m + 1)$  степени свободы связана с необходимостью решения системы из  $(m + 1)$  линейного уравнения при определении коэффициентов.

Представление (7.3) может быть записано в виде

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T - 1}{T - m - 1}. \quad (7.4)$$

Из данного равенства вытекает, что  $\bar{R}^2 < R^2$  для  $m > 1$ . С ростом значения  $m$  скорректированный коэффициент детерминации  $\bar{R}^2$  растет медленнее, чем (обычный) коэффициент детерминации  $R^2$ . Другими словами, он корректируется в сторону уменьшения с ростом числа объясняющих переменных.  $\bar{R}^2$  увеличивается при добавлении новой объясняющей переменной тогда и только тогда, когда  $t$ -статистика для этой переменной по модулю больше единицы. Поэтому добавление в модель новых объясняющих переменных осуществляется до тех пор, пока растет скорректированный коэффициент детерминации.

Не следует абсолютизировать значимость коэффициентов детерминации. Существуют примеры неправильно специфицированных моделей, имеющих высокие коэффициенты детерминации.

### 3. Анализ статистической значимости коэффициента детерминации.

После оценки индивидуальной статистической значимости каждого из коэффициентов регрессии обычно анализируется совокупная значимость коэффициентов. Проверяется гипотеза об общей значимости - гипотеза об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов регрессии при объясняющих переменных:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Если данная гипотеза не отклоняется (при некотором уровне значимости), то делается вывод о том, что общее влияние всех  $m$  объясняющих переменных  $X_1, X_2, \dots, X_m$  модели на зависимую переменную  $Y$  можно считать статистически несущественным, а общее качество уравнения регрессии невысоким.

Проверка данной гипотезы осуществляется на основе дисперсионного анализа сравнения объясненной и остаточной дисперсий.

$$H_0 : (\text{объясненная дисперсия}) = (\text{остаточная дисперсия}),$$

$$H_1 : (\text{объясненная дисперсия}) > (\text{остаточная дисперсия}).$$

Строится  $F$ -статистика:

$$F = \frac{\sum k_t^2 / m}{\sum e_t^2 / (T - m - 1)} = \frac{\sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 / m}{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2 / (T - m - 1)}, \quad (7.5)$$

где  $\sum k_t^2 / m$  - объясненная дисперсия,  $\sum e_t^2 / (T - m - 1)$  - остаточная дисперсия. При выполнении предпосылок метода наименьших квадратов построенная  $F$ -статистика имеет распределение Фишера с числами степеней свободы  $\nu_1 = m$ ,  $\nu_2 = T - m - 1$ . Если при некотором уровне значимости  $\alpha$  выполняется неравенство  $F_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}\hat{\alpha}} > F_{\alpha; m; T - m - 1} = F_\alpha$  (где  $F_{\alpha; m; T - m - 1}$  - критическая точка распределения Фишера, соответствующая данному уровню значимости), то гипотеза  $H_0$  отклоняется в пользу  $H_1$ . Это значит, что объясненная дисперсия существенно больше остаточной дисперсии, а, следовательно, уравнение регрессии достаточно качественно отражает динамику изменения зависимой переменной  $Y$ . Если  $F_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}\hat{\alpha}} < F_{\alpha; m; T - m - 1} = F_\alpha$ , то нет оснований для отклонения  $H_0$ . Значит, объясненная дисперсия соизмерима с дисперсией, вызванной случайными факторами. Это дает основание считать, что совокупное влияние объясняющих переменных несущественно, а, следовательно, общее качество модели невысоко.

Однако на практике чаще вместо указанной гипотезы проверяют связанную с ней гипотезу о статистической значимости коэффициента детерминации  $R^2$ :

$$H_0 : R^2 = 0,$$

$$H_1 : R^2 > 0.$$

Для проверки данной гипотезы используется следующая  $F$ -статистика:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{T - m - 1}{m}. \quad (7.6)$$

Величина  $F$  при выполнении предпосылок метода наименьших квадратов и при справедливости  $H_0$  имеет распределение Фишера, аналогичное распределению  $F$ -статистики (7.5). Действительно, разделив числитель и знаменатель дроби (7.5) на общую сумму квадратов отклонений  $\sum (y_t - \bar{y})$  получим формулу (7.6):

$$F = \frac{\sum k_t^2 / \sum (y_t - \bar{y})^2}{\sum e_t^2 / \sum (y_t - \bar{y})^2} \cdot \frac{T - m - 1}{m} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{T - m - 1}{m}.$$

Из (7.6) следует, что величины  $F$  и  $R^2$  равны или не равны нулю одновременно. Если  $F = 0$ , то  $R^2 = 0$ , следовательно, переменная  $Y$  линейно не зависит от  $X_1, X_2, \dots, X_m$ .

