БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Э К О Н О М И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т
КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Линейные операторы и квадратичные формы

Конспект лекций
для студентов экономических специальностей

Составил В. С. Мастяница

2010 г

Глава 1. Линейные преобразования

1.1. Основные понятия

Линейные операторы – фундаментальное понятие матричной алгебры. Рассмотрим линейное пространство R^n.

Если задан закон, по которому каждому вектору $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то говорят, что задан *оператор* A, действующий из R^n в R^n, и записывают:

$$\overline{y} = A\overline{x}.$$

Оператор называют и так: *преобразование или отображение*.

Вектор $\overline{y}$ называют *образом* вектора $\overline{x}$, а сам вектор $\overline{x}$ - прообразом.

Оператор A называется *линейным,* если для любых двух векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из пространства R^n и любого действительного числа λ справедливы равенства:

1. $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y},$ (аддитивность оператора);
2. $A(\lambda\overline{x}) = \lambda A\overline{x},$ (однородность оператора).

Пусть в пространстве R^n задан базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$ и возьмем произвольный вектор. Так как любой вектор в базисе представляется единственным образом, то справедливо равенство

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}.$$

Из линейности оператора A следует:

$$A\overline{x} = A(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}) = x_1 A(\overline{e_1}) + x_2 A(\overline{e_2}) + \ldots + x_n A(\overline{e_n}).$$

Каждый вектор $A(\overline{e_1}), A(\overline{e_2}), \ldots, A(\overline{e_n})$, как вектор пространства R^n, можно разложить в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$:

$$A(\overline{e_i}) = a_{1i}\overline{e_1} + a_{2i}\overline{e_2} + \ldots + a_n i\overline{e_n}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
A\overline{x} =& x_1(a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \cdots + a_{n1}\overline{e_n}) + \\
&+ x_2(a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \cdots + a_{n2}\overline{e_n}) + \cdots + \\
&+ x_n(a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \cdots + a_{nn}\overline{e_n}) = \\
&= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\overline{e_1} + \\
&+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\overline{e_2} + \cdots + \\
&+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\overline{e_n}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, вектор $\overline{y} = A\overline{x}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$ имеет координаты $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и справедливо разложение:

$$\overline{y} = A\overline{x} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + \cdots + y_n\overline{e_n}.$$

В силу единственности разложения любого вектора получим равенства:

$$\begin{aligned}
&y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
&y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
&\cdots \\
&y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Матрица $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора *A*.

Каждому линейному преобразованию линейного пространства R^n соответствует матрица порядка *n* и наоборот каждой матрице порядка *n* соответствует линейное преобразование линейного пространства R^n.

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису.

Пусть *A*-матрица линейного преобразования в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$. Предположим, что необходимо перейти к новому базису $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \ldots \overline{e'_n}$. В этом базисе линейному преобразованию соответствует матрица A'. Какая связь матрицами *A* и A'?

Запишем уравнения перехода от старого базиса к новому:

$$\begin{cases} \overline{e_1} = c_{11}\overline{e'_1} + c_{12}\overline{e'_2} + \cdots + c_{1n}\overline{e'_n}, \\ \overline{e_2} = c_{21}\overline{e'_1} + c_{22}\overline{e'_2} + \cdots + c_{2n}\overline{e'_n}, \\ \cdots \\ \overline{e_n} = c_{n1}\overline{e'_1} + c_{n2}\overline{e'_2} + \cdots + c_{nn}\overline{e'_n} \end{cases}$$

с матрицей перехода

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Под действием линейного преобразования *A* вектор преобразуется в вектор $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, значит, в старом базисе справедливо равенство:

$$Y = AX \text{ , где } X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Соответственно, в новом базисе

$$Y' = A'X' \text{ , где } X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}, Y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Найдем соотношение между матрицами *A* и A'.

Равенство $X = CX'$ умножим слева на *A*: $AX = ACX'$.

Учитывая равенство $Y = AX$, получим: $Y = ACX'$.

Далее, так как $Y = CY'$, то $CY' = ACX'$ и $Y' = C^{-1}ACX'$.

