

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Аналитическая геометрия
Конспект лекций
для студентов экономических специальностей
Составил В. С. Мастяница

2010 г.

Оглавление

Глава 1. Векторная алгебра	4
1.1. Векторы	4
1.2. Линейные операции над векторами.....	5
1.3. Проекция вектора на ось.....	7
1.4. Координаты вектора.....	9
1.5. Действия над векторами, заданными координатами	10
1.6. Скалярное произведение векторов	11
1.7. Векторное произведение векторов	14
1.8. Смешанное произведение векторов	16
Глава 2. Аналитическая геометрия на плоскости	18
2.1. Системы координат на плоскости	18
2.1.1. Прямоугольная и полярная системы координат	18
2.1.2. Основные задачи на плоскости.....	22
2.1.3. Преобразование системы координат	23
2.2. Прямая на плоскости.....	26
2.2.1. Общее уравнение прямой.....	26
2.2.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.....	26
2.2.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.....	27
2.2.4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.....	27
2.2.5. Уравнение прямой в отрезках.....	28
2.2.6. Нормальное уравнение прямой.....	29
2.2.7. Параметрическое уравнение прямой.....	29
2.2.8. Уравнение отрезка.....	30
2.2.9. Угол между двумя прямыми.....	31
2.2.10. Расстояние от точки до прямой	32
2.3. Линии второго порядка на плоскости	33
2.3.1. Окружность	33
2.3.2. Эллипс	34
2.3.3. Гипербола	36
2.3.4. Парабола	38
2.3.5. Упрощение общего уравнения второй степени	39
Глава 3. Аналитическая геометрия в пространстве.....	43
3.1. Плоскость в пространстве.....	43
3.1.1. Общее уравнение плоскости.....	43
3.1.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки	43
3.1.3. Уравнение плоскости в отрезках	43
3.1.4. Нормальное уравнение плоскости.....	44
3.2. Основные задачи в пространстве	44
3.2.1. Угол между плоскостями.....	44
3.2.2. Расстояние от точки до плоскости.....	45
3.3. Прямая в пространстве.....	45
3.3.1. Общее уравнение прямой.....	45
3.3.2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве	46
3.3.3. Коническое уравнение прямой	47
3.3.4. Уравнение прямой проходящей через две точки	47
3.3.5. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых.....	48
3.4. Прямая и плоскость в пространстве	48
3.4.1. Угол между прямой и плоскостью	48
3.4.2. Точка пересечения прямой с плоскостью	49
3.5. Поверхности второго порядка	49

Литература	51
------------------	----

Глава 1. Векторная алгебра

1.1. Векторы

Величины, которые определяются только своим числовым значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин: длина, площадь, объём, температура, работа, масса.

Другие величины определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*, например, сила, скорость, ускорение. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор - это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у него начало в точке B , а конец в точке A) называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю и его направление не определено.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается: $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

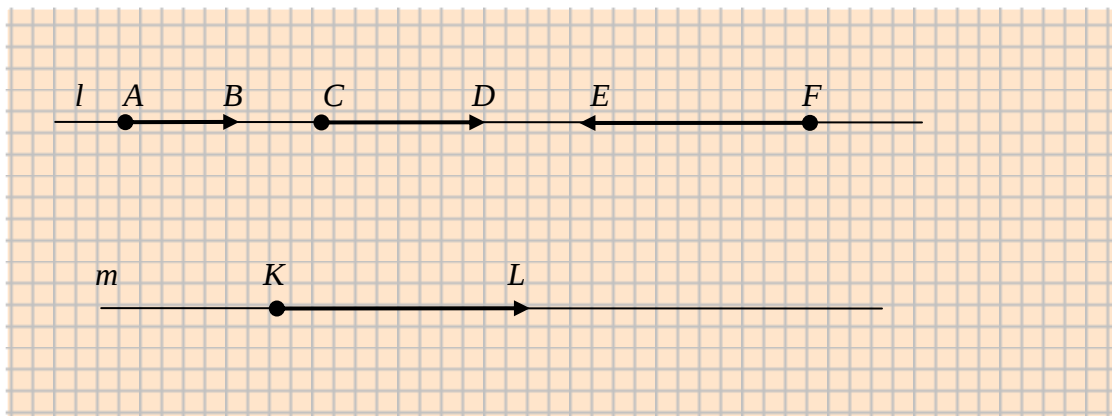


Рис. 1

На рис.1 векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{KL}$ коллинеарны, векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KL}$ одинаково направлены, векторы $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{KL}$ противоположно направлены.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* $\vec{a} = \vec{b}$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

На рис.2 векторы образуют параллелограмм. Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены, но длины их равны.

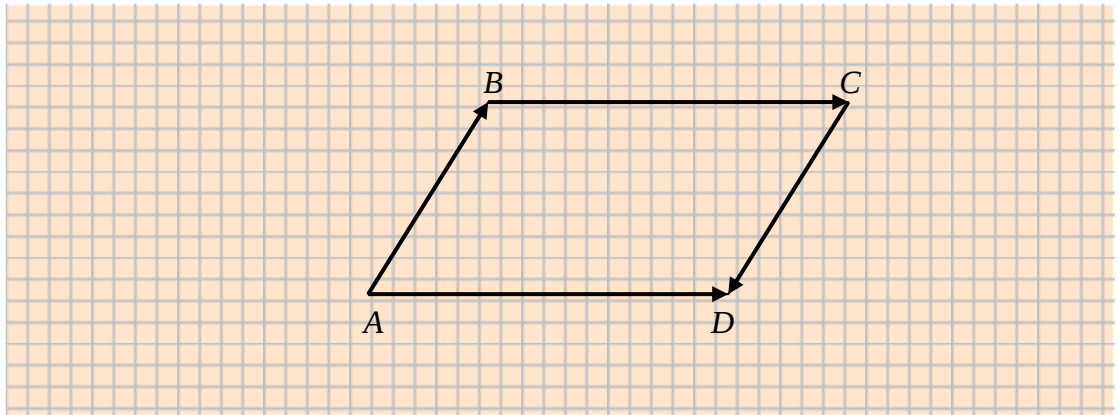


Рис. 2

Равные векторы называют также *свободными*.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трёх векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

1.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис.3).

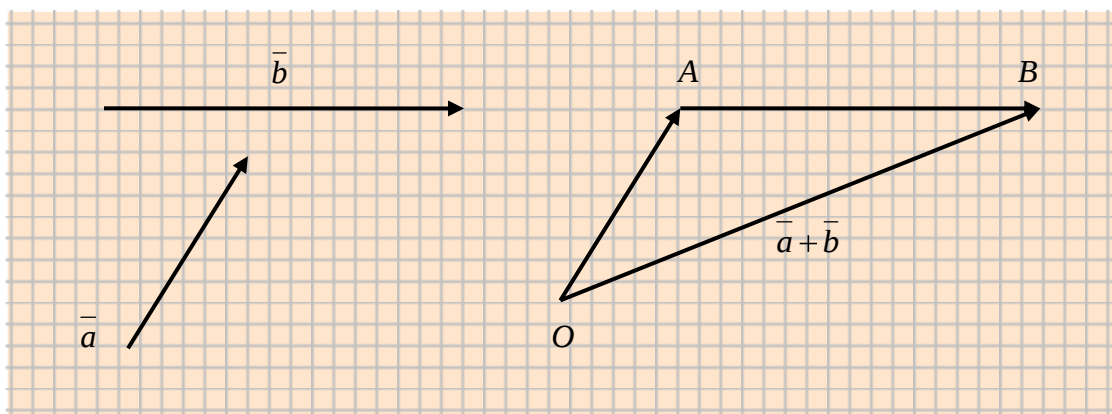


Рис. 3

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*. Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис.4).

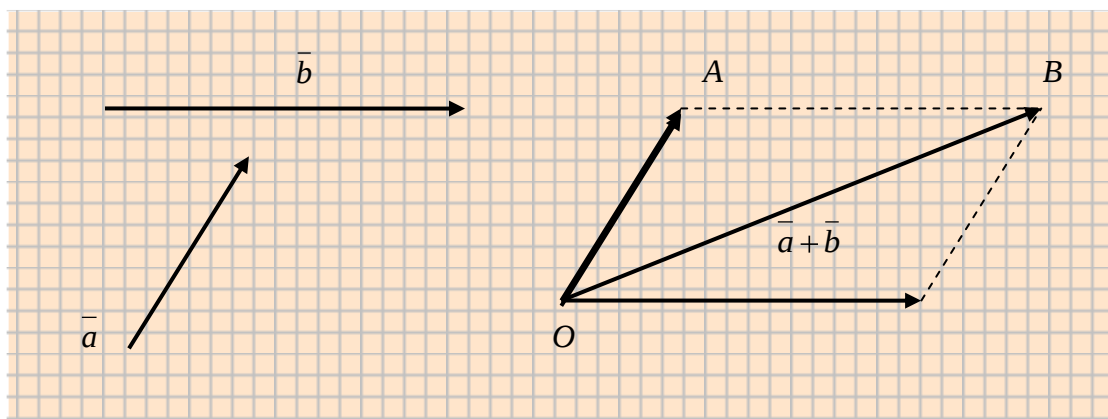


Рис. 4

Подобным образом находится сумма трех и более векторов. Суммой n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, конец – с концом последнего $\vec{a}_n$, причем каждый последующий вектор $\vec{a}_{k+1}$ отложен из конца предыдущего $\vec{a}_k$. Сложение трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ показано на рисунке 5

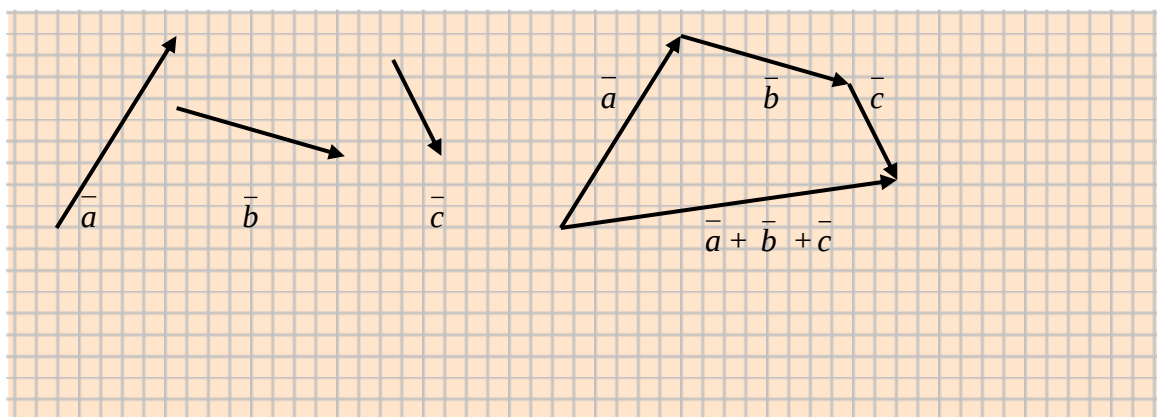


Рис. 5

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (см. рис.6).