Анализ статистики  $F$  позволяет сделать вывод о том, что для принятия гипотезы об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов линейной регрессии коэффициент детерминации  $R^2$  не должен существенно отличаться от нуля. Его критическое значение уменьшается при росте числа наблюдений и может стать сколь угодно малым.

В случае парной регрессии проверка нулевой гипотезы для  $F$ -статистики равносильна проверке нулевой гипотезы для  $t$ -статистики  $t = \frac{r_{xy} \cdot \sqrt{T-2}}{1 - r_{xy}^2}$  коэффициента

корреляции. В этом случае  $F$ -статистика равна квадрату  $t$ -статистики. Самостоятельную значимость коэффициент  $R^2$  приобретает в случае множественной регрессии.

#### 4. Проверка равенства двух коэффициентов детерминации.

Статистика Фишера используется также для проверки гипотезы о равенстве нулю не всех коэффициентов регрессии одновременно, а только некоторой их части. С помощью данного подхода можно оценить обоснованность исключения или добавления в уравнение регрессии дополнительных наборов факторов (объясняющих переменных). Это особенно важно при совершенствовании линейной регрессионной модели.

Пусть на основе выборки из  $T$  наблюдений построено эмпирическое уравнение регрессии, содержащее  $m$  объясняющих переменных:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 x_{t1} + a_2 x_{t2} + \dots + a_{m-k} x_{t,m-k} + \dots + a_m x_{tm}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (7.7)$$

и коэффициент детерминации для этой модели равен  $R_1^2$ . Исключим из рассмотрения  $k$  объясняющих переменных (не ограничивая общности – последние  $k$  переменных в уравнении (7.7)). По тем же наблюдениям (по той же выборке!) построим новое уравнение регрессии, содержащее  $m - k$  объясняющих переменных:

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 x_{t1} + b_2 x_{t2} + \dots + b_{m-k} x_{t,m-k}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (7.8)$$

для которого коэффициент детерминации равен  $R_2^2$ . Очевидно  $R_2^2 < R_1^2$ , так как каждая дополнительная переменная объясняет часть рассеивания зависимой переменной (правило сложения дисперсий!).

Для решения вопроса: «существенно ли ухудшилось качество описания поведения зависимой переменной  $Y$ » можно ответить, проверяя гипотезу

$$H_0: R_1^2 = R_2^2,$$

и используя статистику

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{T - m - 1}{k}. \quad (7.9)$$

В случае выполнения гипотезы  $H_0$  величина  $F$  имеет распределение Фишера с числами степеней свободы  $\nu_1 = k$ ,  $\nu_2 = T - m - 1$ . Действительно, соотношение (7.9) может быть переписано в виде

$$F = \frac{\underbrace{(R_1^2 - R_2^2)}_{/k}}{\underbrace{(1 - R_1^2)}_{/(T - m - 1)}}.$$

Здесь числитель описывает потерю качества уравнения в результате отбрасывания  $k$  объясняющих переменных (имеет  $\chi^2$ -распределение с  $k$  степенями свободы), а знаменатель представляет собой необъясненную дисперсию первоначального уравнения (и имеет  $\chi^2$ -распределение с  $T - m - 1$  степенями свободы). Следовательно ситуация аналогична рассмотренной выше проверке гипотезы о значимости коэффициента детерминации. Задавая определенный уровень значимости  $\alpha$ , по таблицам критических точек распределения Фишера находят  $F_{\hat{\epsilon}\delta} = F_{\alpha; \hat{\epsilon}; T-m-1}$ . Если рассчитанное по формуле (7.9) наблюдаемое значение  $F$ -статистики  $F_{\hat{\epsilon}\delta}$  превосходит критическое значение, то нулевая гипотеза о равенстве коэффициентов детерминации (а фактически, гипотеза об одновременном равенстве нулю отбрасываемых  $k$  коэффициентов регрессии) должна быть при этом уровне значимости отклонена в пользу альтернативной. В этом случае одновременное исключение рассмотрения  $k$  факторов представляется некорректным, поскольку существенно увеличивается коэффициент детерминации. Это значит, что общее качество исходного уравнения регрессии (7.7) выше, чем общее качество уравнения с отброшенными переменными. Если же, наоборот, значение  $F$ -статистики при некотором уровне значимости меньше критического, то можно сделать вывод, что при отбрасывании факторов не происходит существенного ухудшения качества уравнения регрессии (при таком уровне значимости).