Сравнив равенства $Y' = A'X'$ и $Y' = C^{-1}ACX'$, получим $A' = C^{-1}AC$.

Матрицы *A* и *B* одного порядка называются *подобными*, если найдется такая невырожденная матрица *C* того же порядка, для которых справедливо равенство

$$B = C^{-1}AC.$$

Следовательно, матрицы, соответствующие одному линейному преобразованию в различных базисах, подобны.

►***Пример 1***. В базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ задано линейное преобразование с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Необходимо найти матрицу этого линейного преобразования в базисе $\overline{e_1'} = \overline{e_1}, \overline{e_2'} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$.

Запишем сначала матрицу перехода от базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ к базису $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}: C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим обратную к ней матрицу: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

◄

1.2. Собственные векторы и значения матрицы

Ненулевой вектор $\overline{x}$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A, если выполняется равенство $A\overline{x} = \lambda \overline{x}$, где λ действительное число. Число λ называется *собственным числом* (или *характеристическим числом)* матрицы A.

Из определения следует, что собственный вектор под действием матрицы преобразуется в вектор, коллинеарный самому себе, так как умножается на число λ. Несобственные векторы под действием матрицы преобразуются более сложным образом.

Равенство $A\overline{x} = \lambda \overline{x}$ запишем в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Для вычисления собственного вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получили однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0_n. \end{cases}$$

Для существования ненулевого решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Запишем матрицу системы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Следовательно, должно выполняться равенство:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель $|A-\lambda E|$, то получится многочлен n-й степени относительно λ:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 .$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы *A*. Его коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ зависят от элементов матрицы *A*. Отметим, что

$$a_n = (-1)^n,\ a_0 = |A| .$$

Уравнение

$$|A-\lambda E| = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

называется *характеристическим уравнением* матрицы *A*.

Корни характеристического уравнения матрицы *A* называются *собственными значениями* матрицы *A*.

Характеристический многочлен матрицы не зависит от выбора базиса. Действительно, пусть характеристический многочлен $|A-\lambda E|$ определен в базисе, а характеристический многочлен $|A'-\lambda E|$ получен в базисе $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \ldots \overline{e'_n}$ и известна матрица C перехода от базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$ к базису $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \ldots \overline{e'_n}$.

Так как $A' = C^{-1}AC$, то

$$|A'-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A-\lambda E)C| .$$

Далее, учтем, что определитель произведения матриц одного порядка равен произведению определителей матриц:

$$|A'-\lambda E| = |C^{-1}||(A-\lambda E)||C| = |C^{-1}||C||(A-\lambda E)| = |(A-\lambda E)| .$$

Следовательно, равенство

$$|A'-\lambda E| = |(A-\lambda E)|$$

справедливо независимо от выбора базиса.

►***Пример 1***. Найти собственные числа и векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Сначала найдем характеристический многочлен матрицы *A:*

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Собственные числа матрицы *A* являются корнями ее характеристического уравнения

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 .$$

Вычислим их. Так как

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -\lambda^3 + 4\lambda - \lambda + 2 = -\lambda(\lambda^2-4) - (\lambda-2) = -(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$$

то матрица *A* имеет два собственных числа: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Найдем собственные векторы для каждого собственного числа.

Если $\lambda_1 = 2$, то для соответствующего собственного вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ получим матричное уравнение: $A\overline{x} = 2\overline{x}$ или $(A - 2E)\overline{x} = 0$.

Так как

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

то получим однородную систему линейных уравнений относительно координат собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение этой системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Приняв $x_3 = p$, получим $x_1 = x_3 = p, x_2 = x_3 = p$. Следовательно, собственным вектором является $\overline{x} = p(1;1;1)$, где p – произвольное отличное от нуля число.

Аналогичным способом найдем собственный вектор для $\lambda_2 = -1$. В этом случае матричное уравнение имеет вид $A\overline{x} = -\overline{x}$ или $(A + E)\overline{x} = 0$. Так как

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система эквивалентна одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Приняв $x_2 = q, x_3 = r$, получим $x_1 = -q - r$ и собственный вектор равен $\overline{x} = (-q - r; q; r)$, где q, r - произвольные не равные одновременно нулю числа.