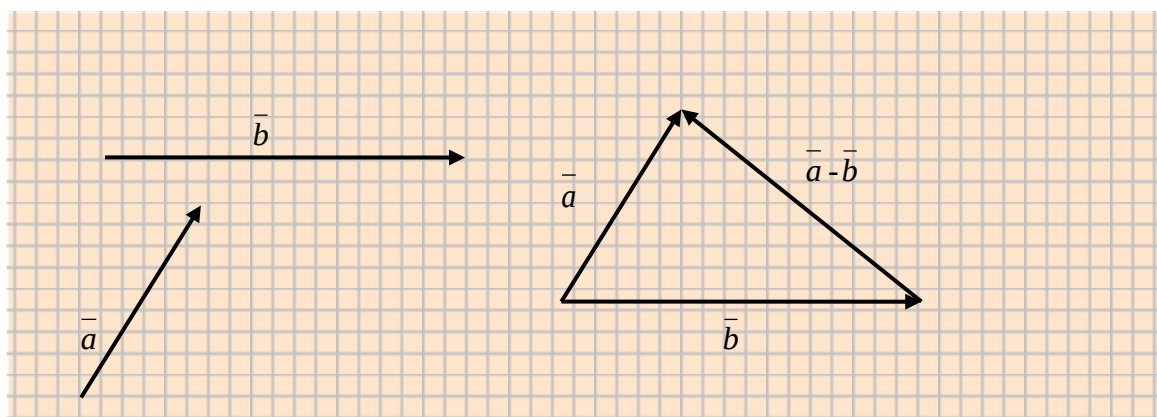


Рис. 6

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью этих векторов (см. рис.7).

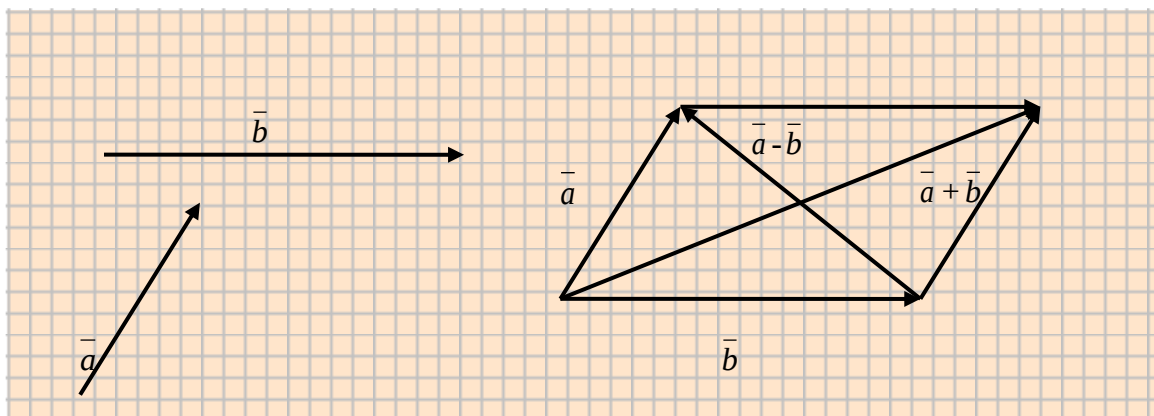


Рис. 7

Вычитание векторов можно заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \vec{a}$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположное направление при $\lambda < 0$.

Свойства линейных операций над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$;
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.

Эти свойства позволяют слагаемые менять местами, расставлять скобки для указания нужного порядка действий, выносить за скобки скалярные и векторные общие множители.

1.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве заданы ось l и вектор $\vec{AB}$ (см. рис.8).

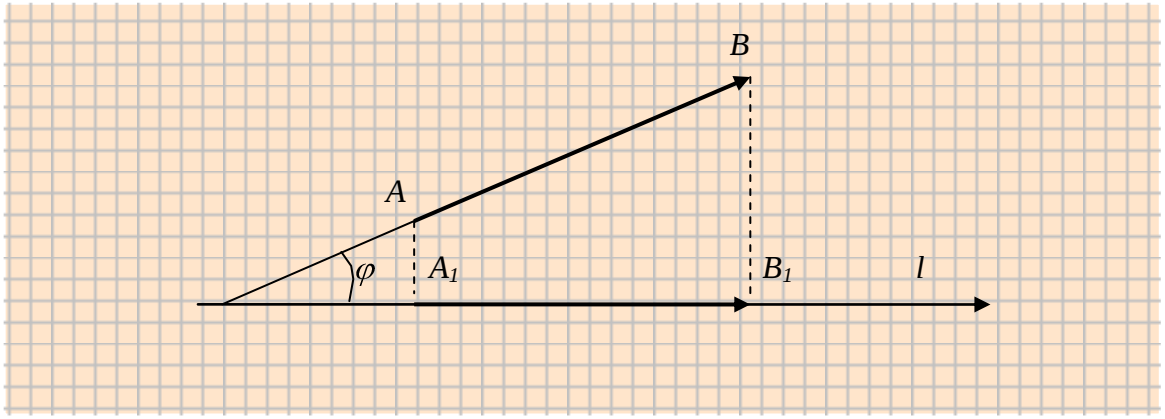


Рис. 8

Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ в результате получим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается $np_l \overline{AB}$. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $np_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos \varphi$.

Свойство проекции вектора на ось.

1. $np_l (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = np_l \overline{a} + np_l \overline{b} + np_l \overline{c}$
2. $np_l (\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot np_l \overline{a}$.

Следовательно, линейные операции над векторами можно свести к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

1.4. Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные орты координатных осей. Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$ (см.рис.9).

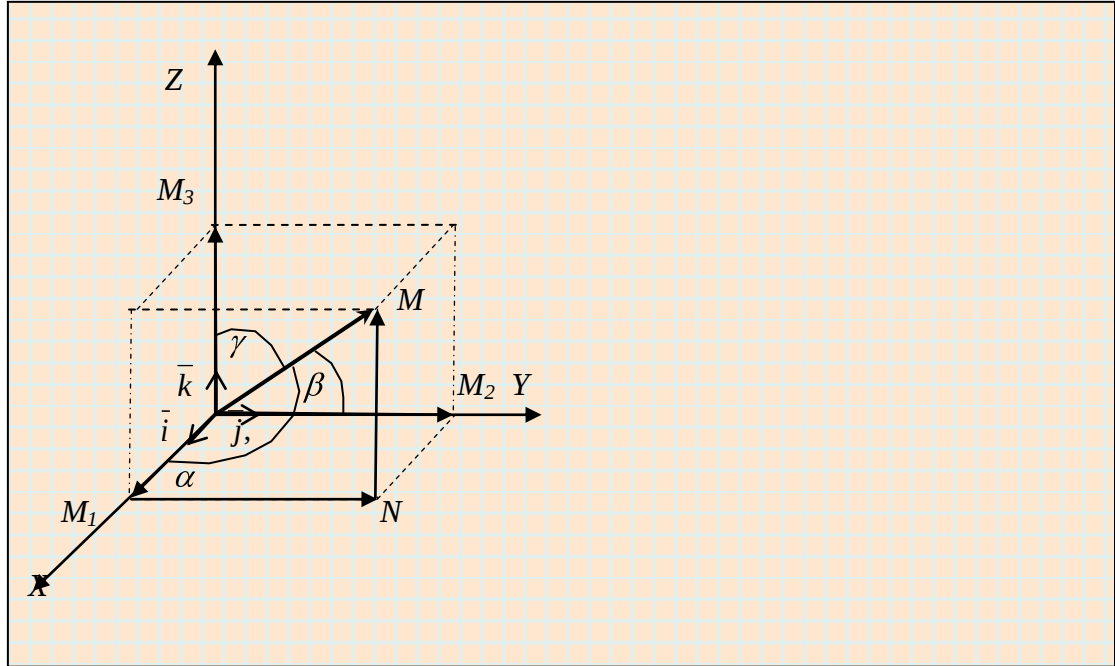


Рис. 9

Найдём проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведём через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3 . Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси OX , OY и OZ соответственно через a_x, a_y и a_z , т.е. $|\overline{OM_1}| = a_x, |\overline{OM_2}| = a_y, |\overline{OM_3}| = a_z$.

Тогда

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$$

или, учитывая равенства

$$\overline{M_1N} = \overline{OM_2}, \overline{NM} = \overline{OM_3}, \bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3},$$

получаем

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}. \quad (1)$$

Эта формула называется *разложением вектора по ортам координатных осей*. Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора $\bar{a}$* в прямоугольной системе координат $OXYZ$. Кроме равенства (1) вектор можно записывать в виде: $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x; a_y; a_z \end{pmatrix}$ и, равенство $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_x; b_y; b_z \end{pmatrix}$ означает, что $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно найти вектора. На основании теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда

$$|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2$$

или

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2)$$

т.е. *длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.*

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями OX , OY и OZ соответственно равны α, β, γ . Тогда по свойству проекции вектора на ось

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma.$$

Отсюда выразим

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Справедливо равенство

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

т.е. *сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.*

Координатами единичного вектора $\vec{e}$ являются числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, следовательно, т.е. $\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его длину и направление, следовательно, так определяется и сам вектор.

1.5. Действия над векторами, заданными координатами

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z).$$

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то:

$$1. \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

$$2. \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

Коллинеарность векторов

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, где λ - некоторое число. Тогда

$$a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \lambda (\vec{e}_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \lambda b_x \cdot \vec{i} + \lambda b_y \cdot \vec{j} + \lambda b_z \cdot \vec{k}.$$

Отсюда $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$ или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Следовательно, *координаты коллинеарных векторов пропорциональны*. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $OXYZ$. Для любой точки M координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ называются *координатами точки M* . Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M , обозначается $\vec{r}$, т.е. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Следовательно, координаты точки – это координаты её радиус – вектора $\vec{r} = (x; y; z)$.