Аналогичные рассуждения можно провести в случае добавления  $k$  объясняющих переменных. В этом случае рассматривается  $F$ -статистика

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{T - m - 1}{k}.$$

Следует, однако, отметить, что дополнительные переменные обычно добавляют по одной. При добавлении новых факторов (объясняющих переменных) логично использовать скорректированный коэффициент детерминации, а не стандартный, так как  $R^2$  всегда растет при добавлении новых факторов, а в скорректированном коэффициенте  $\bar{R}^2$  одновременно растет параметр  $m$ , уменьшающий значение скорректированного коэффициента детерминации. Если увеличение доли объясненной дисперсии при добавлении новой переменной незначительно, то  $\bar{R}^2$  может уменьшиться. В этом случае добавление новой переменной целесообразно.

Заметим, что для сравнения качества двух уравнений регрессии по коэффициенту детерминации  $R^2$  обязательным является требование, чтобы зависимая переменная была представлена в одной и той же форме. Например, пусть поведение зависимой переменной  $Y$  моделируется двумя уравнениями:

- линейным

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_m X_m + \epsilon$$

- лог-линейным

$$\ln Y = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 X_1 + \dots + \tilde{\alpha}_m X_m + \tilde{\epsilon}.$$

Тогда коэффициенты детерминации  $R_1^2$  и  $R_2^2$  рассчитываются по формулам:

$$R_1^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} \text{ и } R_2^2 = 1 - \frac{\sum \tilde{e}_t^2}{\sum (\ln y_t - \ln \bar{y})^2}.$$

Так как знаменатели в приведенных соотношениях различны, то прямое сравнение коэффициентов детерминации представляется некорректным.

## 5. Проверка гипотезы о совпадении уравнений регрессии для двух выборок.

$F$ -статистика используется также при проверке гипотезы о совпадении уравнений регрессии для отдельных групп наблюдений. Данная гипотеза достаточно часто проверяется с помощью теста Чоу (Chow stability test). Суть его состоит в следующем.

Пусть имеется две выборки объемов  $T_1, T_2$ , соответственно. Пусть по каждой из выборок построено уравнение регрессии:

$$y = a_{0k} + a_{1k}x_1 + \dots + a_{mk}x_m + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2. \quad (7.10)$$

Нулевая гипотеза о совпадении уравнений (точнее – о значимой близости этих уравнений) представляет собой гипотезу о равенстве соответствующих коэффициентов регрессий (7.10):

$$H_0 : a_{j1} = a_{j2}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Вычислим суммы квадратов отклонений  $S_1^2 = \sum_t e_{t1}^2$  и  $S_2^2 = \sum_t e_{t2}^2$  объясняемой переменной от первой и второй линий регрессии, соответственно.

На объединенной выборке объема  $T_1 + T_2$  будет построено еще одно уравнение регрессии с коэффициентами  $a_{j0}, j = 0, 1, \dots, m$ , для которого сумма квадратов отклонений равна  $S_0^2 = \sum_t e_{t0}^2$ .

