

Глава 2. Экстремумы функции двух переменных

2.1. Экстремум функции двух переменных

При решении многих экономических задач приходится вычислять наибольшее и наименьшее значения. В качестве примера рассмотрим задачу. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - количества производимых товаров, $p_1, p_2, \dots, p_n$ - цены на товары и затраты на производство товаров определены функцией издержек $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда прибыль от реализации данных товаров выражается функцией

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Естественной целью каждого производства является обеспечение максимальной прибыли, т.е. в этом случае необходимо находить максимум функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* функции $z = f(x; y)$, если найдется такая окрестность точки M_0 , что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ (рис. 1).

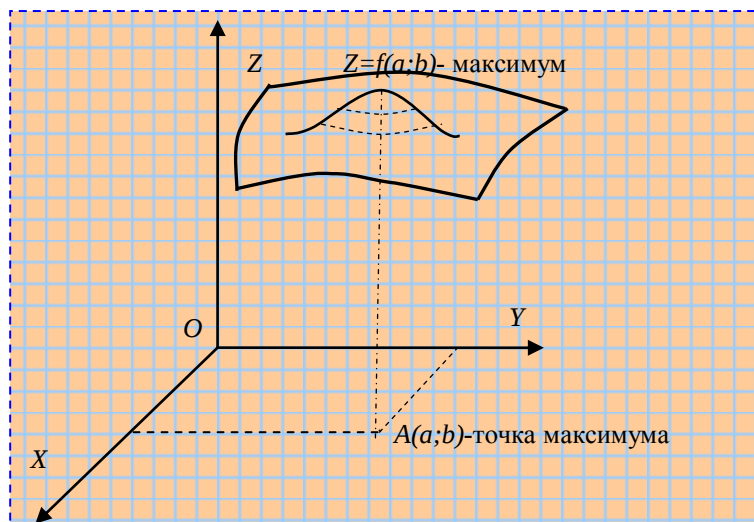


Рис. 1

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой минимума* функции $z = f(x; y)$, если найдется такая окрестность точки M_0 , что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) > f(x_0; y_0)$ (рис. 2).

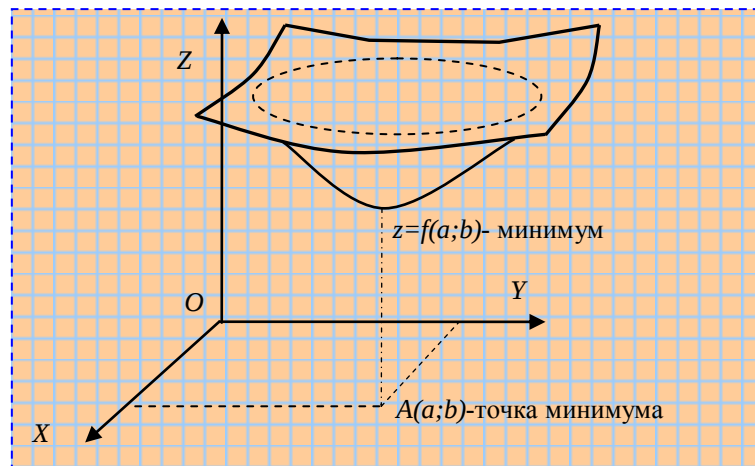


Рис. 2

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Значения функции в точках максимума или минимума называются соответственно *максимумом* или *минимумом (экстремумами)*.

В области определения функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного. Значение функции в точке экстремума сравниваются со значениями функции в точках, достаточно близких к точке экстремума. Поэтому экстремумы имеют локальный характер.

Сформулируем необходимое условие экстремума.

Теорема. В точке экстремума дифференцируемой функции $z = f(x; y)$ все её частные производные первого порядка равны нулю.

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ - точка максимума функции $z = f(x; y)$. Тогда для всех точек $M(x; y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0; y_0)$ справедливо неравенство $f(x_0; y_0) > f(x; y)$. Зафиксируем y , пусть $y = y_0$. Тогда получим, что функция одной переменной $z = f(x; y_0)$ имеет максимум при $x = x_0$ и поэтому $z'_x = f'_x(x_0; y_0) = 0$. Подобным образом доказывается, что $z'_y = f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Геометрическая интерпретация равенств

$$z'_x = f'_x(x_0; y_0) = 0 \text{ и } z'_y = f'_y(x_0; y_0) = 0$$

означает, что в точке экстремума функции $z = f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности функции параллельна плоскости OXY и её уравнение имеет вид $z = z_0$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$.