Координаты точки M записываются в виде $M(x; y; z)$.

Координаты вектора

Найдём координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем (см. рис. 10)

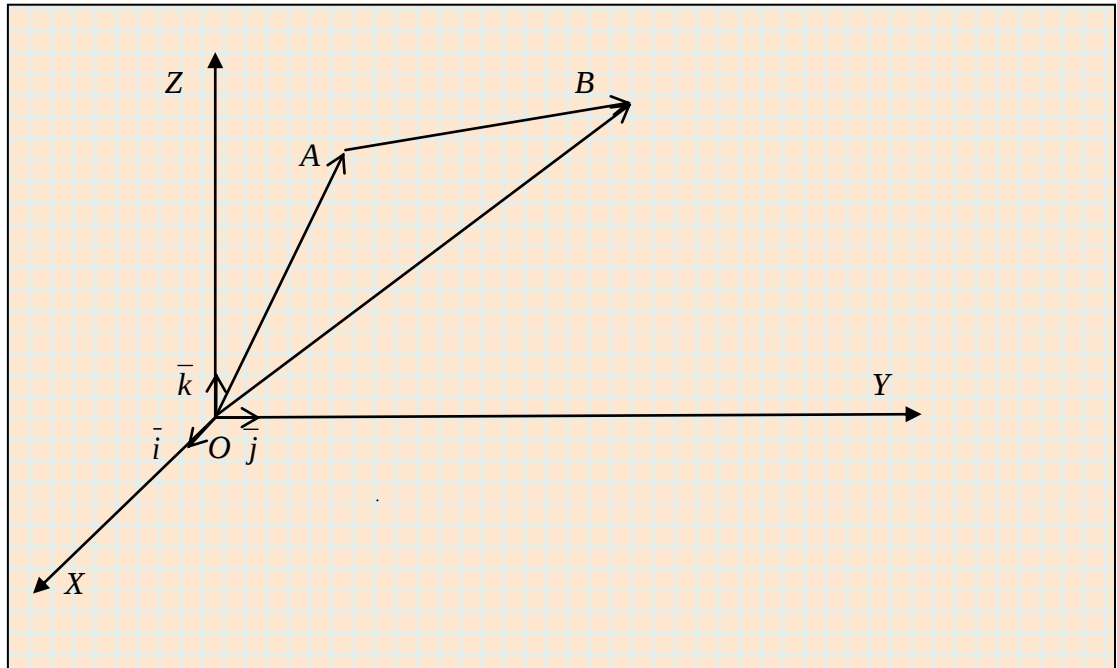


Рис. 10

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) - (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

1.6. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается скалярное произведение следующим образом: $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Итак, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Так как $|\vec{a}| \cos \varphi = np_{\vec{b}} \vec{a}$, и $|\vec{b}| \cos \varphi = np_{\vec{a}} \vec{b}$, то эту формулу можно записать иначе:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения

1. Переместительное свойство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \text{ и } \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{a}).$$

И так как $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{a})$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Сочетательное свойство относительно скалярного множителя: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \lambda = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \lambda = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \lambda \vec{a} = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Распределительное свойство: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (np_{\vec{a}} \vec{b} + np_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2.$$

В частности: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Если вектор $\vec{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его длину $|\vec{a}|$, т.е. $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$ ($\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}$).

Пример 1. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2} = \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

5. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Так как $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$.

Если же $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Отсюда $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

В частности, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора своими координатами:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Найдём скалярное произведение векторов, перемножив с учетом свойств скалярного произведения и равенств ($\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (\bar{a}_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (\bar{b}_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x \bar{i} \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \bar{j} + a_x b_z \bar{i} \bar{k} + a_y b_x \bar{j} \bar{i} + a_y b_y \bar{j} \bar{j} + \\ &+ a_y b_z \bar{j} \bar{k} + a_z b_x \bar{k} \bar{i} + a_z b_y \bar{k} \bar{j} + a_z b_z \bar{k} \bar{k} = a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Пример 2. Доказать, что диагонали четырёхугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$, взаимно перпендикулярны.

Решение: Составим векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырёхугольника. Имеем, $\overline{AC} = \langle 6;9;-3 \rangle$ и $\overline{BD} = \langle 6;-4;0 \rangle$. Найдём скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами

$$\bar{a} = \langle a_x; a_y; a_z \rangle \text{ и } \bar{b} = \langle b_x; b_y; b_z \rangle:$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \text{ т.е. } \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

1.7. Векторное произведение векторов

Определение векторного произведения

Три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой (см. рис. 11).

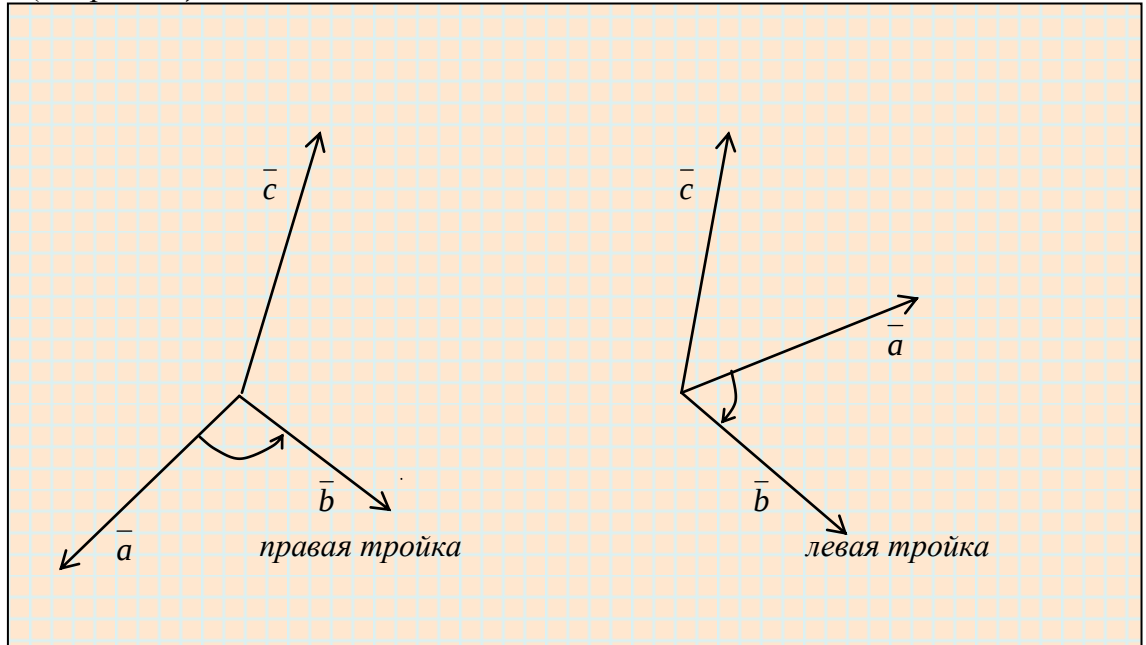


Рис. 11

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного как на сторонах (см. рис. 12),
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ т.е. перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

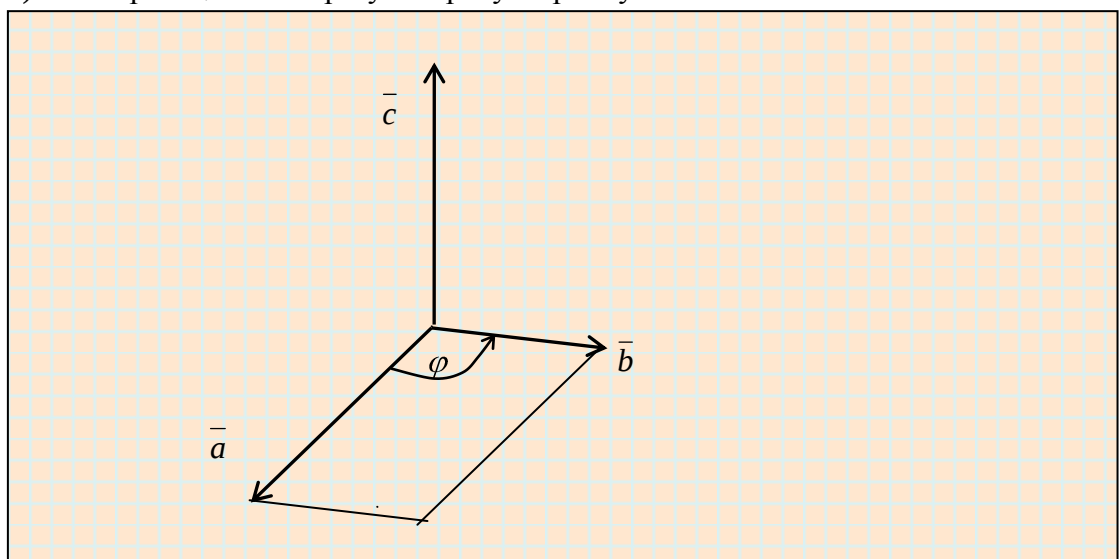


Рис. 12

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b} \times \vec{a}]$.

Векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые длины (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}$ противоположной ориентации). Значит, $\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b} \times \vec{a}]$.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е. $\lambda [\vec{a} \times \vec{b}] = [\lambda \vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times [\lambda \vec{b}]$.

Пусть $\lambda > 0$. Вектор $\lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $[\lambda \vec{a} \times \vec{b}]$ также перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (векторы $\vec{a}, \lambda \vec{a}$ лежат в одной плоскости). Значит, векторы $\lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ и $[\lambda \vec{a} \times \vec{b}]$ коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda [\vec{a} \times \vec{b}]| = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

и

$$|[\lambda \vec{a} \times \vec{b}]| = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Поэтому $\lambda [\vec{a} \times \vec{b}] = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$. Аналогично доказывается при $\lambda < 0$.

3. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то угол между ними равен 0° или 180° . Но тогда $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Значит, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0$. Но тогда

$$\varphi = 0^\circ \text{ или } \varphi = 180^\circ, \text{ т.е. } \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

В частности, $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$[\vec{a} + \vec{b}] \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора своими координатами:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Тогда векторное произведение двух векторов выражается формулами

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

или

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приложения векторного произведения

1. Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю т.е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

2. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

1.8. Смешанное произведение векторов

Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{a}$ умножим векторно на вектор $\vec{b}$, затем векторное произведение умножим скалярно на вектор $\vec{c}$. Получим число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным* произведением, векторов.

