

Лекция 31

Глава 3. Аналитическая геометрия в пространстве

3.1. Плоскость в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $OXYZ$ даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору.

Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости, тогда векторы $\vec{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0$. Отсюда получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости.

Общее уравнение плоскости

Общим уравнением плоскости называется уравнение первой степени относительно переменных x, y и z :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть в пространстве $OXYZ$ даны три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости, тогда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ расположены в одной плоскости, они компланарны и их смешанное произведение равно нулю: $\overline{M_1M} \overline{M_1M_2} \overline{M_1M_3} = 0$. Отсюда получим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

В пространстве $OXYZ$ возьмем три точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ и $M_3(0; 0; c)$. Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим уравнение

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Нормальное уравнение плоскости

Уравнение

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где α, β, γ - углы между нормальным вектором плоскости и координатными осями OX, OY, OZ соответственно, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, называется *нормальным уравнением плоскости*.

Чтобы привести общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормальному необходимо умножить его на множитель

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак выбирается противоположным знаком коэффициента D .

3.2. Основные задачи в пространстве

Угол между плоскостями

В пространстве $OXYZ$ заданы две плоскости α и β :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Угол между этими плоскостями равен углу φ между их нормальными векторами

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Из этой формулы следуют условия перпендикулярности и параллельности плоскостей.

Если плоскости α и β перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Значит, скалярное произведение $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это равенство есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Если плоскости α и β параллельны, то параллельны и их нормальные вектора $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это равенство есть необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть в пространстве $OXYZ$ заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

► **Пример 1.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(1;0;0)$ и $M_3(0;0;1)$.

Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка плоскости, тогда векторы $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$ и $\vec{M_1M_3}$ расположены в этой плоскости, они компланарны и их смешанное произведение равно нулю: $\vec{M_1M} \vec{M_1M_2} \vec{M_1M_3} = 0$. Отсюда получим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-x + y - z + 1 = 0.$$

◀

► **Пример 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(0;1;1)$ и параллельной вектору $\vec{s} = (1;1;0)$.

Если $M(x; y; z)$ - произвольная точка плоскости, то векторы $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$ и $\vec{s}$ компланарны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x - y + z = 0.$$

◀

► **Пример 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0;-1;1)$ и линию пересечения плоскостей $x - 2y + 3z - 4 = 0$ и $x + y - 6z + 8 = 0$.

Линия пересечения двух плоскостей - прямая. На этой прямой найдем две точки. Для этого решим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + y - 6z + 8 = 0. \end{cases}$$

Для её решения применим метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -6 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right).$$

Система имеет бесконечно много решений, её общее решение:

$$x = 3p - 4, y = 3p - 4, z = p, p \in R.$$

Два частных решения, две точки $M_2(-4;-4;0)$ и $M_3(-1;-1;1)$.

Теперь необходимо записать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;-1;1)$, $M_2(-4;-4;0)$ и $M_3(-1;-1;1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-y + 3z - 4 = 0.$$



3.3. Прямая в пространстве

Общее уравнение прямой

Прямую в пространстве можно определить как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Пусть заданы две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если нормальные векторы этих плоскостей не коллинеарные, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

определяет прямую.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Зададим прямую l в пространстве при помощи точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s} = (m; n; p)$ параллельного прямой l . Эти условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую. Вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ называется направляющим вектором прямой. Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка прямой l (см. рис. 1).

