Лекция 32,33

Векторные пространства

1. n**- мерные векторы**

Вектором в геометрии называется направленный отрезок. Если в пространстве задать прямоугольную систему координат, то каждый вектор $\bar{a}$ однозначно определяется тремя числами (своими координатами):

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Над векторами можно выполнять ***линейные*** операции: сложение векторов и умножение вектора на число.

Обобщим понятие вектора. Последовательность n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется n***- мерным вектором*** и обозначается следующим образом:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Число n называется ***размерностью*** вектора $\bar{a}$, число a_1 - ***первой координатой***, число a_2 - ***второй координатой*** и т.д.

Векторы применяются при решении экономических задач. Например, количества товаров, можно задать вектором

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а соответствующие им цены – вектором

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются ***равными,*** если равны их соответствующие координаты:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Суммой двух векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Произведением вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число λ, называется вектор

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Линейные операции над n- мерными векторами определяются через арифметические операции над их координатами. Следовательно, некоторые свойства арифметических операций справедливы и для операций над векторами:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - переместительное свойство суммы векторов;
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - сочетательное свойство суммы векторов;
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ - сочетательное свойство относительно множителей;
4. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ - распределительное свойство относительно суммы векторов;

5. $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ - распределительное свойство относительно суммы множителей;

6. существует нулевой вектор $\overline{O}=(0,0,\ldots,0)$ такой, что для любого вектора $\overline{a}$ справедливо равенство $\overline{a}+\overline{O}=\overline{a}$;

7. для любого вектора $\overline{a}$ существует противоположный вектор $-\overline{a}$, такой, что $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{O}$;

8. для любого вектора $\overline{a}$ справедливо равенство $1\overline{a}=\overline{a}$.

Множество n- мерных векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющих восьми свойствам, называется векторным или линейным пространством V.

Необходимо отметить, что элементами линейного пространства могут быть не только векторы, но объекты и другой природы.

Примеры линейных пространств.

1. Множество n- мерных векторов $\overline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ с действительными координатами, обозначается - R^n. Геометрически можно представить R^1 - числовая прямая, R^2 - плоскость с прямоугольной системой координат, R^3 - трехмерное пространство с прямоугольной системой координат.

2. Множество всех многочленов $\{P_n(x)\}$ степени не выше n, для которых операции сложения многочленов и умножения многочлена на число определены обычным образом. В качестве нулевого элемента принимается многочлен, все коэффициенты которого равны нулю. Противоположный элемент многочлену

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

является многочлен

$$-P_n(x)=-a_0x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n.$$

Следует отметить, что множество всех многочленов $\{P_n(x)\}$ степени, точно равной n, не является пространством, так как сумма многочленов степени равной n, может быть многочленом степени ниже n.

3. Множество всех матриц $\{A_{n\times m}\}$ одинаковой размерности, для которых операции сложения матриц и умножения матрицы на число определены обычными правилами. Нулевой элемент - $A=(0)_{n\times m}$, противоположный элемент - $-A=(-a_{ij})$.

4. Множество всех функций, определенных на отрезке $[a;b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Рассмотрим множество векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ линейного пространства V. Вектор

$$\overline{b}=\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\cdots+\alpha_n\overline{a_n},$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - действительные числа, называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - коэффициенты линейной комбинации.

Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие что

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \cdots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{O}.$$

Если таких чисел нельзя найти, т.е. последнее равенство выполняется только в том случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

то система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ называется ***линейно независимой***.

Для лучшего понимания линейной зависимости векторов рассмотрим примеры из пространства R^3.

1. Дана система из двух векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}$. Если эта система линейно зависима, то найдутся числа α_1, α_2, не равные нулю, для которых справедливо равенство:

   $$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} = \overline{O}.$$

   Отсюда один из векторов, например, $\overline{a_1}$ можно выразить через другой:

   $$\overline{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \overline{a_2}.$$

   Векторы, связанные таким соотношением называются коллинеарными. Значит, два вектора линейно зависимы, когда они коллинеарны.

2. Рассмотрим в пространстве R^3 систему из трех векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$. Если эти векторы линейно независимы, то найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не равные нулю, для которых

   $$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} = \overline{O}.$$

   Отсюда следует вывод: векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ компланарны.