Смешанное произведение трёх векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его множителей, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Действительно, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ и $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \pm V$. Знаков правой части этих равенств берём один и тот же, так как тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ - одной ориентации.

Следовательно $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ в виде $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов - сомножителей, т.е. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$.

Действительно такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объёмом $V \neq 0$. Но т.к. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V$, то получили бы, что $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \neq 0$. Это противоречит условию: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны. Тогда вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и, следовательно, $\vec{d} \perp \vec{c}$, поэтому $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$, т.е. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Найдём их смешанное произведение, используя выражение в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z \right). \end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

т.к. правая часть равенства () представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} > 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая тройка; если $\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} < 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{c} \neq 0$):

$$\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется как $V = |\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}|$, а объём треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}|$.

Глава 2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Системы координат на плоскости

2.1.1. Прямоугольная и полярная системы координат

Системой координат на плоскости называется способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Примером систем является *прямоугольная (декартова) система координат*.

Прямоугольная система координат задаётся двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения O – *началом координат*.

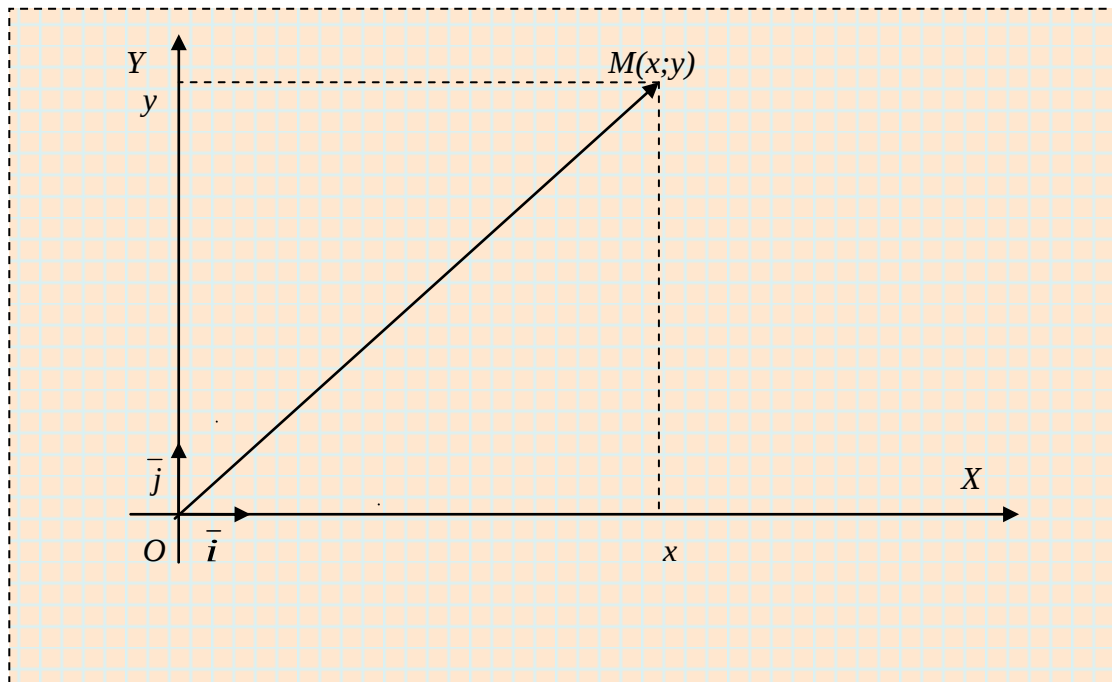


Рис. 13

Одну из осей называют осью *абсцисс* (осью Ox), другую – осью *ординат* (осью Oy).

На рисунках ось абсцисс обычно изображается горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат – вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области – *четверти* (или *квадранты*).

Единичные векторы обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$).

Систему координат обозначают OXY (или $O\vec{i}\vec{j}$), а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью*.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy . Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M .

Координаты точки M в системе координат OXY называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Если $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$, число x называется *абсциссой* точки M , y – *ординатой* точки M .

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Другой системой координат является *полярная система*. Полярная система координат задаётся точкой O , называемой *полюсом*, лучом Op , называемым *полярной осью*, и единичным вектором $\vec{e}$ того же направления, что и луч Op .

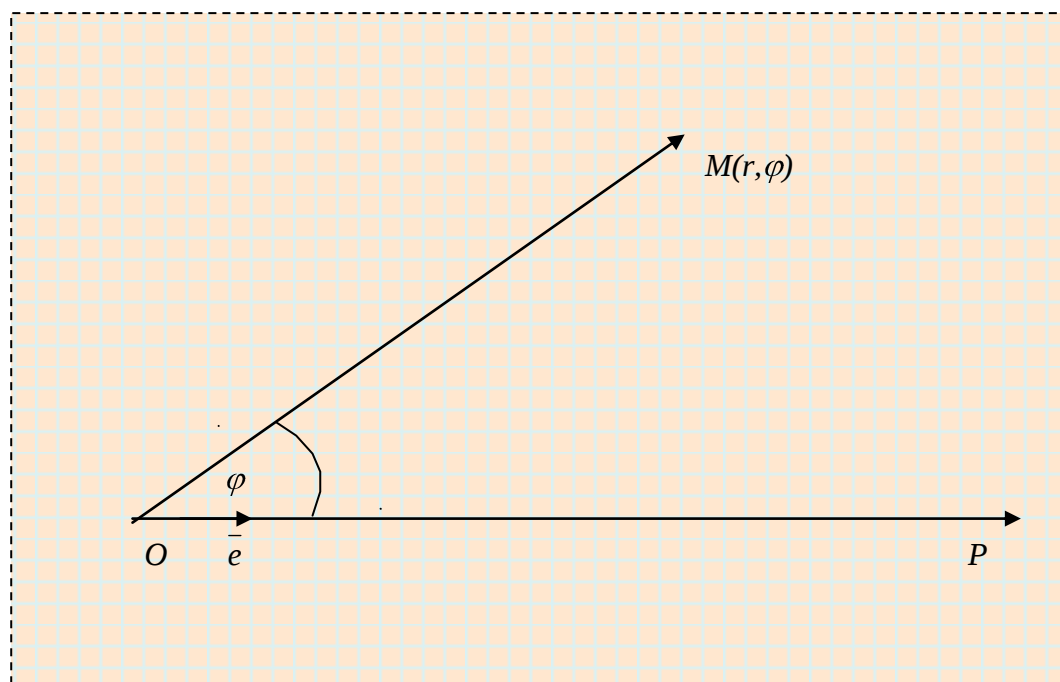


Рис. 14

Возьмём на плоскости точку M , не совпадающую с O . Положение точки M определяется двумя числами: её расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью (отсчёт углов ведётся в направлении, противоположном движению часовой стрелки).

Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M , пишут $M(r; \varphi)$, при этом r называют *полярным радиусом*, φ - *полярным углом*.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $(-\pi; \pi]$ (или $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), а полярный радиус – $[0, \infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ , и обратно.

Найдем связь между прямоугольными и полярными координатами. Для этого совместим полюс O с началом координат OXY , а полярную ось – с положительной полуосью Ox . Пусть x и y – прямоугольные координаты точки M , а r и φ – её полярные координаты.

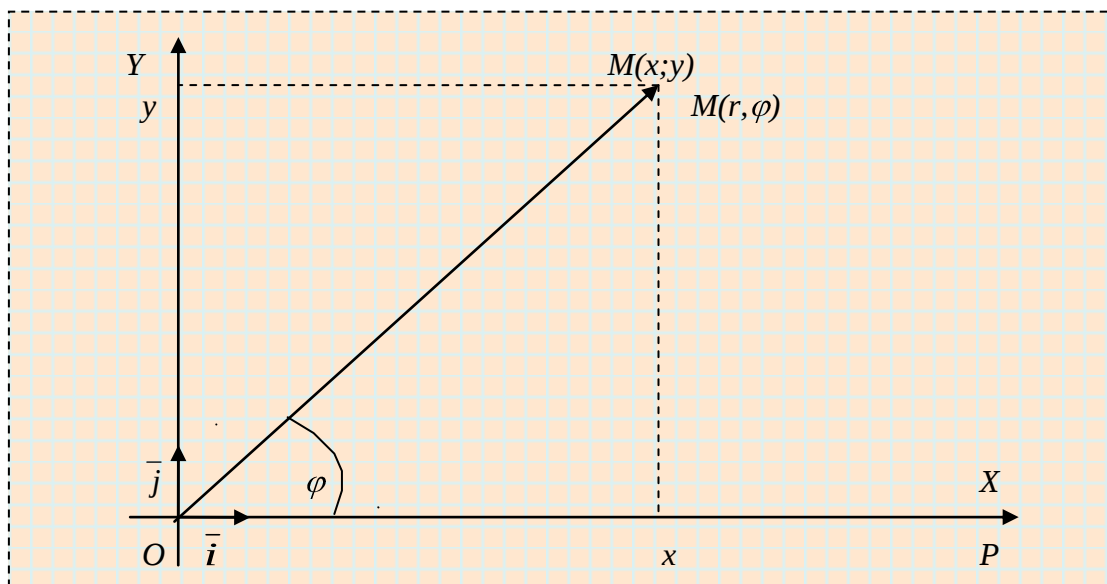


Рис. 15

Из рис.3 видно, что прямоугольные координаты точки $M(x;y)$ выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Полярные координаты точки $M(r;\varphi)$ выражаются через её декартовы координаты формулами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Определяя величину φ , следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \leq \pi$.

► **Пример 1.** Определить прямоугольные координаты точки $A(8; \frac{\pi}{4})$, заданной в полярной системе координат.

На плоскости зададим прямоугольную и полярную системы координат. Для этого совместим полярный полюс O с началом координат OXY , а полярную ось – с положительной полуосью Ox .

Пусть x и y – прямоугольные координаты точки A , а $r = 8$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ – её полярные координаты (см. рис. 4).