Кроме того, следует отметить, что если функция $z = f(x; y)$ в точке экстремума имеет частные производные по всем переменным, то градиент функции в этой точке равен нулю.

Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, называются *стационарными точками*.

Точки экстремума дифференцируемой функции (то есть функции, имеющей непрерывные частные производные во всех точках некоторой области) надо искать только среди тех точек, в которых все первые частные производные равны нулю.

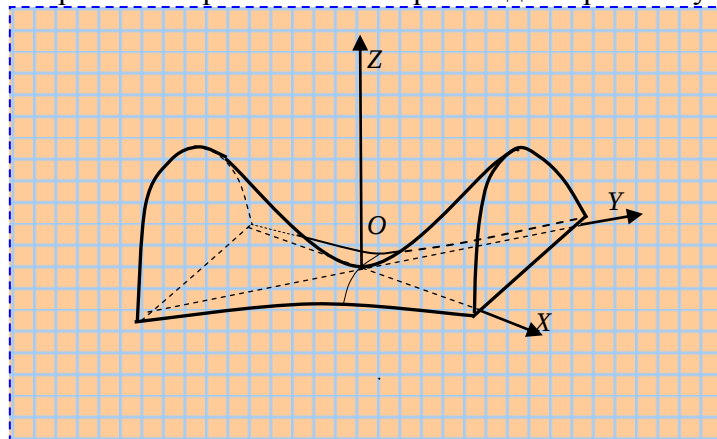


Рис. 3

Необходимое условие экстремума не гарантирует существование экстремума. Например, рассмотрим функцию $z = xy$ (см. рис.3). Её частные производные $z'_x = y$ и $z'_y = x$ равны нулю в точке $(0;0)$. Несложно показать, что эта точка не является точкой экстремума. Действительно, функция $z = xy$ равна нулю в точке $(0;0)$. В любой её окрестности, где x и y одного знака, $z = xy > 0$ и есть также точки, где функция отрицательна.

Точка $(0;0)$ называется *седловой точкой*. Седловые точки являются двумерным аналогом точек перегиба функции одной переменной.

Следует заметить, что функция может иметь экстремум в тех точках, где хотя бы из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (см. рис. 4) имеет минимум в точке $(0;0)$.

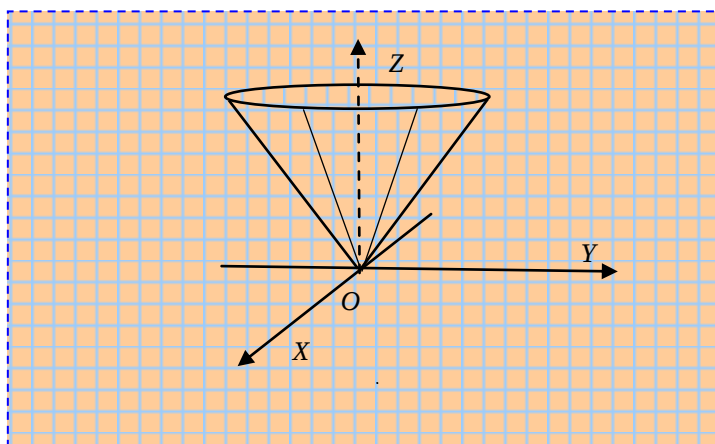


Рис. 4

Но частные производные этой функции в точке не существуют: $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для ответа на вопрос, является ли точка области определения функции точкой экстремума, необходимо применять достаточное условие экстремума.

Теорема. Пусть для функции $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ выполняются условия:

1. частные производные первого порядка равны нулю:

$$f'_x(x_0; y_0) = 0 \text{ и } f'_y(x_0; y_0) = 0;$$

2. частные производные второго порядка равны:

$$f''_{xx}(x_0; y_0) = A, f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0; y_0) = B, f''_{yy}(x_0; y_0) = C$$

$$\text{и } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Тогда:

1. если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ не имеет экстремума;

2. если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$, минимум, если $A > 0$;
3. если $\Delta = 0$, то функция $z = f(x; y)$ может иметь или не иметь экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ (необходимы дополнительные исследования).

Тогда, если $D < 0$, то в точке (x_0, y_0) экстремума нет.