◄

1.3. Математическая модель международной торговли

Рассмотрим задачу: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующими между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной. Это значит, чтобы не было значительного дефицита торгового баланса ни для одной страны, участвующей в торговле. Проблема эта важна, так как дефицит в торговле между странами порождает таможенные пошлины и даже торговые войны.

Для простоты рассмотрим три страны – участницы торговли S_1, S_2, S_3 с государственными бюджетами, соответственно, x_1, x_2, x_3. Предположим, что бюджет каждой страны расходуется либо внутри страны, либо на приобретение товаров в других странах.

Пусть страна S_1 тратит половину своего бюджета в своей стране, ¼ бюджета – на товары из страны S_2 и ¼ бюджета – на товары из страны S_3. Страна S_2 тратит свой бюджет поровну, т.е. по 1/3, на закупку товаров в странах S_1 , S_3 и внутри страны. И страна S_3 тратит по половине бюджета на приобретение товаров в странах S_1 и S_2, ничего не покупая внутри страны.

Запишем структурную матрицу торговли:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

После подведения итогов торговли за год каждая страна получит выручку:

$$\begin{aligned} S_1 &: \quad p_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ S_2 &: \quad p_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ S_3 &: \quad p_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2. \end{aligned}$$

. Чтобы торговля была сбалансированной , необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$p_i \geq x_i, i = 1,2,3.$$

На самом деле условием бездефицитности торговли являются равенства:

$$p_i = x_i, i = 1,2,3.$$

Действительно, пусть $p_1 > x_1$ и запишем неравенства:

$$p_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 > x_1,$$

$$p_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq x_2,$$

$$p_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \geq x_3.$$

Сложим неравенства:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)x_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)x_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x_3>x_1+x_2+x_3.$$

В итоге получили неверное соотношение:

$$x_1+x_2+x_3>x_1+x_2+x_3.$$

Следовательно, предположение $p_1>x_1$ неверно.

Условие сбалансированной торговли определяется соотношением $p_i=x_i, i=1,2,3$ или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Задача свелась к вычислению собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному числу $\lambda=1$.

Система уравнений для нахождения собственного вектора:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=0,\\ \frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=0,\\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Решим её методом Гаусса:

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Общее решение системы:

$$x_1=4p, x_2=3p, x_3=2p.$$

Следовательно, для сбалансированной торговли государственные бюджеты стран должны находиться в отношении $x_1:x_2:x_3=4:3:2$.

Глава 2. Квадратичные формы

2.1. Понятие квадратичной формы

Квадратичной формой $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется однородный многочлен, каждое слагаемое которого является или квадратом одной из этих переменных, или произведением двух разных переменных.

Например,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

является квадратичной формой от неизвестных x_1, x_2.

Квадратичная форма f от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

где $a_{ij}, i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n$ - действительные числа, называемые коэффициентами, и $a_{ij} = a_{ji}$.

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{in} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей квадратичной формы. Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то A – симметрическая матрица.

Квадратичную форму можно записывать в матричном виде. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX .$$

► **Пример 1.** Запишем квадратичную форму $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ в матричном виде. Матрица коэффициентов и матрица-столбец переменных квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T AX .$$

Определитель матрицы квадратичной формы $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, следовательно, квадратичная форма невырожденная.

◄

Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы. Квадратичная форма называется *невырожденной,* если её матрица невырожденная, т.е. её ранг равен количеству переменных, и *вырожденной,* если ранг меньше количества переменных.

2.2. Преобразование квадратичной формы при замене переменных

Пусть в квадратичной форме

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо перейти к переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам линейного преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots c_{1n} y_n, \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots c_{2n} y_n, \\ \qquad \ldots \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots c_{nn} y_n, \end{cases}$$

где $C = (c_{ij}), i = 1,2,\ldots,n, \ j = 1,2,\ldots,n,$ - невырожденная матрица преобразования, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Запишем формулы преобразования в матричном виде

$$X = CY .$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y = g(y_1, y_2, \ldots y_n) .$$

Получили квадратичную форму с переменными $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и матрицей коэффициентов

$$B = C^T A C .$$

Докажем симметричность матрицы B:

$$B^T = (C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C = B .$$

Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если существует невырожденное линейное преобразование, переводящее одну форму в другую.

