Лекция 17

§ 12. Интервальные оценки параметров распределения

Для выборок малого объема точечные оценки могут значительно отличаться от оцениваемых параметров, т.е. приводить к грубым ошибкам. Поэтому ***используют интервальные оценки***. Интервальная оценка определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить ***точность*** и ***надежность*** оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Будем считать θ постоянным числом (θ может быть и СВ). Ясно, что θ^* тем точнее определяет параметр θ, чем меньше $\left|\theta-\theta^*\right|$. Т.е. если $\delta>0$ и $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$, то чем меньше δ, тем точнее оценка. Таким образом, $\delta>0$ характеризует ***точность оценки***.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка θ^* удовлетворяет неравенству $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$. Можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство выполняется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой выполняется неравенство $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, задают число, близкое к единице (0,95; 0,99 или 0,999).

Пусть

$$P(\left|\theta-\theta^*\right|<\delta)=\gamma$$

или

$$P(-\delta<\theta-\theta^*<\delta)=\gamma.$$

Это соотношение понимают так: вероятность того, что интервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$ заключает в себе неизвестный параметр θ, равна γ.

Доверительным называют интервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

Замечание. Интервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$ имеет случайные концы (доверительные границы). При разных выборках получаются различные θ^*. Следовательно, от выборки к выборке меняются концы доверительного интервала. Т.о., доверительные границы сами являются СВ – функциями от $x_1, x_2,..., x_n$.

Т.к. случайной величиной является не оцениваемый параметр θ, а доверительный интервал, то правильней будет говорить не о вероятности попадания θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал покроет параметр θ.

Общая схема построения доверительных интервалов

1) Из генеральной совокупности СВ X с известным распределение $p(x,\theta)$ извлекается выборка объема n, по которой находится точечная оценка θ^* параметра θ.
2) Строится новая СВ $Y(\theta)$, связанная с параметром θ и имеющая известную плотность вероятности $p(y,\theta)$.

3) Задается уровень значимости α ($\alpha = 0{,}1; 0{,}05; 0{,}01$), что соответствует надежности $\gamma = 0{,}9; 0{,}95; 0{,}99$.
4) Используя плотность распределения $p(y,\theta)$ СВ $p(y,\theta)$, определим два числа C_1, C_2 так, чтобы $P(C_1 < Y(\theta) < C_2) = \int\limits_{C_1}^{C_2} p(y,\theta)dy = 1-\alpha$.

   Значения C_1, C_2 определяются, как правило, из условий $P(Y(\theta) \le C_1) = P(Y(\theta) \ge C_2) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Неравенство $C_1 < Y(\theta) < C_2$ преобразуется в равносильное неравенство $-\delta < \theta - \theta^* < \delta$ такое, что $P(-\delta < \theta - \theta^* < \delta) = 1 - \alpha = \gamma$.

Полученный интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, накрывающий неизвестный параметр θ с вероятностью $1-\alpha$, является интервальной оценкой параметра θ. Положительное число δ характеризует точность оценки.

Построим доверительные интервалы для оценок математического ожидания и дисперсии нормально распределенной СВ, поскольку при достаточно большом объеме выборки оценки максимального правдоподобия и метода моментов асимптотически нормальны, т.е. имеют приблизительно нормальное распределение.

§ 13. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, с.к.о. σ известно. Требуется оценить неизвестное м.о. a по выборочной средней $\bar{x}$. Поставим задачу найти доверительные интервалы, покрывающие a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\bar{x}$ как случайную величину $\bar{X}$ ($\bar{x}$ меняется от выборки к выборке), а значения признака $x_1, x_2, ..., x_n$ как значения одинаково распределенных СВ $X_1, X_2, ..., X_n$ (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Математическое ожидание каждой из этих СВ равно a, а среднее квадратическое отклонение равно σ.

Примем без доказательства, что если СВ X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$:

$$M(\bar{X}) = a, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение:

$$P(\left|\bar{X} - a\right| < \delta) = \gamma,$$

где γ - заданная надежность.

Известно, что $P(\left|\bar{X} - a\right| < \delta) = 2\Phi_0(\dfrac{\delta}{\sigma})$.

Заменим X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma(\bar{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим $P(\left|\bar{X}-a\right|<\delta)=2\Phi_0(\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})=2\Phi_0(t)$, где $t=\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Из последнего равенства $\delta=\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$, тогда $P(\left|\bar{X}-a\right|<\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}})=2\Phi_0(t)$.

Вероятность P равна γ. Обозначим выборочную среднюю $\bar{x}$, получим

$$P(\bar{x}-t_\gamma\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}+t_\gamma\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma.$$

Смысл формулы таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n},\bar{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a. Точность оценки $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$.

Число t определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$ или $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$ по таблице.