►***Пример 1.*** Выяснить, являются ли векторы $\overline{a_1} = (1;0;1), \overline{a_2} = (1;1;0), \overline{a_3} = (0;1;1)$ линейно зависимыми.

Запишем векторное равенство

$$x_1 \overline{a_1} + x_2 \overline{a_2} + x_3 \overline{a_3} = \overline{O}$$

или

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем однородную систему уравнений относительно коэффициентов x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Для этого преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vert & 0\\ 1 & 0 & 1 & \vert & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vert & 0\\ 0 & -1 & 1 & \vert & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vert & 0\\ 0 & 0 & 2 & \vert & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vert & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vert & 0\end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы, то система имеет единственное (нулевое) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$

Значит, исходная система векторов линейно зависима.

◄

Из определения линейной зависимости векторов вытекают следующие свойства векторов.

1. Система из одного вектора линейно зависима только тогда, когда этот вектор нулевой.
2. Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
3. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.
4. Если система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$, а при добавлении к ней ещё одного вектора $\overline{b}$, становится линейно зависимой, то вектор $\overline{b}$ можно линейно выразить через векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$.

3. Размерность и базис линейного пространства

Число n называется ***размерностью*** линейного пространства V, если выполняются следующие условия:

1. В пространстве V существует система n линейно независимых векторов.
2. Любая система из $n+1$ векторов пространства V линейно зависима.

Базисом n- мерного линейного пространства V называется любая система n линейно независимых векторов этого пространства.

Если система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ - базис линейного пространства V, то любой вектор $\overline{b}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \cdots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{b},$$

где числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Например, в пространстве R^n в качестве базиса можно взять n единичных векторов:

$$\begin{aligned}\overline{e_1} &= (1;0;0;\ldots 0)\\ \overline{e_2} &= (0;1;0;\ldots 0)\\ &\ldots\\ \overline{e_n} &= (0;0;0;\ldots 1).\end{aligned}$$

Тогда любой вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пространства R^n можно представить в виде

$$\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + \cdots + a_n \overline{e_n}.$$

Количество векторов в любой линейно независимой системе векторов может быть наибольшим только в случае, когда эта система является базисом. Поэтому размерность линейного пространства равна количеству векторов в базисе.

Координаты вектора в базисе определяются однозначно. Действительно, допустим противоположное и пусть вектор $\overline{a}$ в базисе $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ имеет два различных разложения:

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \cdots + \alpha_n \overline{a_n}$$

и

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \cdots + \beta_n \overline{a_n}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\overline{O} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\overline{a_n}.$$

Так как векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ линейно независимы, то все коэффициенты в последнем равенстве равны нулю. Значит,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_n = \beta_n.$$

►***Пример 2.*** Найти базис системы векторов

$$\overline{a_1} = (1;2;1), \overline{a_2} = (2;1;3), \overline{a_3} = (1;5;0), \overline{a_4} = (2;-2;4)$$

и векторы, не входящие в базис, разложить по векторам базиса.

Запишем векторное равенство

$$x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3} + x_4\overline{a_4} = \overline{O}$$

или

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Для коэффициентов x_1, x_2, x_3 получаем однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему методом Гаусса. Для этого матрицу коэффициентов системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&5&-2\\1&3&0&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-3&3&-6\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3&-2\\0&0&0&0\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&0&4\\0&0&0&0\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&0&4\\0&0&0&0\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$x_1\overline{a_1'} + x_2\overline{a_2'} + x_3\overline{a_3'} + x_4\overline{a_4'} = \overline{O},$$

где

$$\overline{a'}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overline{a'}_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \overline{a_3'} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \overline{a_4'} = \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Векторы $\overline{a'}_1$ и $\overline{a'}_3$ образуют диагональную систему, следовательно, векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_3}$ - базис исходной системы векторов.

Представим теперь векторы $\overline{a_2}$ и $\overline{a_4}$ в виде разложения векторов базиса.