Эквивалентные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.

► **Пример 2.** Дана квадратичная форма $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2 - 3x_2^2$. Выполнить линейное преобразование переменных по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_1 = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Запишем матрицу коэффициентов квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

и матрицу линейного преобразования

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица квадратичной формы для новых переменных

$$B = C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, квадратичная форма в новых переменных имеет вид:

$$f(y_1, y_2) = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3x_2^2.$$

◄

2.3. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет *канонический* вид, если она не содержит произведений различных переменных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^{\ 2} + a_{22}x_2^{\ 2} + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^{\ 2}.$$

Некоторые коэффициенты a_{ii} могут оказаться равными нулю. Количество ненулевых коэффициентов канонического вида квадратичной формы равно рангу квадратичной формы.

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи невырожденного линейного преобразования.

Квадратичная форма имеет *нормальный* вид, если в её каноническом виде ненулевые коэффициенты равны +1 или -1:

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

Количество квадратов в этой формуле равно рангу квадратичной формы.

► **Пример 3.** Квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + 12x_3^2$ имеет канонический вид, её матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$ записана в нормальном виде.

◄

2.4. Закон инерции квадратичной формы

Квадратичную форму можно привести к каноническому виду различными способами, причем канонический вид не определяется однозначно. Однако полученные разными способами канонические формы имеют общие свойства. В связи с этим сформулируем теорему.

Теорема (закон инерции квадратичной формы).

Количество слагаемых с положительными коэффициентами и количество слагаемых с отрицательными коэффициентами канонического вида квадратичной формы не зависит от способа преобразования квадратичной формы к каноническому виду.

2.5. Знакоопределенные квадратичные формы

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *определенной*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ только тогда, когда $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_n=0$. Если при этом для всех остальных значений x_1, x_2, ..., x_n $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)>0$ ($f(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0$), то квадратичная форма называется *положительно определенной (отрицательно определенной).*

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными* квадратичными формами.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *положительно (отрицательно) определена*, если в каком-нибудь каноническом виде её *нет отрицательных (нет положительных)* слагаемых.

Квадратичная форма, нормальный вид которой содержит как положительные слагаемые так и отрицательные слагаемые, называется неопределенной.

Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых содержит квадраты одного знака, называются *полуопределенными.*

Существует простой критерий, позволяющий выяснить знакоопределенность квадратичной по её матрице.

Пусть дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главными минорами квадратичной формы называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = |A|.$$

Теорема (*критерий Сильвестра*). Справедливы следующие утверждения.

1.Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X$ положительно определена тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы *A* положительны.

2. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы *A* нечетного порядка отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.

► **Пример 4.** Показать, что квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

положительно определена.

Запишем матрицу коэффициентов квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её главные миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Значит, по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена.

◄

► **Пример 5.** Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

отрицательно определена.

Действительно, матрица коэффициентов квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Знаки главных миноров чередуются:

$$\Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма отрицательно определена.

◄

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Приведем квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

к каноническому виду методом Лагранжа. Этот метод достаточно простой, необходимо е полные квадраты относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть $a_{11} \neq 0$, тогда квадратичная форма

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \right)^2$$

содержит все слагаемые с переменной x_1, что и исходная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Значит, квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_2, \ldots, x_n)$$

содержит только переменные $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Сделаем теперь преобразование переменных:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = x_2, \\ \ldots \\ y_n = x_n. \end{cases}$$

Получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + f_1(y_2, \ldots, y_n).$$

В результате таких преобразований выделили полный квадрат относительно одной переменной x_1 и квадратичную форму $f_1(y_2, \ldots, y_n)$ в предположении, что $a_{11} \neq 0$.