Замечание. Оценку $\left|\bar{x}-a\right|<t\sigma/\sqrt{n}$ называют классической. Из формулы $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, определяющей точность классической оценки, можно сделать следующие выводы:

1) При возрастании объема выборки n число δ убывает, следовательно, точность оценки увеличивается.
2) Увеличение надежности оценки $\gamma=2\Phi(t)$ приводит к увеличению t (($\Phi(t)$ - возрастающая функция), следовательно, к возрастанию δ. Другими словами, увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Пример. СВ X имеет нормальное распределение с известным с.к.о. $\sigma=3$. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\bar{x}$, если объем выборки $n=36$ и задана надежность оценки $\gamma=0{,}95$.

Найдем t из условия $\gamma=2\Phi(t)=0{,}95$ или $\Phi(t)=0{,}475$. По таблице $t=1{,}96$.

Точность оценки $\delta=t\sigma/\sqrt{n}=\dfrac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98$.

Доверительный интервал $(\bar{x}-0{,}98,\ \bar{x}+0{,}98)$.

Например, если $\bar{x}=4{,}1$, то доверительный интервал $(3{,}12;\ 5{,}08)$.

Ошибочно писать $P(3{,}12<a<5{,}08)=0{,}95$. Поскольку a - постоянная величина, то она либо заключена в найденном интервале (тогда это достоверное событие, вероятность которого равна 1), либо не заключена в нем (тогда это невозможное событие, вероятность которого равна 0). Другими словами, доверительную вероятность не следует связывать с оцениваемым параметром. Она связана лишь с границами доверительного интервала, которые изменяются от выборки к выборке. Надежность $\gamma=0{,}95$ указывает. Что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен. Лишь в 5% случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

§ 14. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем с.к.о. σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительного интервала.

По данным выборки можно построить СВ (ее возможные значения будем обозначать через t):

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}}$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы,
$\overline{X}$ - выборочная средняя,
S - исправленное с.к.о.,
n - объем выборки.

Используя такую с.в., получим

$$P(\overline{X} - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \overline{X} + t_\gamma S/\sqrt{n}) = \gamma ,$$

т.е. доверительный интервал $(\overline{x} - t_\gamma s/\sqrt{n}, \overline{x} + t_\gamma s/\sqrt{n})$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. Здесь с.в. $\overline{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\overline{x}$ и s, найденными по выборке. По таблице по заданным n и γ можно найти t_γ (по таблице распределения Стьюдента).

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 16$ найдена выборочная средняя $\overline{x} = 20{,}2$ и исправленное выборочное с.к.о. $s = 0{,}8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $0{,}95$.

Решение. По таблице значений t_γ найдем по $\gamma = 0{,}95$ и $n = 16$ значение $t_\gamma = 2{,}13$. Доверительные границы

$$\overline{x} - t_\gamma s/\sqrt{n} = 20{,}2 - \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}774 ,$$

$$\overline{x} + t_\gamma s/\sqrt{n} = 20{,}2 + \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626$$

Итак, с надежностью $0{,}95$ неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19{,}774 < a < 20{,}626$.

§ 15. Доверительный интервал дисперсии нормально распределенной СВ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально $N(a, \sigma)$ с неизвестными параметрами a и σ^2. Требуется определить неизвестную дисперсию σ^2 по исправленной выборочной дисперсии s^2.

Доверительный интервал $(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}})$ покрывает неизвестный параметр σ^2 с надежностью $\gamma = 1-\alpha$.

Или $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$, q находят из соответствующих таблиц.

Пример. Результаты измерения веса случайно выборки 20 беловежских зубров приведены в таблице. С надежностью 0,95 оценить разброс веса зубров.

x_i, кг	600	620	630	640
n_i	5	4	10	1

$\bar{x} = 621$, $\sigma^2_{\hat{a}} = 169$. $\sigma_{\hat{a}} = 13$, $s = \sqrt{\frac{20}{19}} \cdot 13 \approx 13{,}34$

По таблице для $n = 20$ и $\gamma = 0{,}95$ находим $q = 0{,}37$. Тогда доверительный интервал имеет вид: $8{,}4 < \sigma < 18{,}3$.

§ 16. Доверительный интервал для доли признака генеральной совокупности

Пусть из генеральной совокупности извлечена случайная выборка объема n. Выборочной долей называется отношение m членов выборки, обладающих некоторым признаком A, к объему выборочной совокупности n, т.е. $\omega = \frac{m}{n}$.

Если выборочная доля имеет нормальное распределение, то приблизительный доверительный интервал с надежностью γ для доли признака генеральной совокупности имеет вид: $(\omega - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}, \omega + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}})$.

Пример. При проверке 100 деталей из большой партии было обнаружено 10 бракованных. Найти 95% доверительный интервал доли бракованных деталей всей партии.

Решение. Найдем выборочную долю бракованных деталей в партии: $\omega = \frac{m}{n} = \frac{10}{100} = 0{,}1$. По таблице значений функции Лапласа найдем $z_{0,475} = 1{,}96$. Тогда доверительный интервал имеет вид: $0{,}1 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{100}} < p < 0{,}1 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{100}}$ или $0{,}041 < p < 0{,}159$. Т.е. в 95% выборок доля нестандартных деталей заключена между 4,1% и 15,9%.