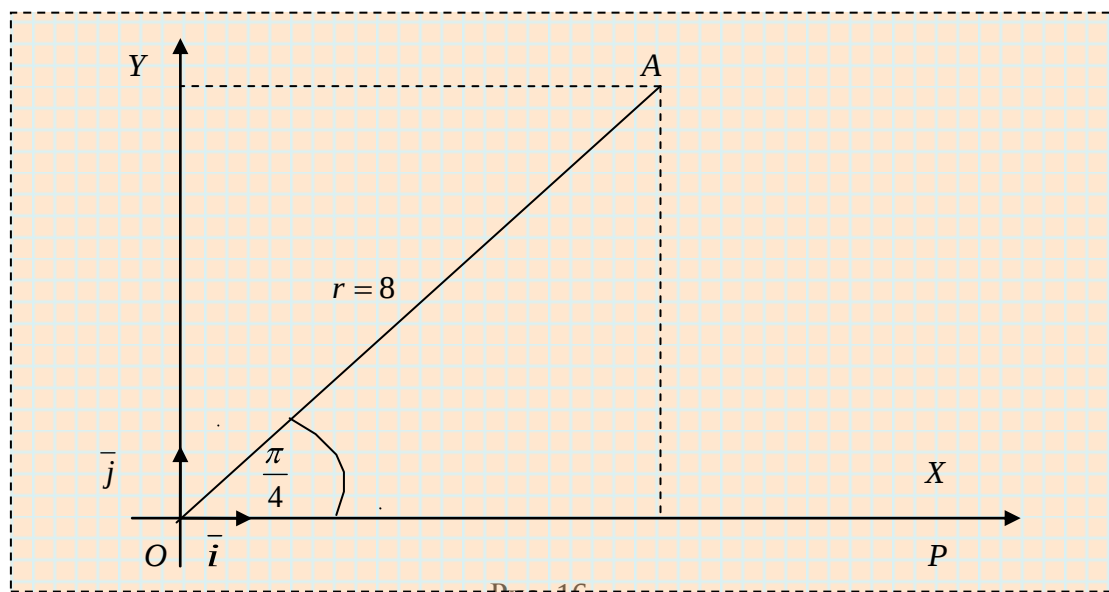


Рис. 16

Тогда $x = 8 \cos \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$ и $y = 8 \sin \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$. ◀

2.1.2. Основные задачи на плоскости

Расстояние между двумя точками

Пусть на плоскости OXY заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, тогда расстояние d между ними равно длине вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Деление отрезка в заданном отношении

Необходимо разделить отрезок AB (см. рис.4), соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB такой, чтобы выполнялось векторное равенство $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$.

Запишем это равенство в координатной форме:

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j}.$$

Приравняв координаты векторов

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y,$$

получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

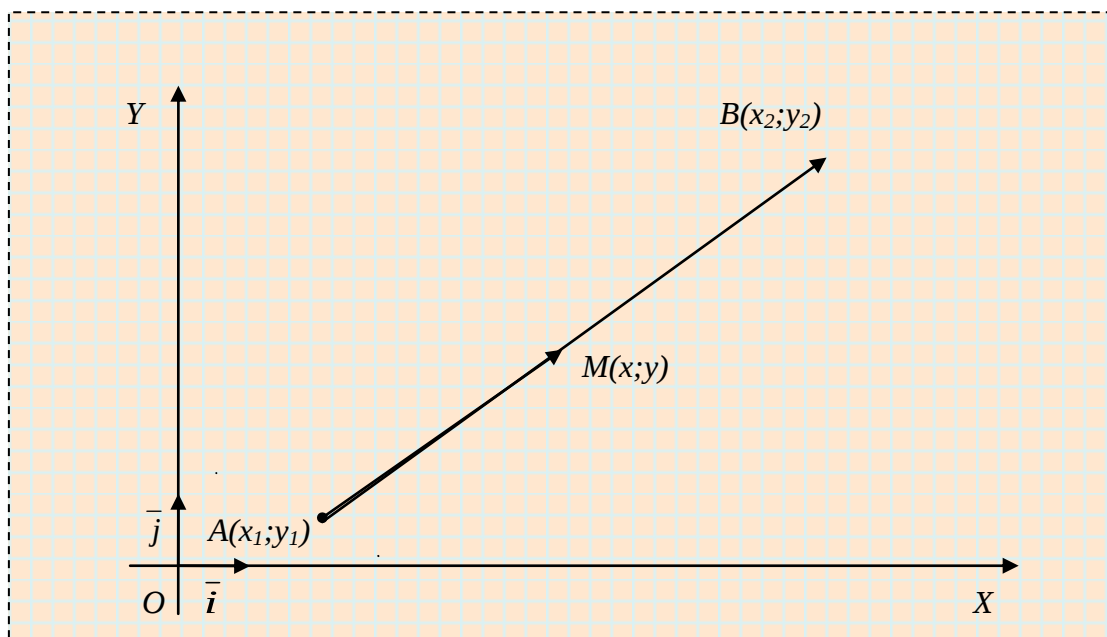


Рис. 17

Эти формулы называются *формулами деления отрезка в заданном отношении*. При $\lambda = 1$ точка $M(x; y)$ является *серединой отрезка AB* и тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

► **Пример 1.** Найти длину биссектрисы внутреннего угла A треугольника с вершинами в точках $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, и $C(-2; 0)$.

В треугольнике ABC (см. рис. 6) биссектриса AM . Точка M делит сторону BC на

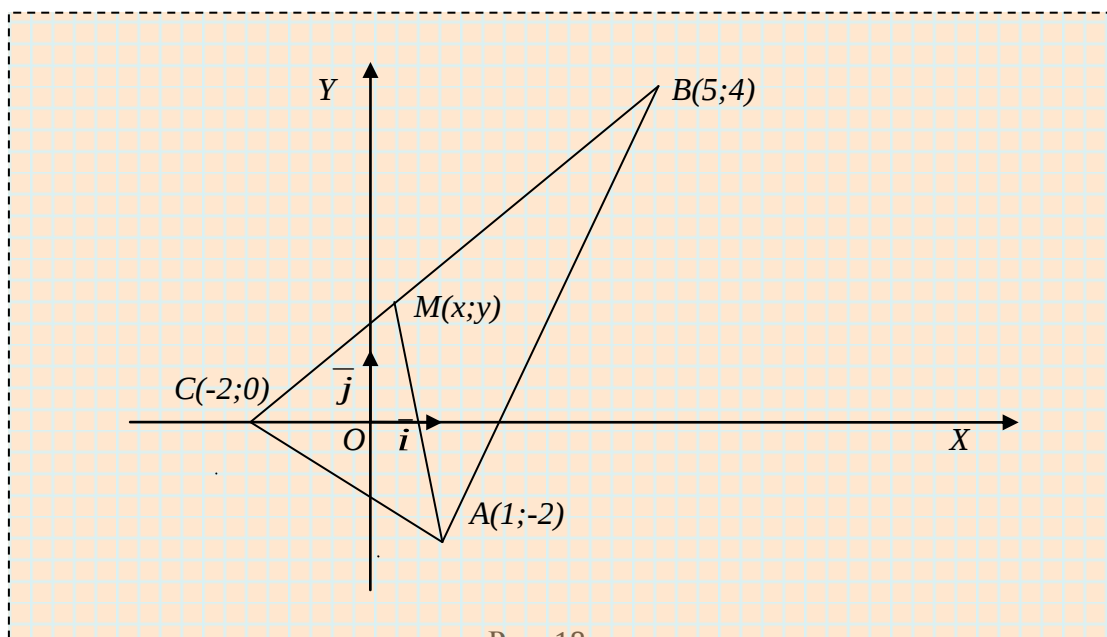


Рис. 18

части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

Так как $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}$ и $AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$, то

$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = 2$. Координаты точки M определим, разделив отрезок в заданном отношении: $BM = 2CM$:

$$x = \frac{5 + 2(-2)}{1 + 2} = \frac{1}{3}, y = \frac{4 + 2(0)}{1 + 2} = \frac{4}{3}.$$

Вычислим длину отрезка $AM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-2 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{104}}{3}$. ◀

2.1.3. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в другую называется *преобразованием системы координат*.

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

Параллельный перенос осей координат

Пусть задана прямоугольная система координат OXY . При *параллельном переносе* осей координат понимают переход от системы координат OXY к новой $O'X'Y'$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб не изменяются.

Пусть начало системы координат $O'X'Y'$ точка O' имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат OXY , т.е. $O_1(x_0; y_0)$, а произвольная точка M плоскости в системе OXY имеет координаты $(x; y)$ и в новой системе $O'X'Y'$ - $(x'; y')$. Необходимо найти соотношения между $(x; y)$ и $(x'; y')$ (см рис. 7).

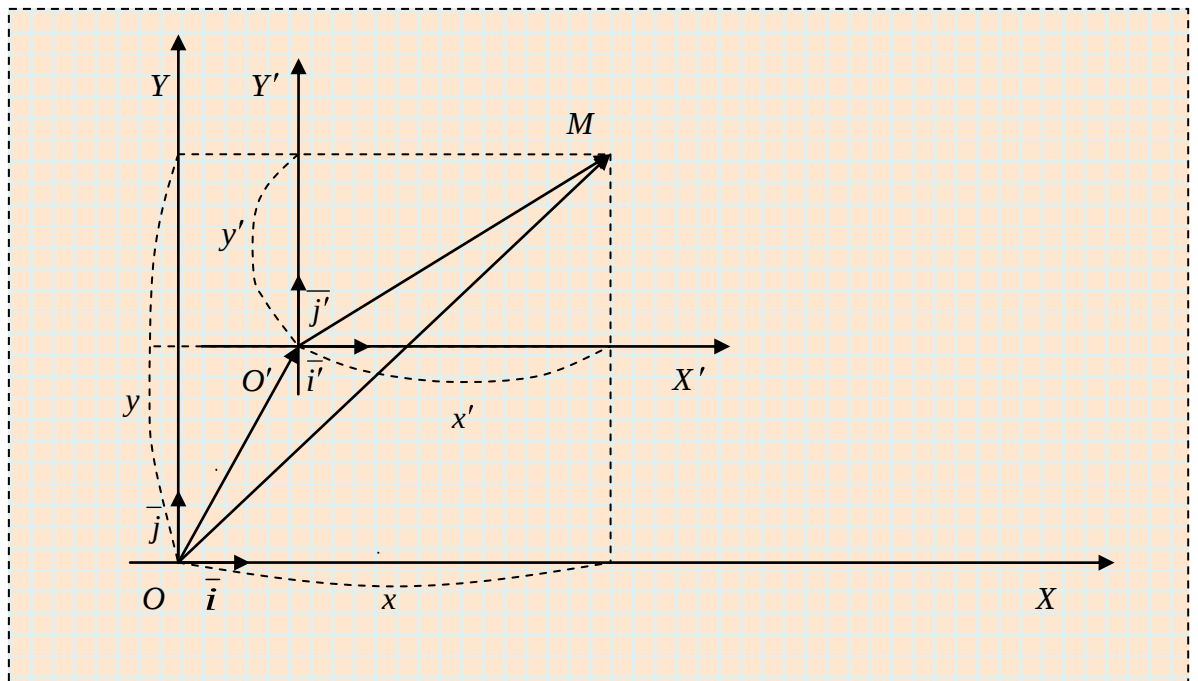


Рис. 19

Рассмотрим векторы

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \overline{OO'} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \quad \overline{O'M} = x'\bar{i} + y'\bar{j},$$

Так как

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}, \text{ то } x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}, \text{ т.е.}$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} = (x_0 + x')\bar{i} + (y_0 + y')\bar{j}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

Поворот осей координат

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $OX'Y'$ получена поворотом координатных осей системы OXY на угол α .