Пусть теперь $a_{11} = 0$ и один из коэффициентов $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ не равен нулю, например, $a_{12} \neq 0$. Сделаем предварительно замену переменных в квадратичной форме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2, \\ x_3 = z_3, \\ \ldots \\ x_n = z_n. \end{cases}$$

В результате слагаемое $2a_{12}x_1x_2$ квадратичной формы станет таким:

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2.$$

Ни одно из слагаемых ни $2a_{12}z_1^2$, ни $2a_{12}z_2^2$ не может сократиться с другими слагаемыми. Значит, и в случае, $a_{11} = 0$, после предварительной замены, появляется слагаемое с квадратом переменной z_1.

Следовательно, в любой квадратичной форме всегда можно выделить полный квадрат относительно одной переменной:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + f_1(y_2, \ldots, y_n).$$

Затем таким же способом следует выделить полный квадрат относительно другой переменной в квадратичной форме $f_1(y_2, \ldots, y_n)$. Такие преобразования необходимо выполнять до получения канонического вида квадратичной формы.

Пусть квадратичная форма записана в каноническом виде:

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots \lambda_k y_k - \lambda_{k+1} y_{k+1} - \cdots - \lambda_n y_n,$$

где все $\lambda_i, i=1,\ldots,n,$ положительные числа. После замены переменных:

$$y_i = \frac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = 1, \ldots, n,$$

получим нормальный вид квадратичной формы:

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 + z_2 + \cdots + z_k - z_{k+1} - \cdots - z_n$$

► **Пример 6.** Привести квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду. Записать линейное преобразование, которое приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду.

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выделим слагаемые, содержащие переменную x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3\right) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2\right) + x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Выделим полный квадрат относительно переменной x_2:

$$x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$$

В итоге получим $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$

Замена переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2.$$

Запишем в матричном виде уравнения замены переменных:

Замена переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2.$$

Запишем линейное преобразование в матричном виде:

$$Y = B \cdot X, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$X = C \cdot Y,\, C = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу линейного преобразования *C*. Уравнения линейного преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Матрица канонического вида квадратичной формы может быть получена следующим образом:

$$D = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

◄

► **Пример 7.** Привести квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

к каноническому виду.

Квадратичная форма не содержит квадратов переменных, матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

приводит квадратичную форму к виду:

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2(z_1^2 - z_2^2) + 2(z_1 - z_2)z_3 - 6(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 - 8z_2z_3.$$

Запишем это линейное преобразование в матричном виде:

$$X = C_1 \cdot Z,\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

В квадратичной форме

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1 z_3 - 8z_2 z_3$$

выделим полные квадраты:

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2(z_1 - z_3)^2 - 2(z_2 + 2z_3)^2 + 6z_3^2 .$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

получим канонический вид квадратичной формы

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2 .$$

Запишем последнее преобразование в матричном виде:

$$Y = C_2 \cdot Z, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Учитывая первое преобразование переменных $X = C_1 \cdot Z$ и второе преобразование $Y = C_2 \cdot Z,$ получим

$$X = C_1 \cdot Z = C_1 \cdot C_2^{-1} \cdot Y = C \cdot Y ,$$

где C- матрица перехода от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным y_1, y_2, y_3:

$$C = C_1 \cdot C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения линейного преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Матрица канонического вида квадратичной формы может быть получена следующим образом:

$$B = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

◄

2.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных

Правило приведения квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием состоит в следующем:

1. для матрицы коэффициентов квадратичной формы вычислить собственные числа и n попарно ортогональных собственных векторов, пронормировать их;
2. составить матрицу из ортонормированных собственных векторов – столбцов;
3. записать ортогональное преобразование на основе полученной матрицы.

► **Пример 8.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x,y)=3x^2+10xy+3y^2.$$

Матрица квадратичной формы $A=\begin{pmatrix}3&5\\5&3\end{pmatrix}$. Найдем её собственные числа.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2-6\lambda-16=0.$$

Отсюда собственные числа $\lambda_1=8$ и $\lambda_2=-2$.