Для проверки гипотезы  $H_0$  построим следующую статистику

$$F = \frac{S_0^2 - S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 + S_2^2} \cdot \frac{T_1 + T_2 - 2m - 2}{m + 1}. \quad (7.11)$$

При условии выполнения гипотезы  $H_0$  построенная статистика имеет распределение Фишера со степенями свободы  $v_1 = m + 1, v_2 = T_1 + T_2 - 2m - 2$ . Очевидно, что если значения статистики (7.11) близки к нулю, то это означает, что  $S_0^2 \approx S_1^2 + S_2^2$ , что в силу случайности отбора данных влечет близость соответствующих коэффициентов регрессий (7.10). Если говорить точнее, то из выполнения при заданном уровне значимости  $\alpha$  неравенства  $F_{\hat{a}\hat{u}} < F_{\hat{e}\hat{\delta}} = F_{\alpha; v_1, v_2}$  следует, что нет оснований при этом уровне значимости отвергнуть нулевую гипотезу. Если же данное неравенство нарушается, т.е.  $F_{\hat{a}\hat{u}} \geq F_{\hat{e}\hat{\delta}} = F_{\alpha; v_1, v_2}$ , то нулевую гипотезу при этом уровне значимости следует отвергнуть в пользу альтернативной. Другими словами нет оснований (при выбранном уровне значимости) говорить о совпадении уравнений регрессии.

Приведенные рассуждения важны при ответе на вопрос, можно ли на всем множестве наблюдений построить единое уравнение регрессии, или это множество следует разбить на подмножества, обладающие некоторой степенью однородности. В случае временных рядов этот вопрос будет специально обсуждаться ниже при рассмотрении так называемых фиктивных переменных.

## 6. Проверка выполнимости предпосылок метода наименьших квадратов. Критерий Дарбина-Уотсона.

Статистическая значимость коэффициентов регрессии и близость к единице коэффициента детерминации  $R^2$  не гарантирует высокое качество уравнения регрессии. Можно привести конкретные примеры, иллюстрирующие данную ситуацию. Чаще всего это происходит в ситуации, когда не выполняется одна или несколько предпосылок метода наименьших квадратов. Более подробно такие ситуации будут рассмотрены ниже.

Оценивая линейное уравнение регрессии, мы предполагаем, что реальная взаимосвязь между переменными (т.е. их связь на генеральной совокупности) является

линейной, а отклонения от прямой регрессии являются случайными, независимыми друг от друга величинами с нулевым средним и постоянной дисперсией. Если эти предположения не выполняются, то оценки коэффициентов регрессии не обладают одним или несколькими свойствами – несмещенности, эффективности и состоятельности. Потому анализ их значимости будет при этом неточным.

Среди причин, приводящих к подобным ситуациям можно выделить следующие: либо зависимость между переменными имеет на самом деле нелинейный характер, либо имеется существенный фактор, не учтенный в уравнении регрессии. Действительно, если реальная связь между переменными нелинейна, то отклонения относительно линии регрессии не будут носить характер случайных, в этих отклонениях будет присутствовать определенные закономерности, которые зачастую выражаются в существенном преобладании пар соседних отклонений  $\varepsilon_{t-1}$  и  $\varepsilon_t$  с совпадающими знаками над числом пар с различными знаками. Отсутствие же в уравнении некоторого существенного фактора может послужить причиной устойчивых отклонений зависимой переменной в ту или иную сторону. Добиться выполнения предпосылок метода наименьших квадратов можно либо путем оценивания некоторой нелинейной зависимости, либо с помощью введения в уравнение дополнительных объясняющих переменных.

При статистическом анализе уравнения регрессии на начальном этапе проверяют выполнение одной из предпосылок МНК. Чаще всего начинают с проверки независимости случайных отклонений. Поскольку теоретические значения отклонений, вообще говоря, неизвестны, то проверяется статистическая независимость их оценок – отклонений  $e_t$  от линий регрессии. При этом обычно проверяется их некоррелированность, которая является необходимым, но недостаточным условием независимости. Чаще всего ограничиваются анализом не любых, а только соседних (по значениям, или по порядку следования в выборке, или по времени) отклонений  $e_t$ . Для этих величин рассчитывается коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r_{e_t e_{t-1}} = \frac{\sum (e_t - M(e_t)) \cdot (e_{t-1} - M(e_{t-1}))}{\sqrt{\sum (e_t - M(e_t))^2 \sum (e_{t-1} - M(e_{t-1}))^2}} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sqrt{e_t^2} \sqrt{e_{t-1}^2}}. \quad (7.12)$$