Для этого сначала векторы $\overline{a_2'}$ и $\overline{a_4'}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overline{a'}_1$ и $\overline{a'}_3$:

$$\overline{a_2'} = 3\overline{a_1'} - \overline{a_3'}, \ \overline{a_4'} = 4\overline{a_1'} - 2\overline{a_3'}.$$

Векторы $\overline{a_2}$ и $\overline{a_4}$ представляются с такими же коэффициентами по векторам базиса $\overline{a_1}$ и $\overline{a_3}$:

$$\overline{a_2} = 3\overline{a_1} - \overline{a_3}\,,\ \overline{a_4} = 4\overline{a_1} - 2\overline{a_3'}\,.$$

◀

4. Преобразование координат вектора при изменении базиса

Пусть в линейном пространстве V заданы два базиса

$$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \cdots, \overline{e_n} \tag{1}$$

и

$$\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \cdots, \overline{e_n'}\,. \tag{2}$$

Произвольный вектор $\overline{x}$ в этих базисах имеет соответствующие представления

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ и } \overline{x} = (x_1', x_2', \ldots x_n')\,.$$

Необходимо найти соотношения между координатами вектора $\overline{x}$ в базисах (1) и (2).

Предположим, что известны разложения каждого вектора базиса (2) по векторам базиса (1):

$$\begin{aligned}
&\overline{e_1'} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \cdots + a_{n1}\overline{e_n},\\
&\overline{e_2'} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \cdots + a_{n2}\overline{e_n},\\
&\cdots\\
&\overline{e_n'} = a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \cdots + a_{nn}\overline{e_n}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Выделив коэффициенты разложений, получим матрицу перехода от базиса (1) к базису (2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишем формулы (3) в матричном виде:

$$\left(\overline{e_1'}\ \ \overline{e_2'}\ \ \cdots\ \ \overline{e_n'}\right) = \left(\overline{e_1}\ \ \overline{e_2}\ \ \cdots\ \ \overline{e_n}\right)\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\left(\overline{e_1'}\ \ \overline{e_2'}\ \ \cdots\ \ \overline{e_n'}\right) = \left(\overline{e_1}\ \ \overline{e_2}\ \ \cdots\ \ \overline{e_n}\right)A.$$

Матрица A - невырожденная матрица, так как векторы базиса линейно независимы.

Запишем разложение вектора $\overline{x}$ в базисе (2), заменим векторы базиса (2) их разложениями по векторам базиса (1) и перегруппируем:

$$\overline{x} = x_1'\overline{e_1'} + x_2'\overline{e_2'} + \cdots + x_n'\overline{e_n'} =$$

$$= x_1'(a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \dots + a_{n1}\overline{e_n}) + x_2'(a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \dots + a_{n2}\overline{e_n}) + \dots + x_n'(a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \dots + a_{nn}\overline{e_n}) =$$
$$= (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \dots + a_{1n}x_n')\overline{e_1} + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \dots + a_{2n}x_n')\overline{e_2} + \dots + (a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \dots + a_{nn}x_n')\overline{e_n}.$$

Учитывая, что для вектора $\overline{x}$ в базисе (1) справедливо разложение

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1'} + x_2'\overline{e_2'} + \dots + x_n'\overline{e_n},$$

получим искомые равенства:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \dots + a_{1n}x_n', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \dots + a_{2n}x_n', \\ \dots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \dots + a_{nn}x_n'. \end{cases}$$

Обозначив

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

получим формулы преобразования координат вектора при переходе от базиса (1) к базису (2) в матричном виде:

$$X = AX'.$$

Так как матрица A невырожденная и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}, то можно получить формулы преобразования координат вектора при переходе от базиса (2) к базису (1):

$$X' = A^{-1}X.$$

►***Пример 3.*** В пространстве R^2 даны два базиса:

$$\overline{e_1} = (1;0), \overline{e_2} = (0;1) \text{ и } \overline{e_1'} = (3;1), \overline{e_2'} = (2;1).$$

Определить координаты вектора $\overline{x} = (2;2)$ в базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}$.

Так как

$$\overline{e_1'} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2},$$
$$\overline{e_2'} = 2\overline{e_1} + 1\overline{e_2},$$

то матрица перехода к новому базису:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора в новом базисе

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

◄

►***Пример 4.*** В пространстве R^2 найти матрицу перехода от базиса $\overline{e_1} = (3;2), \overline{e_2} = (4;3)$ к базису $\overline{e_1'} = (4;1), \overline{e_2'} = (3;1)$.