Определим собственные векторы. Если $\lambda_1=8$, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases}-5a_1+5a_2=0,\\ 5a_1-5a_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $a_1=a_2$, приняв $a_1=a_2=p$, получим собственный вектор $\bar{a}=p(1,1)$. Для нормировки вектора примем $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и получим нормированный собственный вектор $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Для $\lambda_2=-2$ аналогичным способом получим вектор $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Векторы $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ортогональны, действительно, их скалярное произведение равно нулю:

$$(e_1,e_2)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Отсюда получим формулы преобразования координат:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y').$$

И после преобразования квадратичной формы получим:

$$f(x,y)=3x^2+10xy+3y^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\right)^2+10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\right)^2=$$

$$=8x'^2-2y'^2.$$

◄

2.8. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 2.1 -2.6 записать квадратичную форму в матричном виде

2.1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

2.2. $f(x_1, x_2) = 3x_2^2 + 6x_1x_2$.

2.3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

2.4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

2.5. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

2.6. $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$.

В задачах 2.7 – 2.12 выяснить знакоопределенность квадратичной формы

2.7. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. 1,1,3; положительно определенная.

2.8. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.1,2,2; положительно определенная.

2.9. $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.-2,3,-6; отрицательно определенная.

2.10. $f(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.-6,5,-1; отрицательно определенная.

2.11. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. 1,-4,3; неопределенная.

2.12. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. -1,-6,-5; неопределенная.

В задачах 2.13 – 2.18 квадратичные формы привести к каноническому виду методом Лагранжа. Записать линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

2.13. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.14. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2$, $\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = 2y_2 - y_3. \end{cases}$

2.15. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

2.16. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

2.17. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.18. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

В задачах 19 - 24 найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичные формы к каноническому виду.

2.19. $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2$. $f(y_1, y_2) = 11y_1^2 - y_2^2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2). \end{cases}$

2.20. $f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2$. $f(y_1, y_2) = 9y_1^2 - 25y_2^2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(y_1 - 4y_2). \end{cases}$

2.21. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3. \end{cases}$$

2.22. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}} y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3. \end{cases}$$

2.23. $f(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

$$f(y_1, y_2, y_3) = 7y_1^2 - 7y_2^2 - 7y_2^3, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2 - \dfrac{3}{\sqrt{70}} y_3, \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{7}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2 - 3\sqrt{\dfrac{2}{35}} y_3, \\ x_3 = \dfrac{3}{\sqrt{14}} y_1 + \sqrt{\dfrac{5}{14}} y_3. \end{cases}$$

2.24. $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$. $f(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$.

2.9. Ответы

2.7. 1,1,3; положительно определенная.**2.8.** 1,2,2; положительно определенная.

2.9.-2,3,-6; отрицательно определенная. **2.10.**-6,5,-1; отрицательно определенная.

2.11. 1,-4,3; неопределенная. **2.12.** -1,-6,-5; неопределенная.

2.13. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.14. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = 2y_2 - y_3. \end{cases}$

2.15. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.16. $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.17. $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.18. $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2, \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

2.19. $f(y_1, y_2) = 11y_1^2 - y_2^2, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2). \end{cases}$

2.20. $f(y_1, y_2) = 9y_1^2 - 25y_2^2, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(4y_1 + y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(y_1 - 4y_2). \end{cases}$

2.21.. $f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3. \end{cases}$

2.22. $f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}} y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3. \end{cases}$

2.23. $f(y_1, y_2, y_3) = 7y_1^2 - 7y_2^2 - 7y_2^3, \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2 - \dfrac{3}{\sqrt{70}} y_3, \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{7}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2 - 3\sqrt{\dfrac{2}{35}} y_3, \\ x_3 = \dfrac{3}{\sqrt{14}} y_1 + \sqrt{\dfrac{5}{14}} y_3. \end{cases}$

2.24. $f(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$.

Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, Мн., БГУ, 1998 г.
2. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов/. М.: ЮНИТИ, 2003 г.
3. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред проф. В.И. Ермакова, 2001 г.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.Г. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 2001г.
5. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 1. М.,2001 г.