Пусть M - произвольная точка плоскости, $(x; y)$ - её координаты в старой системе и $(x'; y')$ - в новой системе.

Введём две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями OX и OX' (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha + \varphi$ и φ , где φ - полярный угол в полярной системе OX' (см рис. 8).

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi). \end{cases}$$

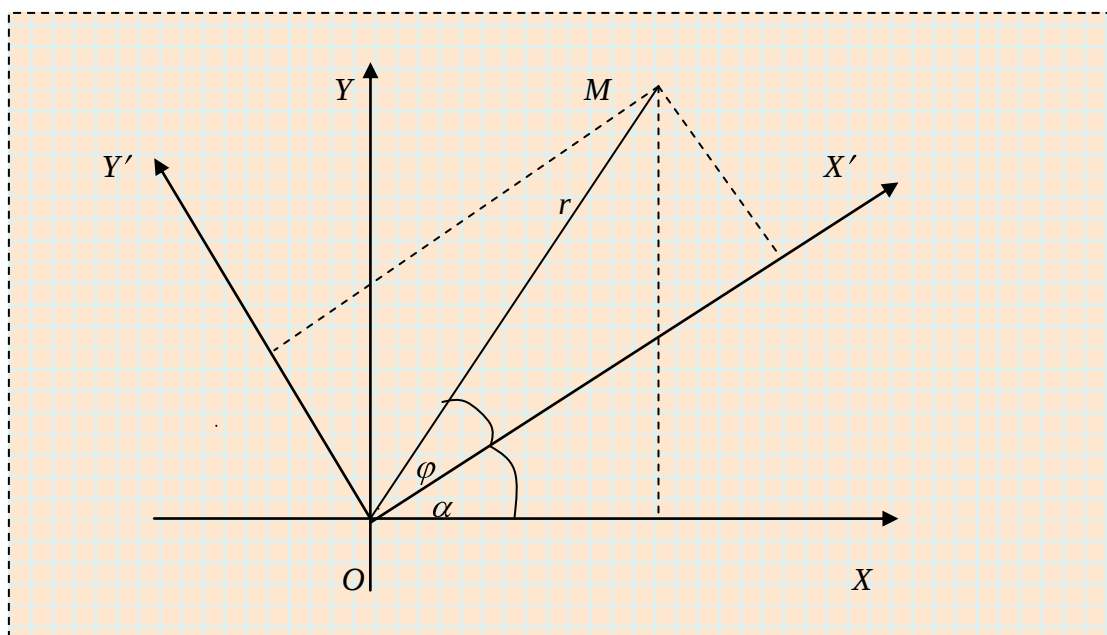


Рис. 20

Отсюда получим

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha, \\ y = r \cdot \cos \varphi \sin \alpha + r \sin \varphi \cos \alpha. \end{cases}$$

Так как $x' = r \cdot \cos \varphi$ и $y' = r \cdot \sin \varphi$, то

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Полученные формулы устанавливают связь между старыми координатами $(x; y)$ произвольной точки M и новыми координатами $(x'; y')$ этой же точки M .

Пусть новая система координат $OX'Y'$ получена из старой OXY путём параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α , тогда формулы, выражающие старые координаты x и y произвольной точки через её новые координаты x' и y' , имеют вид.

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{cases}$$

2.2. Прямая на плоскости

Уравнением линии на плоскости является уравнение $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y линии и только они. Прямая на плоскости определяется уравнением первой степени. Существуют разные способы задания прямой, что приводит к различным по форме уравнениям.

2.2.1. Общее уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярна ненулевому вектору $\vec{n} = (A; B)$ (см. рис. 1). Тогда для произвольной точки $M(x; y)$, принадлежащей этой прямой, получим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, перпендикулярный заданному вектору $\vec{n} = (A; B)$. Следовательно,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Отсюда получим *общее уравнение* прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

где x и y - координаты произвольной точки прямой (*текущие координаты*), вектор $\vec{n} = (A; B)$ - *нормальный вектор* прямой, $C = -Ax_0 - By_0$.

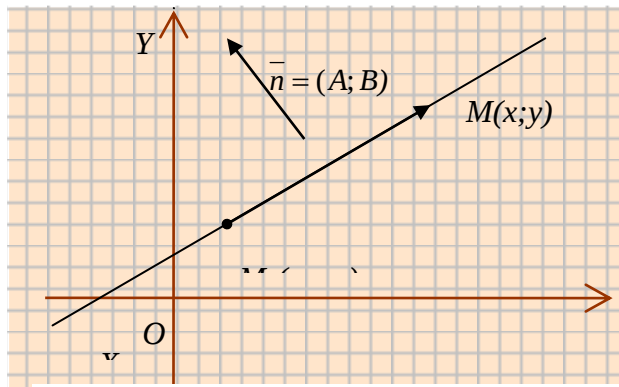


Рис. 21

2.2.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b,$$

где k - угловой коэффициент прямой $k = \tan \alpha$, α - угол, между прямой и положительным направлением оси OX , b - ордината точки пересечения прямой с осью OY (см. рис.2).

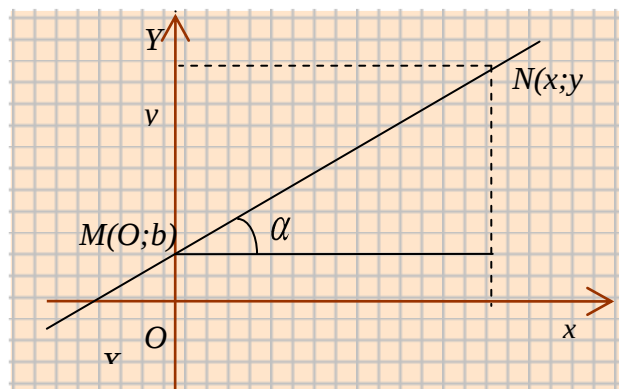


Рис. 22

2.2.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k - угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} \alpha$, α - угол, между прямой и положительным направлением оси OX , $M(x_0, y_0)$ – заданная точка (см рис.3).

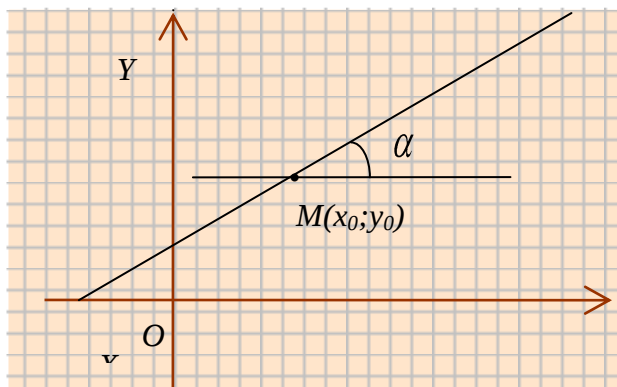


Рис. 3

2.2.4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

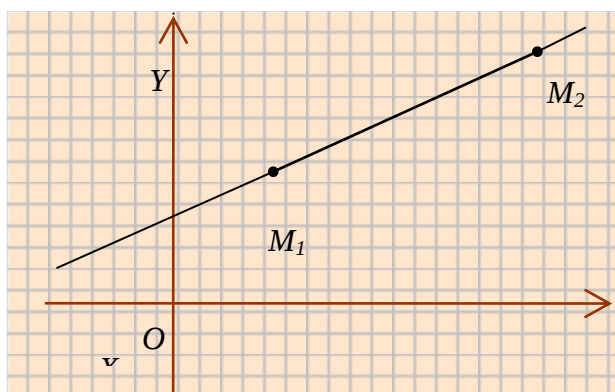


Рис. 4

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (см. рис. 4):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой $y = y_1$, если же $x_1 = x_2$, то уравнение прямой $x = x_1$.

2.2.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(a;0)$ и $M_2(0;b)$ (см. рис. 5), тогда, применяя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, получим

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a},$$

отсюда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

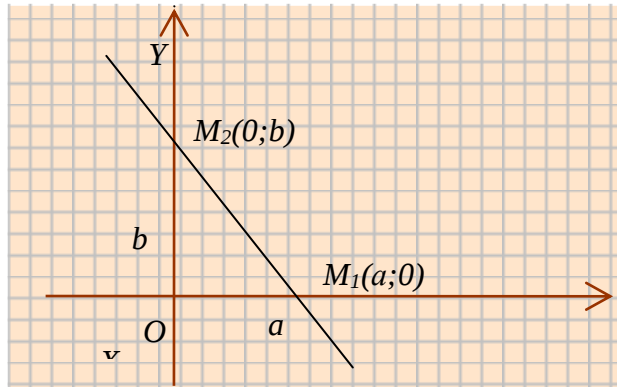


Рис. 5

Пример 1.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ перпендикулярно биссектрисе второго координатного угла.

По направлению биссектрисы второго координатного угла выберем вектор $\vec{n} = (-1;1)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-1;1)$:

$$-1(x-1) + 1(y-2) = 0.$$

Отсюда

$$x - y + 1 = 0.$$

Пример 2.

Составить уравнение медианы треугольника с вершинами $A(3;4)$, $B(4;-1)$ и $C(-2;1)$, проведенной к стороне BC .