Запишем равенство

$$\left(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}\right) = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}\right)A.$$

Следовательно, необходимо решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A.$$

Отсюда,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Значит, между векторами базисов справедливы соотношения:

$$\overline{e_1'} = 8\overline{e_1} - 5\overline{e_2},$$
$$\overline{e_2'} = 5\overline{e_1} - 3\overline{e_2}.$$

◄

5. Евклидово пространство

В линейном пространстве можно складывать векторы и умножать вектор на число, дано понятие размерности пространства и базиса.

Введем понятие скалярного произведения векторов. Это дает способ вычисления длины векторов и углов.

Скалярным произведением векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ ***и*** $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ***называется число***

$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$;
2. $(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{c})$;
3. $(\alpha \overline{a}, \overline{b}) = \alpha (\overline{a}, \overline{b})$;
4. $(\overline{a}, \overline{a}) > 0$, если $\overline{a}$ - ненулевой вектор, $(\overline{a}, \overline{a}) = 0$, если $\overline{a}$ - нулевой вектор.

Линейное (векторное пространство), в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее четырем свойствам, называется евклидовым пространством.

Длиной вектора $\overline{a}$ в евклидовом пространстве называется число

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Свойства длины вектора:

1. $|\overline{a}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} = \overline{0}$;
2. $|\alpha \overline{a}| = |\alpha| |\overline{a}|$;
3. $|(\overline{a}, \overline{b})| \le |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$; (неравенство Коши – Буняковского);
4. $|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$; (неравенство треугольника).

Угол между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

Два вектора называется ***ортогональными,*** если скалярное произведение равно нулю. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Вектор называется ***единичным или нормированным***, если его длина равна единице.

Вычисление для ненулевого вектора нормированного называется ***нормированием*** этого вектора. Для нормирования вектора $\overline{a}$ необходимо вектор умножить на нормирующий множитель $\lambda = \pm\frac{1}{|\overline{a}|}$.

Векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \cdots, \overline{e_n}$ n- мерного евклидова пространства образуют ***ортонормированный базис***, если эти векторы ортогональны и длина каждого из них равна единице:

$$(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$$

В любом n - мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Например, в евклидовом пространстве R^3 ортонормированным базисом является система векторов: $\overline{e_1} = (1;0;0), \overline{e_2} = (0;1;0), \overline{e_3} = (0;0;1)$.

6. Геометрические объекты в пространстве R^n.

Точка в пространстве R^n обозначается $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - последовательность чисел.

Для двух произвольных точек $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вектор $\overline{AB}$ из пространства R^n имеет координаты

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

Чтобы вектор $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ отложить от точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и получить точку B, достаточно к координатам точки A прибавить координаты вектора $\overline{p}$:

$$B = A + \overline{p} = (a_1 + p_1, a_2 + p_2, \ldots, a_n + p_n).$$

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - фиксированная точка, $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ фиксированный вектор в пространстве R^n, тогда уравнение

$$X = A + t\overline{p},$$

где $t \in R$ - числовой параметр, определяет прямую, проходящую через точку A по направлению вектора $\overline{p}$ (рис. 1).

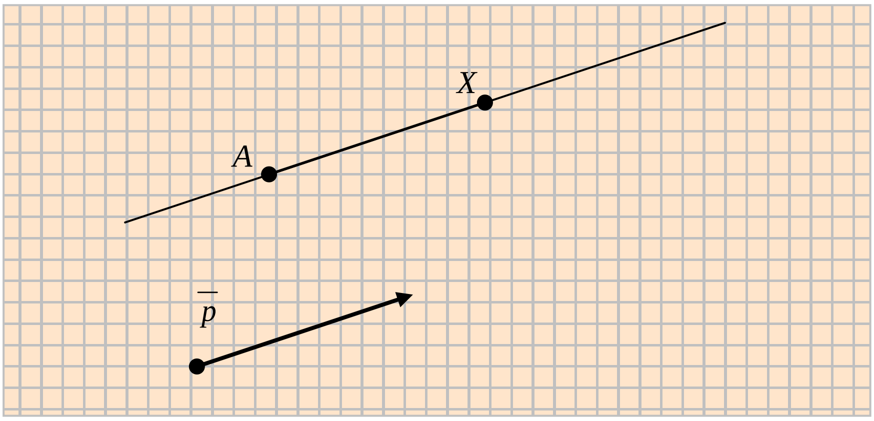

Рис. 1

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ фиксированные точки, тогда отрезком AB называется множество точек X, удовлетворяющих уравнению