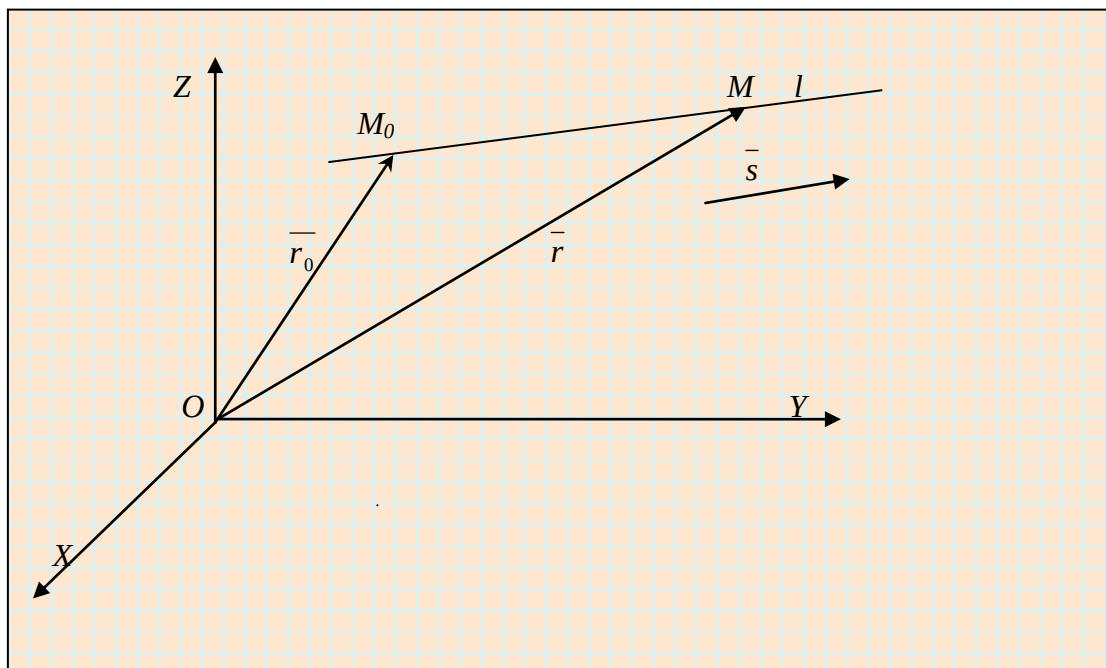


Рис. 1

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, следовательно,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}, t \in R.$$

Три вектора $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M},$$

поэтому справедливо равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, t \in R.$$

Полученное равенство называется *векторным уравнением прямой*. Здесь множитель t может принимать любые числовые значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Если векторное равенство записать в координатной форме, то получим *параметрическое уравнение прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in R,$$

где скалярный множитель t называется *параметром*.

Примеры

1. Написать уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(1,-1,2)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y + z + 2 = 0$.

Вектор $\vec{n} = (2; -3; 1)$ перпендикулярен данной плоскости и, значит, параллелен прямой l . Теперь параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

2. Найти значения t , при которых прямая

$$\begin{cases} x = 1 + mt, \\ y = 2 - t, \\ z = t \end{cases}$$

лежит в плоскости $2x - y + z = 0$.

Прямая лежит в плоскости, если координаты всех точек прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Отсюда следует, что после подстановки x , y и z из уравнения прямой в уравнение данной плоскости, получим равенство

$$2(1+mt) - (2-t) + t = 0,$$

которое должно выполняться при всех значениях t . Полученное равенство справедливо при всех t только тогда, когда $m = -1$.

Коническое уравнение прямой

Пусть $\vec{s} = (m; n; p)$ - направляющий вектор прямой и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит на этой прямой. Если $M(x; y; z)$ - произвольная точка прямой, то вектор $\overrightarrow{MM_0}$ коллинеарен вектору $\vec{s}$ и координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Полученное уравнение называется *каноническим уравнением прямой*.

Уравнение прямой проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

возьмем в качестве направляющего вектора прямой и из канонического уравнения прямой получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение называется уравнением прямой проходящей через две точки.

Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых

Две прямые заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Условие параллельности и перпендикулярности прямых равносильно коллинеарности и перпендикулярности направляющих векторов этих прямых.

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Значит, скалярное произведение

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Если прямые параллельны, то параллельны и их нормальные вектора, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3.4. Прямая и плоскость в пространстве

В пространстве заданы прямая и плоскость своими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m; n; p)$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A; B; C)$ коллинеарны, т.е.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Прямая и плоскость параллельны, когда эти векторы перпендикулярны, т.е.

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Точка пересечения прямой с плоскостью

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему двух уравнений

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение прямой запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

После подстановки получим

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Отсюда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Далее необходимо вычислить координаты точки.

3.5. Поверхности второго порядка

Сфера

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2.$$

Цилиндрические поверхности

Поверхности, составленные из всех прямых, пересекающих данную линию l и параллельных данной прямой, называются цилиндрическими поверхностями.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{ эллиптический цилиндр}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{ гиперболический цилиндр}$$

$$y^2 = 2px \quad - \text{ параболический цилиндр}$$

Конические поверхности

Поверхность составленная из всех прямых пересекающих данную линию l , и проходящих через данную точку p , называются конической поверхностью.

$$\text{Уравнение конической поверхности: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ эллипсоид}$$

Гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - однополостный гиперболоид}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ - двуполостный гиперболоид}$$

Параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \text{ - эллиптический параболоид}$$

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \text{ - гиперболический параболоид.}$$