Найдем координаты середины стороны BC : $M\left(\frac{4-2}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) = M(1;0)$. Тогда уравнение медианы, как прямой, проходящей через две точки $A(3;4)$ и $M(1;0)$ выглядит так:

$$\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-3}{1-3}$$

или

$$y - 2x + 2 = 0.$$

2.2.6. Нормальное уравнение прямой

Нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол между положительным направлением оси OX и этим перпендикуляром (см.рис. 6).

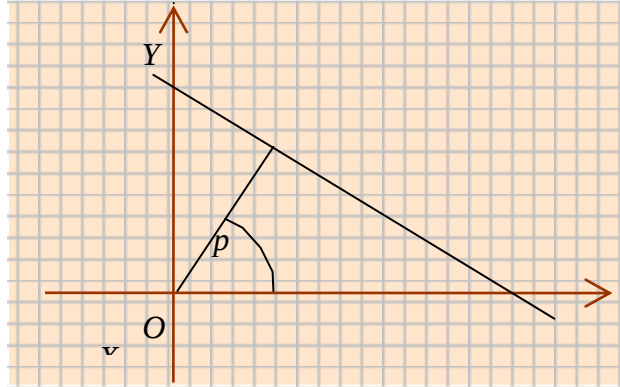


Рис. 6

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ можно преобразовать в нормальное уравнение, если умножить уравнение на множитель $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (знак множителя берется противоположным знаком коэффициента C).

2.2.7. Параметрическое уравнение прямой

Зададим прямую l , проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m} = (p; q)$ (см. рис. 7). Данные условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую.

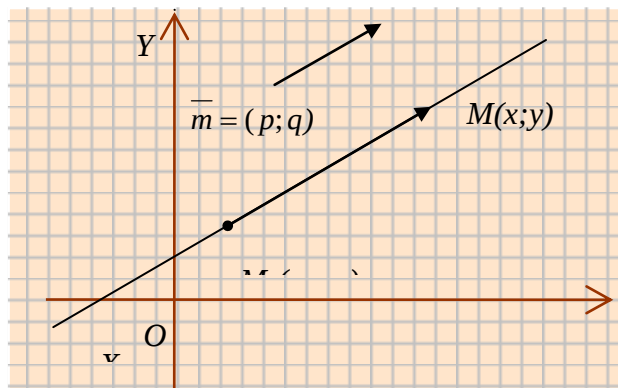


Рис. 7

Обозначим через $M(x, y)$ произвольную точку прямой l . Тогда векторы $\vec{m} = (p; q)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ коллинеарны, значит, $\vec{M_0M} = t\vec{m}$, где t – произвольное вещественное число. Запишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Получено параметрическое уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$

параллельно вектору $\overline{m} = (p; q)$.

Пример 3.

Дано параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$

Запишем уравнение этой прямой в общем виде. Для этого необходимо исключить параметр t : $t = 2 - y$, $x = 1 + 2(2 - y)$, $x + 2y = 5$.

Если точка $A(11, -3)$ принадлежит данной прямой, то координаты точки должны удовлетворять системе $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$ Значит, найдется такое значение параметра t ,

которое является решением системы $\begin{cases} 11 = 1 + 2t, \\ -3 = 2 - t. \end{cases}$ Действительно, из системы находим $t = 5$.

Точка $B(2, 1)$ не принадлежит прямой, так как система $\begin{cases} 2 = 1 + 2t, \\ 1 = 2 - t. \end{cases}$ не имеет решений.

Пример 4.

Написать параметрическое уравнение прямой $3x + 2y = 1$. Пусть $x = t$, тогда $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}(1 - 3t)$. Следовательно,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{2}(1 - 3t). \end{cases}$$

2.2.8. Уравнение отрезка

Запишем уравнение прямой l , проходящей через точки M_1 и M_2 . Вектор $\overline{M_1M_2}$ параллелен прямой l , поэтому параметрическое уравнение прямой в векторной форме имеет вид

$$\overline{M} = \overline{M_1} + t\overline{M_1M_2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если $t=0$, то точка M совпадает с точкой M_1 , при увеличении параметра t точка M перемещается по прямой l от точки M_1 к точке M_2 , и при $t=1$ точка M совпадает с точкой M_2 (рис. 8).

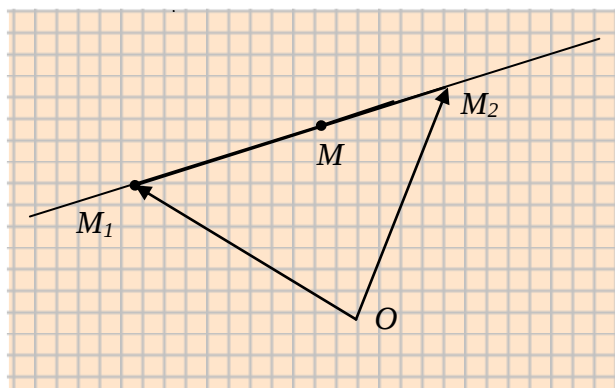


Рис. 8

Поэтому уравнение $\overline{M} = \overline{M_1} + t\overline{M_1M_2}$, $0 \leq t \leq 1$, является параметрическим уравнением отрезка $[M_1, M_2]$ в векторной форме. Так как $\overline{M_1M_2} = \overline{M_2} - \overline{M_1}$, то уравнение отрезка можно записать в следующем виде:

$$\overline{M} = \overline{M_1} - t\overline{M_1} + t\overline{M_2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Пусть точки M , M_1 и M_2 имеют соответственно координаты (x, y) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , тогда:

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2.2.9. Угол между двумя прямыми

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1 и l_2 соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 9).

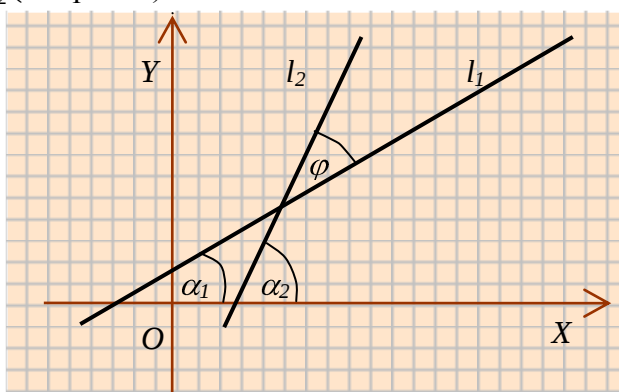


Рис. 9

Необходимо найти угол φ между прямыми l_1 и l_2 . Так как $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ и $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Из этой формулы вытекают условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$.

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Пример 5.

Определить взаимное расположение прямых $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1$ и $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 2$.

Уравнения прямых преобразуем к уравнениям с угловыми коэффициентами:

$$y = \frac{8}{9}x - \frac{4}{3} \text{ и } y = -\frac{9}{8}x - 3.$$

Так $k_1 = \frac{8}{9}$, $k_2 = -\frac{9}{8}$ и $k_1k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

2.2.10. Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости заданы прямая l уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$. Расстояние от точки до прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 6.

Найти расстояние между прямыми $4x + 3y = 1$ и $4x + 3y = 10$.

На прямой $4x + 3y = 1$ выберем произвольную точку, например, $M(1; -1)$ и вычислим расстояние от этой точки до другой прямой:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}.$$

2.3. Линии второго порядка на плоскости

Линией второго порядка на плоскости называется линия, задаваемая в прямоугольной системе координат уравнением второй степени относительно текущих координат. В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты A, B, C, D, E и F действительные числа и, хотя бы одно из чисел A, B, C не равно нулю. Такое уравнение на плоскости может представлять: *окружность, эллипс, гиперболу, параболу, две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямую, точку или пустое множество.*

2.3.1. Окружность

В прямоугольной системе координат окружность с центром в точке $A(a; b)$ радиуса R определяется уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Раскрыв скобки в этом уравнении, получим:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Сравнив последнее уравнение с уравнением (1), видим, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах переменных равны и нет члена с произведением переменных. Следовательно, имеет смысл рассмотреть уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) разделим на $A \neq 0$ и выделим полные квадраты относительно x и y :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} &= 0, \\ \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 &= \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0$, то уравнение (4) – уравнение окружности с

центром в точке $M(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A})$ и радиуса $R = \sqrt{\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}}$.

Если $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} = 0$, то уравнение (4) представляет одну точку $M(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A})$.

Если же $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} < 0$, то уравнение (4) не определяет ни одну точку.

2.3.2. Эллипс

Эллипсом, называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, при условии, что эта величина больше расстояния между фокусами.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой, проходящей через фокусы F_1 и F_2 , а начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2 (см. рис. 1). Пусть расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2c$. Тогда в выбранной системе координат $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ и справедливы равенства:

$$MF_1 + MF_2 = 2a, MF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, MF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

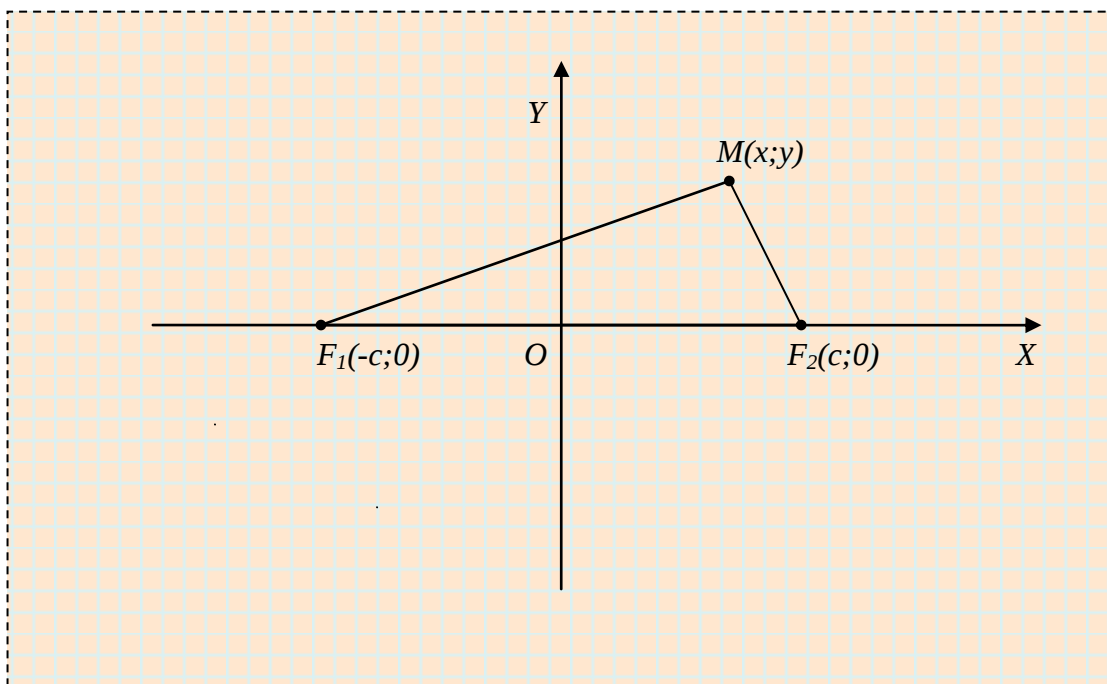


Рис. 24

После возведения в квадрат и упрощения получим уравнение:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

Обозначив $b^2 = a^2 - c^2$ ($a > c$), получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

По уравнению эллипса определим его свойства. Уравнение (5) содержит x и y в четных степенях, следовательно, координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром его симметрии, причем эту точку называют центром эллипса (см. рис. 2).