Исследование функции двух переменных на экстремум происходит следующим образом.

Записываются необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} f'_x(x_0; y_0) = 0, \\ f'_y(x_0; y_0) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является некоторое множество точек. В каждой из этих точек вычисляется значение Δ и проверяется выполнение достаточных условий экстремума.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$.

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = y, z'_y = x.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} y = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ находим одну точку $A(0; 0)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = 0, B = z''_{xy} = z''_{yx} = 1, C = z''_{yy} = 0 \text{ и } \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Функция не имеет экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy - 3x - 3y + 3$.

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 2x - y - 1, z'_y = -x + 2y - 3.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ находим одну точку $M(2; 0)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = 2, B = z''_{xy} = z''_{yx} = -1, C = z''_{yy} = 2 \text{ и } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Функция имеет экстремума. И так как $A = 2 > 0$, то точка $M(2; 0)$ - точка минимума.

$$z_{\min} = z(M) = -2.$$

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 15xy + 2$.

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 3x^2 - 15y, z'_y = -15x + 3y^2.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ -15x + 3y^2 = 0 \end{cases}$ находим две стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(5;5)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = 6x, B = z''_{xy} = z''_{yx} = -15, C = z''_{yy} = 6y$$

и

$$\Delta(x; y) = \begin{vmatrix} 6x & -15 \\ -15 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 225.$$

В точке $M_1(0;0)$ $\Delta(0;0) = -225$, значит, функция не имеет экстремума.

Точка $M_2(5;5)$, так как $\Delta(5;5) = 36 \cdot 5 \cdot 5 - 225 > 0$ и $A(5;5) = 30 > 0$, является точкой минимума.

$$z_{\min} = z(5;5) = -123.$$

2.2. Условный экстремум функции двух переменных

Дана функция $z = f(x; y)$ с областью определения D . Рассмотрим задачу нахождения экстремума этой функции на множестве $S \subset D$, удовлетворяющем некоторому условию.

В практических задачах чаще всего множество S задается системой уравнений и неравенств. Ограничимся случаем одного уравнения. Пусть множество S уравнением $g(x; y) = a$, которое называется *уравнением связи*.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой *условного максимума (минимума)* функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности удовлетворяющих условию $g(x; y) = a$, выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0; y_0)$).

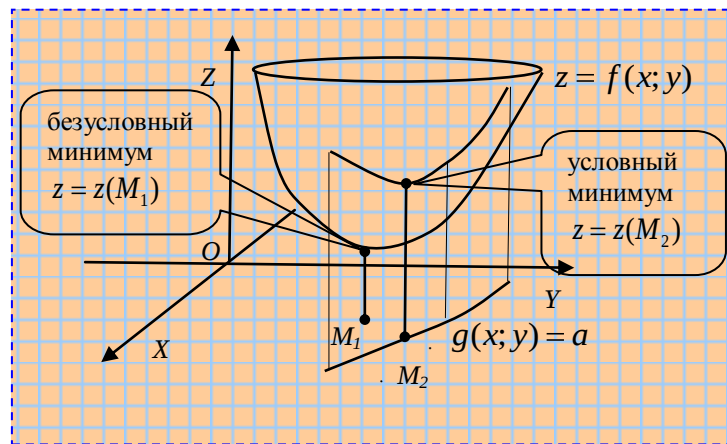


Рис. 5

На рис. 5 точка M_1 - точка безусловного минимума, точка M_2 - точка условного минимума и значения функции в этих точках $z = z(M_1)$ и $z = z(M_2)$, соответственно, безусловный минимум и условный минимум.

Задачу нахождения условного экстремума можно свести к задаче отыскания экстремума функции одной переменной. Допустим уравнение $g(x; y) = a$ можно разрешить относительно одной из переменных, например, выразить y через x : $y = h(x)$. Подставив полученное выражение в функцию $z = f(x; y)$, получим функцию одной переменной $z = f(x; h(x))$. Экстремум этой функции является экстремумом функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x; y) = a$.

Пример 5. Найти экстремум функции $z = 2x^2 - y^2$ при условии $x + y = 3$.

Из уравнения $x + y = 3$ выражаем $y = 3 - x$ и подставляем в функцию $z = 2x^2 - y^2$:

$$z = 2x^2 - (3 - x)^2 = x^2 + 6x - 9.$$

Эта функция имеет минимум при $x = -3$. Из условия $x + y = 3$ находим $y = 3 - (-3) = 6$.