На практике для анализа коррелированности отклонений вместо коэффициента корреляции используют тесно связанную с ним статистику Дарбина-Уотсона  $DW$ , рассчитываемую по формуле

$$DW = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2}. \quad (7.13)$$

Действительно,

$$\sum (e_t - e_{t-1})^2 = \sum (e_t^2 - 2e_t e_{t-1} + e_{t-1}^2) = \sum e_t^2 - 2\sum e_t e_{t-1} + \sum e_{t-1}^2.$$

Тогда, в предположении  $\sum e_t^2 \approx \sum e_{t-1}^2$  статистика Дарбина-Уотсона приближенно вычисляется по формуле

$$DW \approx \frac{2(\sum e_t^2 - \sum e_t e_{t-1})}{\sum e_t^2} = 2(1 - r_{e_t e_{t-1}}). \quad (7.14)$$

Легко видеть, что если  $e_t = e_{t-1}$ , то  $r_{e_t e_{t-1}} = 1$  и  $DW = 0$ ; если же  $e_t = -e_{t-1}$ , то  $r_{e_t e_{t-1}} = 0$  и  $DW = 4$ . В любом случае  $0 \leq DW \leq 4$ .

К этому результату можно подойти с другой стороны. Если каждое следующее отклонение  $e_t$  приблизительно равно предыдущему  $e_{t-1}$  ( $e_t \approx e_{t-1}$ ), то числитель дроби в (7.14) существенно меньше знаменателя. Следовательно, статистика Дарбина-Уотсона оказывается близкой к нулю, что подтверждает наличие положительной автокорреляции

остатков первого порядка. В другом крайнем случае, если точки наблюдений поочередно отклоняются по разные стороны от линии регрессии, т.е.  $e_t \approx -e_{t-1}$ , то

$$DW \approx \frac{\sum (2e_t)^2}{\sum e_t^2} = 4. \text{ В этом случае имеет место отрицательная автокорреляция остатков}$$

первого порядка. Ситуацию случайного поведения отклонений можно смоделировать предположением, что примерно в половине случаев знаки последовательных отклонений совпадают, а в половине – противоположны. Если при этом в половине случаев  $e_t \approx e_{t-1}$ ,

$$\text{а в оставшихся } e_t \approx -e_{t-1}, \text{ то } DW \approx \frac{\sum \frac{1}{2}(2e_t)^2}{\sum e_t^2} = 2. \text{ Таким образом, условием}$$

независимости случайных отклонений является близость к двойке значения статистики Дарбина-Уотсона.

Возникает вопрос, какие значения  $DW$  можно считать статистически близкими к двум? Для ответа на этот вопрос разработаны специальные таблицы статистики Дарбина-Уотсона, позволяющие при данном числе наблюдений  $T$ , количестве объясняющих переменных  $m$  и заданном уровне значимости  $\alpha$  определять критические точки наблюдаемой статистики  $DW$ . При заданных значениях  $\alpha$ ,  $T$  и  $m$  указываются два числа:  $d_l$  - нижняя граница и  $d_u$  - верхняя граница. Выводы осуществляются по следующей схеме.

Если  $DW < d_l$ , то это свидетельствует (при заданном уровне значимости  $\alpha$ ) о положительной автокорреляции остатков. Если  $DW > 4 - d_l$ , то это свидетельствует (при заданном уровне значимости  $\alpha$ ) об отрицательной автокорреляции остатков. Если  $d_u < DW < 4 - d_u$ , то нет оснований отвергнуть гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков. Если же  $d_l \leq DW \leq d_u$  или  $4 - d_u \leq DW \leq 4 - d_l$ , то значения статистики находятся в области неопределенности – нулевая гипотеза не может быть ни принята, ни отвергнута.

Не обращаясь к таблице критических точек статистики Дарбина-Уотсона, можно пользоваться «грубым» правилом и считать, что автокорреляция остатков отсутствует, если  $1,5 \leq DW \leq 2,5$ . Для более надежного анализа следует обратиться к таблицам. При наличии автокорреляции остатков полученное уравнение регрессии обычно считается неудовлетворительным.

Статистический анализ построенной регрессии является сложным и многоступенчатым. Однако базовыми приемами этого анализа считаются проверка статистической значимости коэффициентов регрессии и коэффициента детерминации, а также анализ автокорреляции остатков с помощью статистики Дарбина-Уотсона.