$$X = A + t\overline{AB},$$

где $t \in [0;1]$. Если $t = 0$, то $X = A$, если же $t = 1$, то $X = B$. Из этого уравнения следует, что отрезок – часть прямой, проходящей через точку A по направлению вектора $\overline{AB}$.

Кроме этого уравнение отрезка можно записать и в виде:

$$\overline{OX} = s\overline{OA} + (1-s)\overline{OB},$$

где $s \in [0;1]$ - числовой параметр, $\overline{OX}, \overline{OA}, \overline{OB}$ - радиус-векторы соответственно точек X, A, B (рис. 2).

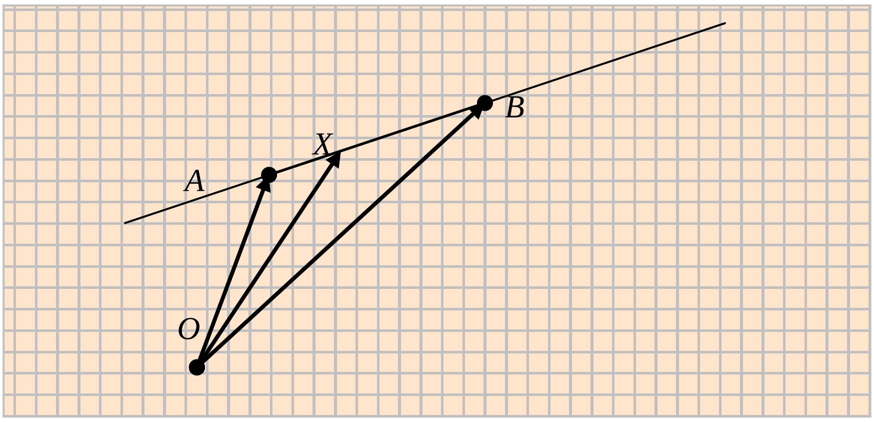

Рис. 2

К числу основных геометрических относят и плоскость. В пространстве R^3 плоскость понимается в обычном смысле. В пространствах $R^n, n > 3,$ возможны плоскости одномерные, двумерные и т.д.

Пусть k – натуральное число, A - фиксированная точка R^n, $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \cdots, \overline{p_n}$ - система линейно независимых векторов. Множество точек X, удовлетворяющих уравнению

$$X = t_1\overline{p_1} + t_2\overline{p_2} + \cdots + t_n\overline{p_n},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - числа, называется k - мерной плоскостью в R^n.

Если $k = 1$, то одномерная плоскость – прямая, если же $k = n$, то плоскость совпадает со всем пространством. При $k = n-1$ плоскость называют гиперплокостью.

Гиперплоскость в R^n состоит из точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ - числа, причем $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все одновременно равны нулю.

Например, в R^3 уравнение гиперплоскости - $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$.

Вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ называется вектором ***нормали*** гиперплоскости

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0.$$

Вектор нормали $\overline{a}$ ортогонален гиперплоскости, т.е. вектор $\overline{a}$ любому вектору, расположенному в гиперплоскости. Действительно, пусть $\overline{XY}$ произвольный вектор, начало $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и конец $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ которого принадлежат гиперплоскости. Тогда справедливы равенства:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \text{ и } a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n + b = 0.$$

Вычтем эти равенства:

$$a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + \ldots + a_n(y_n - x_n) = 0.$$

Значит, вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ ортогонален вектору $\overline{XY} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots, y_n - x_n)$.

Проекцией точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на гиперплоскость называется такая точка $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, принадлежащая гиперплоскости, для которой вектор $\overline{AB}$ ортогонален гиперплоскости.

Расстояние от точки $M(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ до гиперплоскости $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n + b|}{|\overline{a}|}.$$