Значит, функция $z = 2x^2 - y^2$ имеет условный минимум

$$z_{\min} = z(-3; 6) = 2(-3)^2 - 6^2 = -18.$$

Уравнение $g(x; y) = a$, задающее условие не всегда возможно разрешить относительно одной из переменных. Для отыскания условного экстремума в таких случаях применяется метод Лагранжа или метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию трех переменных

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda(g(x; y) - a).$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа*.

Теорема. Если точка $(x_0; y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x; y)$ при условии $g(x; y) = a$, то существует значение λ_0 такое, что точка $(x_0; y_0; \lambda_0)$ является точкой безусловного экстремума функции $L(x; y; \lambda)$.

Доказательство теоремы основывается на следующем. Если координаты точек $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $g(x; y) = a$, то экстремумы функций $z = f(x; y)$ и $L(x; y; \lambda)$ совпадают. Если же координаты точек $(x; y)$ не удовлетворяют уравнению $g(x; y) = a$, то значения функции $f(x; y)$ не совпадают со значениями $L(x; y; \lambda)$.

Таким образом, задача вычисления условного экстремума функции $z = f(x; y)$ при условии $g(x; y) = a$ сводится к вычислению безусловного экстремума функции трех переменных $L(x; y; \lambda)$.

Сначала находятся стационарные точки функции $L(x; y; \lambda)$. Для этого необходимо найти решение системы:

$$\begin{cases} L'_x(x; y; \lambda) = f'_x(x; y) + \lambda g'_x(x; y) = 0, \\ L'_y(x; y; \lambda) = f'_y(x; y) + \lambda g'_y(x; y) = 0, \\ L'_\lambda(x; y; \lambda) = g(x; y) - a = 0. \end{cases}$$

Если сложить первое и второе уравнения, то получим равенство

$$\overline{f'_x(x; y) + f'_y(x; y)} = -\lambda \overline{(f'_x(x; y) + f'_y(x; y))},$$

$$\overline{\text{grad} f(x; y)} = -\lambda \overline{\text{grad} g(x; y)}.$$

Это значит, что в точках условного экстремума градиенты функций $f(x; y)$ и $g(x; y)$ коллинеарны. Последнее уравнение из этой системы уравнений совпадает с уравнением, задающим условие $g(x; y) - a = 0$.

Далее, для каждой стационарной точки существование и характер условного экстремума решается на основе анализа знака второго дифференциала функции $L(x; y; \lambda)$. Для этого необходимо вычислить определитель

$$\Delta(x; y; \lambda) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= L''_{xx}(x; y; \lambda), a_{12} = L''_{xy}(x; y; \lambda), a_{13} = L''_{x\lambda}(x; y; \lambda), \\ a_{21} &= L''_{yx}(x; y; \lambda), a_{22} = L''_{yy}(x; y; \lambda), a_{23} = L''_{y\lambda}(x; y; \lambda), \\ a_{31} &= L''_{\lambda x}(x; y; \lambda), a_{32} = L''_{\lambda y}(x; y; \lambda), a_{33} = L''_{\lambda\lambda}(x; y; \lambda). \end{aligned}$$

Если в стационарной точке $M_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ $\Delta(x_0; y_0; \lambda_0) > 0$ и $a_{11} > 0$, то эта стационарная точка — точка минимума функции $L(x; y; \lambda)$.

Если же в стационарной точке $M_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ $\Delta(x_0; y_0; \lambda_0) < 0$ и $a_{11} < 0$, то эта стационарная точка — точка максимума функции $L(x; y; \lambda)$.

Пример 6. Найти экстремум функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Составим функцию Лагранжа $L(x; y; \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Найдем частные производные первого порядка этой функции и запишем систему уравнений для вычисления стационарных точек:

$$L'_x = 2 + 2x\lambda, L'_y = 1 + 2y\lambda, L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $x = -\frac{1}{\lambda}$ и $y = -\frac{1}{2\lambda}$ и, подставив эти значения в третье уравнение, получим уравнение для λ :

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5.$$

Отсюда $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Значит, система имеет два решения и функция Лагранжа – две стационарные точки: $M_1(-2; -1; 1/2)$ и $M_2(2; 1; -1/2)$.

Вычисляем частные производные второго порядка:

$$a_{11} = 2\lambda, a_{12} = 0, a_{13} = 2x,$$

$$a_{21} = 0, a_{22} = 2\lambda, a_{23} = 2y,$$

$$a_{31} = 2x, a_{32} = 2y, a_{33} = 0.$$

Вычислим определитель:

$$\Delta(x; y; \lambda) = - \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2).$$

Для стационарной точки $M_1(-2; -1; 1/2)$ вычисляем $\Delta(-2; -1; 1/2) = 20$ и $a_{11} = 1$, значит, функция имеет минимум: $z_{\min} = z(-2; -1) = -5$.

Для стационарной точки $M_2(2; 1; -1/2)$ $\Delta(2; 1; -1/2) = -20$ и $a_{11} = -1$, значит, функция имеет максимум: $z_{\max} = z(2; 1) = 5$.

2.3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области

Областью называется множество точек плоскости, удовлетворяющих свойствам открытости и связности.

Свойство открытости: любая точка принадлежит области вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойство связности: любые две точки области можно соединить линией, которая вся расположена в области.

Точка A называется *граничной точкой* области D , если она не принадлежит D , но в любая её окрестность содержит точки области. Множество граничных точек области называется *границей* области.

Область D вместе с границей области называется *замкнутой областью* и обозначается $\bar{D}$.

Область называется *ограниченной*, если все её точки принадлежат кругу конечного радиуса R , в противном случае – *неограниченной*.

Теорема. Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$, то в этой области:

1. функция $z = f(x; y)$ ограничена в области $\bar{D}$, т.е. найдется такое число R , что для всех точек $A \in \bar{D}$ справедливо неравенство $|f(A)| < R$;
2. в области $\bar{D}$ существуют точки, в которых функция $z = f(x; y)$ принимает наименьшее m и наибольшее M значения;
3. в области $\bar{D}$ существует хотя бы одна точка, в которой функция $z = f(x; y)$ принимает любое численное значение из промежутка $[m; M]$.

Наименьшее m и наибольшее M значения функция $z = f(x; y)$ принимает или во внутренних точках области $\bar{D}$ или в граничных точках.

Правило вычисления наименьшего и наибольшего значений дифференцируемой функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$:

1. найти все критические точки функции $z = f(x; y)$, принадлежащие $\bar{D}$ и вычислить значения функции в них;
2. вычислить наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ на границе области $\bar{D}$;
3. выбрать наименьшее m и наибольшее M значения среди вычисленных значений функции.

Пример 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 5$ в ограниченной замкнутой области $\bar{D}: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

Найдем стационарные точки функции, принадлежащие области $\bar{D}$:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x - y - 1, z'_y = 2y - x - 1, \\ \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этой системы находим $x = 1$ и $y = 1$. Стационарная точка $M(1; 1) \in \bar{D}$ и значение функции в этой точке:

$$z(1; 1) = 4.$$

Рассмотрим граничные точки (рис. 6).

На отрезке OA $x = 0$ и $0 \leq y \leq 3$ функция $z(y) = y^2 - y + 5$. Находим её стационарную точку $y = 1/2$ и вычисляем:

$$z(0) = 5, z(1/2) = 4,75, z(3) = 11.$$

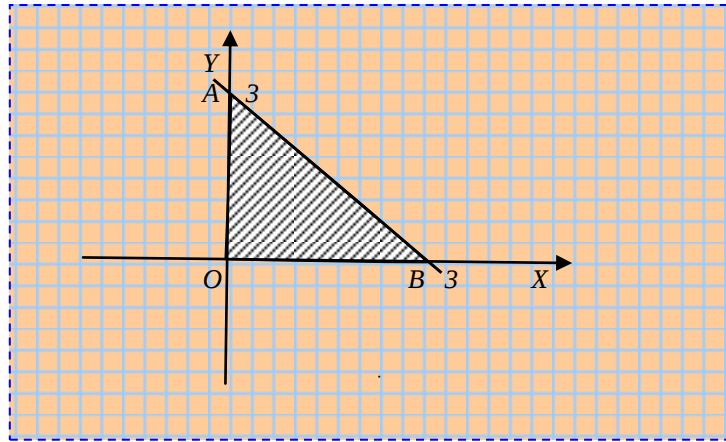


Рис. 6

Аналогично, на отрезке OB $0 \leq x \leq 3$ и $y = 0$ функция $z(x) = x^2 - x + 5$. Находим её стационарную точку $x = 1/2$ и вычисляем:

$$z(0) = 5, z(1/2) = 4,75, z(3) = 11.$$

На отрезке AB $y = 3 - x$ и $0 \leq x \leq 3$ получаем функцию $z(x) = 3x^2 - 9x + 11$. Вычислим значения этой функции:

$$z(0) = 11, z(3/2) = 4,25, z(3) = 11.$$

Сравнив все вычисленные значения функции, получим:

$$z_{\min} = z(3/2; 3/2) = 4,25 \quad z_{\max} = z(3; 0) = z(0; 3) = 11.$$

Пример 8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в ограниченной замкнутой области $\bar{D}: x^2 + y^2 \leq 1$.

Найдем стационарные точки функции $z = x^2 - y^2$, принадлежащие области $\bar{D}$:

$$z'_x = 2x = 0, z'_y = -2y = 0,$$

Отсюда находим $x = 0$ и $y = 0$, стационарная точка $M_1(0; 0) \in \bar{D}$.

Исследуем функцию на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$L'_x = 2x + 2\lambda x, L'_y = -2y + 2\lambda y, L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ -2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Из системы находим: при $\lambda = -1$ $x = 0$ и $y = \pm 1$, а для $\lambda = 1$ $x = \pm 1$ и $y = 0$.

Следовательно, для функции $z = x^2 - y^2$ нашли ещё четыре стационарные точки:

$$M_2(0; -1), M_3(0; 1), M_4(-1; 0), M_5(1; 0).$$

Вычислим значения функции в стационарных точках:

$$z(M_1) = 0, z(M_2) = -1, z(M_3) = -1, z(M_4) = 1, z(M_5) = 1.$$

Сравнив эти значения, получим:

$$z_{\min} = z(M_2) = z(M_3) = -1, z_{\max} = z(M_4) = z(M_5) = 1.$$

2.4. Экономические задачи

Пример 9. Предприятие производит два вида продукции x и y . Затраты на их производство определяются функцией

$$g(x; y) = 2x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Продукция продается по 300000 д.ед. и 400 000 д.ед. соответственно за штуку.

Необходимо определить оптимальный план выпуска продукции, при котором прибыль максимальна.

Запишем функцию прибыли

$$z(x; y) = 300000x + 400000y - 2x^2 - 4xy - 4y^2.$$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} z'_x &= 300000 - 4x - 4y, \\ z'_y &= 400000 - 4x - 8y. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y = 300000, \\ 4x + 8y = 400000, \end{cases}$$

находим стационарную точку $M_1(50000; 25000)$.

Найдём частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = -4, B = z''_{xy} = z''_{yx} = -4, C = z''_{yy} = -8$$

и

$$\Delta(x; y) = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Так как $A < 0$, то стационарная точка $M_1(50000; 25000)$ - точка максимума и

$$z_{\max} = z(50000, 25000) = 1250000000.$$

Пример 10. Определить объемы потребления благ x и y , обеспечивающие максимальную полезность

$$z(x; y) = 1000\sqrt{xy}$$

при бюджетном ограничении

$$2000x + 1000y = 1000000.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x; y; \lambda) = 1000\sqrt{xy} + \lambda(2000x + 1000y - 1000000).$$

Вычислим частные производные первого порядка функции $L(x; y; \lambda)$:

$$\begin{aligned}
L'_x &= 500\sqrt{\frac{y}{x}} + 2000\lambda, \\
L'_y &= 500\sqrt{\frac{x}{y}} + 1000\lambda, \\
L'_\lambda &= 2000x + 1000y - 1000000.
\end{aligned}$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases}
500\sqrt{\frac{y}{x}} + 2000\lambda = 0, \\
500\sqrt{\frac{x}{y}} + 1000\lambda = 0, \\
2000x + 1000y - 1000000 = 0.
\end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = -4\lambda, \sqrt{\frac{x}{y}} = -2\lambda.$$

Отсюда следует, что $\lambda < 0$ и $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x}}, \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Далее $2\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ или $2x = y$. Теперь из третьего уравнения системы получим соотношение для x :

$$4x = 1000.$$

Значит, получаем координаты стационарной точки функции Лагранжа:

$$x = 250, y = 500, \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Покажем, что эта точка есть точка максимума функции $L(x; y; \lambda)$. Вычислим частные производные второго порядка функции Лагранжа.

$$a_{11} = L''_{xx} = -250\sqrt{\frac{y}{x^3}}, a_{12} = L''_{xy} = 250\frac{1}{\sqrt{xy}}, a_{13} = L''_{x\lambda} = 2000,$$

$$a_{21} = L''_{yx} = 250\frac{1}{\sqrt{xy}}, a_{22} = L''_{yy} = -250\sqrt{\frac{x}{y^3}}, a_{23} = L''_{y\lambda} = 1000,$$

$$a_{31} = L''_{\lambda x} = 2000, a_{32} = L''_{\lambda y} = 1000, a_{33} = L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

Вычислим определитель

$$\Delta(x; y; \lambda) = \begin{vmatrix} -250\sqrt{\frac{y}{x^3}} & 250\frac{1}{\sqrt{xy}} & 2000 \\ 250\frac{1}{\sqrt{xy}} & -250\sqrt{\frac{x}{y^3}} & 1000 \\ 2000 & 1000 & 0 \end{vmatrix} = -250000000 \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{\sqrt{x^3y^3}}.$$

Так как $\Delta(250,500,-\frac{\sqrt{2}}{4}) < 0$ и $a_{11}(250,500) < 0$, то стационарная точка - точка максимума
и $z_{\max} = z(250,500) = 250000\sqrt{2}$.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти экстремумы функции $z = f(x; y)$.

2.1. $z = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 4y + 10$. 2.2. $z = -2x^2 + 4xy - y^2 + 12x - 2y + 2$.

2.3. $z = x^2 + xy - y^2 + 12x - 14y + 2$. 2.4. $z = x^2 + xy + y^2 - x - 14y + 12$.

2.5. $z = x^2y - xy + xy^2$. 2.6. $z = -x^3 - y^3 + 15xy$.

В задачах 2.7. – 2.14 найти условные экстремумы функции $z = f(x; y)$.

2.7. $z = 2x^2 + y^2 + 1$, если $2x + y - 6 = 0$.

2.8. $z = 3x^2 - y^2$, если $6x + 4y - 12 = 0$.

2.9. $z = -x^2 - y^2 + xy - x - y + 12$, если $x + y - 4 = 0$.

2.10. $z = -2x^2 - 2y^2 + 4xy - x - y + 7$, если $x + y - 6 = 0$.

2.11. $z = 8x + 4y$, если $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

2.12. $z = 6x - 4y + 3$, если $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

2.13. $z = 2 - 16x - 4y$, если $4x^2 + y^2 - 20 = 0$.

2.14. $z = 4 - 4x - 8y$, если $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

В задачах 2.15. – 2.20 найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области.

2.15. $z = xy + x + y$, $x \geq 0, y \geq 0, x + y - 2 \leq 0$.

2.16. $z = xy - x - y$, $x \geq 0, y \geq 0, x + y - 4 \leq 0$.

2.17. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7$, $x \geq 0, y \leq 0, x - y - 3 \leq 0$.

2.18. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0$.

2.19. $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 4$, $|x| + |y| - 5 \leq 0$.

2.20. $z = x^2 - y^2 + 10$, $2|x| + |y| - 4 \leq 0$.

Ответы

2.1. $z_{\min} = z(0; -2) = 14$. 2.2. Экстремума нет. 2.3. Экстремума нет. 2.4. $z_{\min} = z(-4; 9) = -49$.

2.5. $z_{\min} = z(1/3; 1/3) = -1/27$. 2.6. $z_{\max} = z(5; 5) = 125$. 2.7. $z_{\min} = z(2; 2) = 14$.

2.8. $z_{\min} = z(-6; 12) = -36$. 2.9. $z_{\max} = z(2; 2) = 4$. 2.10. $z_{\max} = z(3; 3) = 1$.

2.11. $z_{\min} = z(-2; -1) = -20$, $z_{\max} = z(2; 1) = 20$. 2.12. $z_{\min} = z(-3; 2) = -23$, $z_{\max} = z(3; -2) = 29$.

2.13. $z_{\min} = z(2; 2) = -38$, $z_{\max} = z(-2; -2) = 42$. 2.14. $z_{\min} = z(2; 2) = -20$, $z_{\max} = z(-2; -2) = 28$.