Точки пересечения эллипса с координатными осями: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $A_3(0;-b)$, $A_4(0;b)$ называют вершинами эллипса. Числа $2a$ и $2b$ называют соответственно большой и малой осями эллипса, a и b – большая и малая полуоси эллипса.

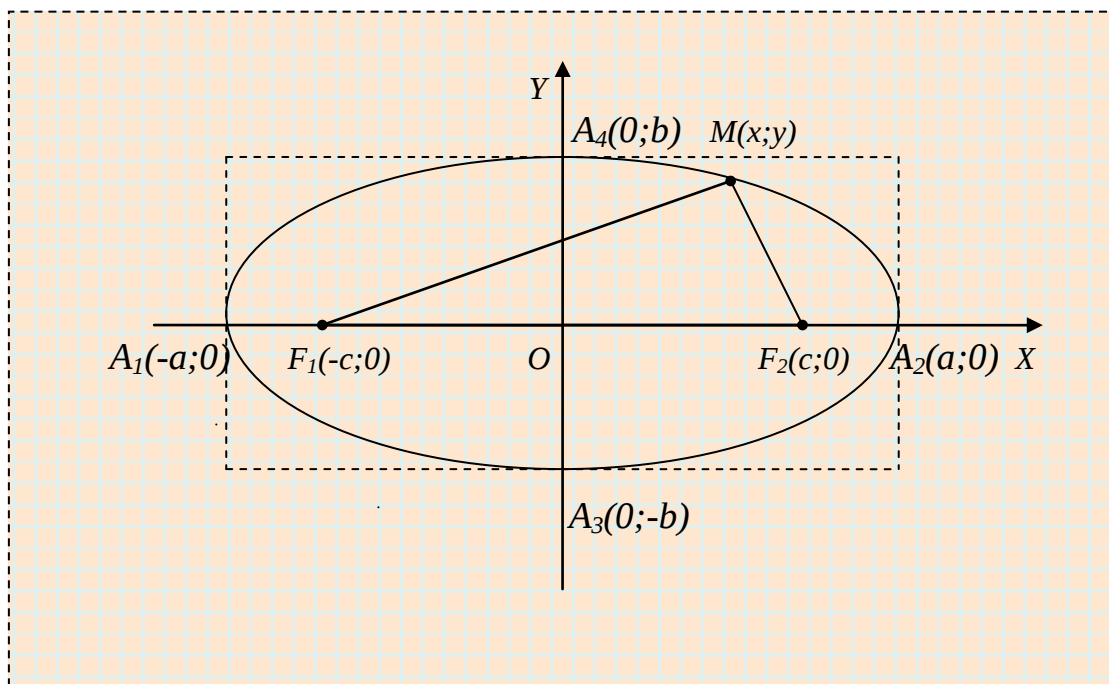


Рис. 25

Из уравнения эллипса следует: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. Следовательно, линия эллипса находится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Кроме того, если $|x|$ возрастает, то $|y|$ убывает, и наоборот, если $|y|$ возрастает, то $|x|$ убывает.

2.3.3. Гипербола

Гиперболой, называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, от каждой из которых до двух заданных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, при условии, что эта величина $\neq 0$ и меньше расстояния между фокусами (см. рис. 3):

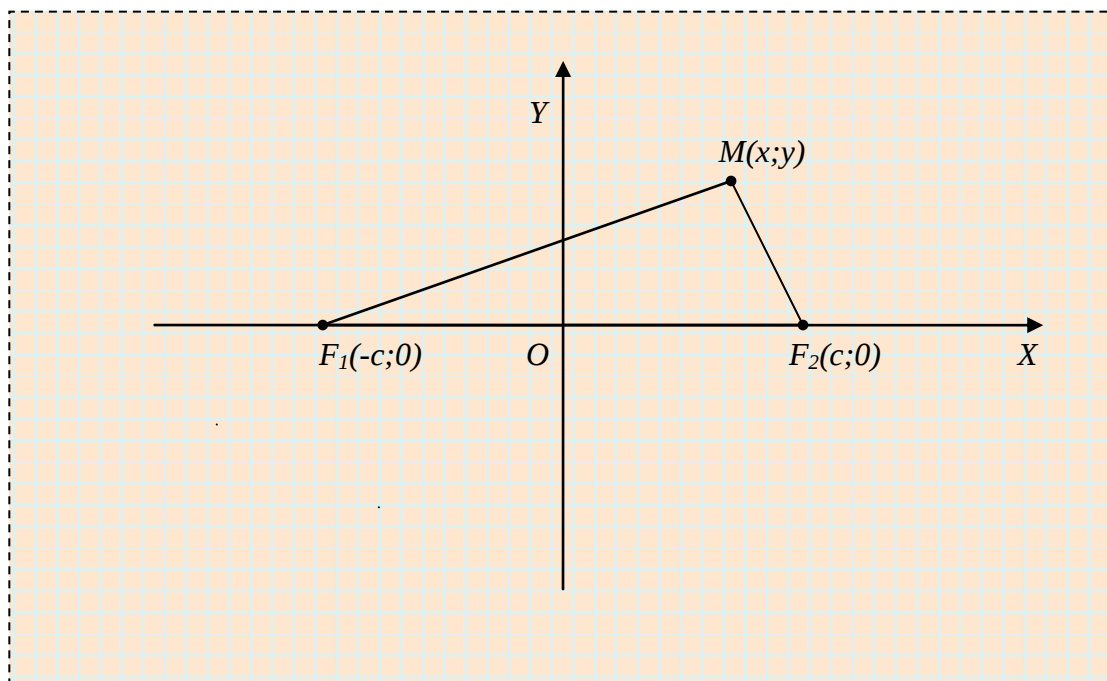


Рис. 26

$$|MF_1 - MF_2| = 2a, 2a < 2c.$$

Отсюда, учитывая, что

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \text{ и } MF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, MF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2},$$

получим

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Далее, избавившись от иррациональностей, приходим к каноническому уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2. \quad (6)$$

По этому уравнению определим свойства гиперболы. Уравнение (6) содержит x и y в четных степенях, следовательно, координатные оси являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — центром ее симметрии (см. рис. 4). Центр симметрии гиперболы называется центром гиперболы.

Число a называют действительной полуосью гиперболы, число b — мнимой полуосью гиперболы, $2a$ и $2b$ — соответственно действительной и мнимой осями гиперболы. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ — вершины гиперболы, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — фокусы (см. рис. 4).

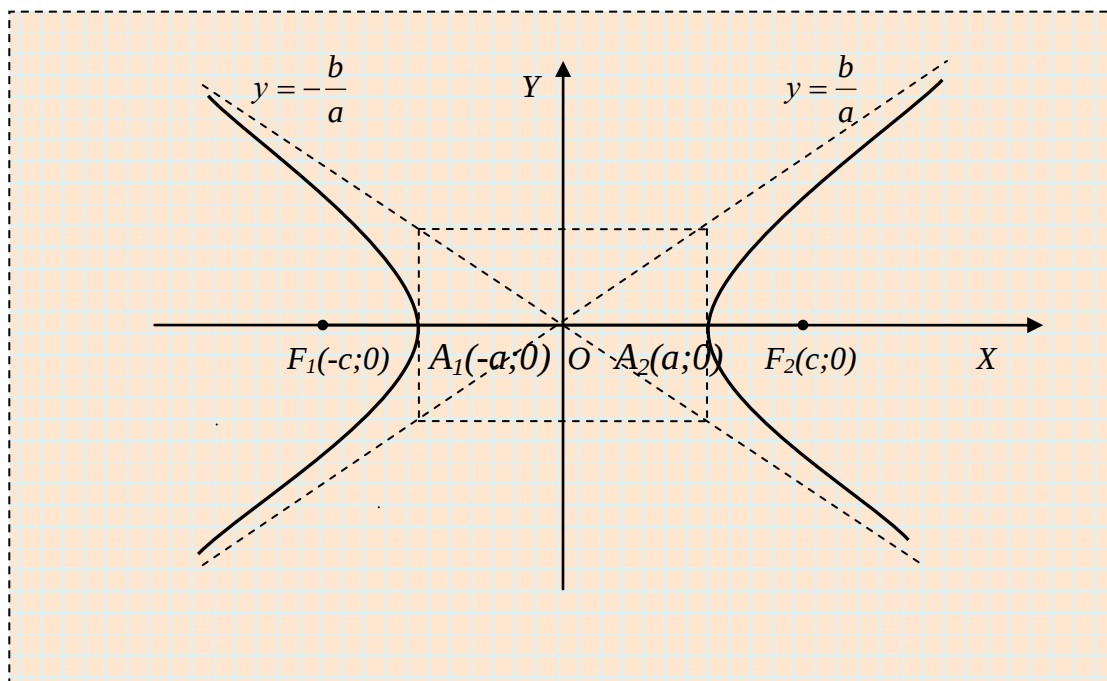


Рис. 27

Гипербола имеет асимптоты $y = -\frac{b}{a}$ и $y = \frac{b}{a}$.

2.3.4. Парабола

Параболой, называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F (фокуса) и заданной прямой, называемой директрисой.

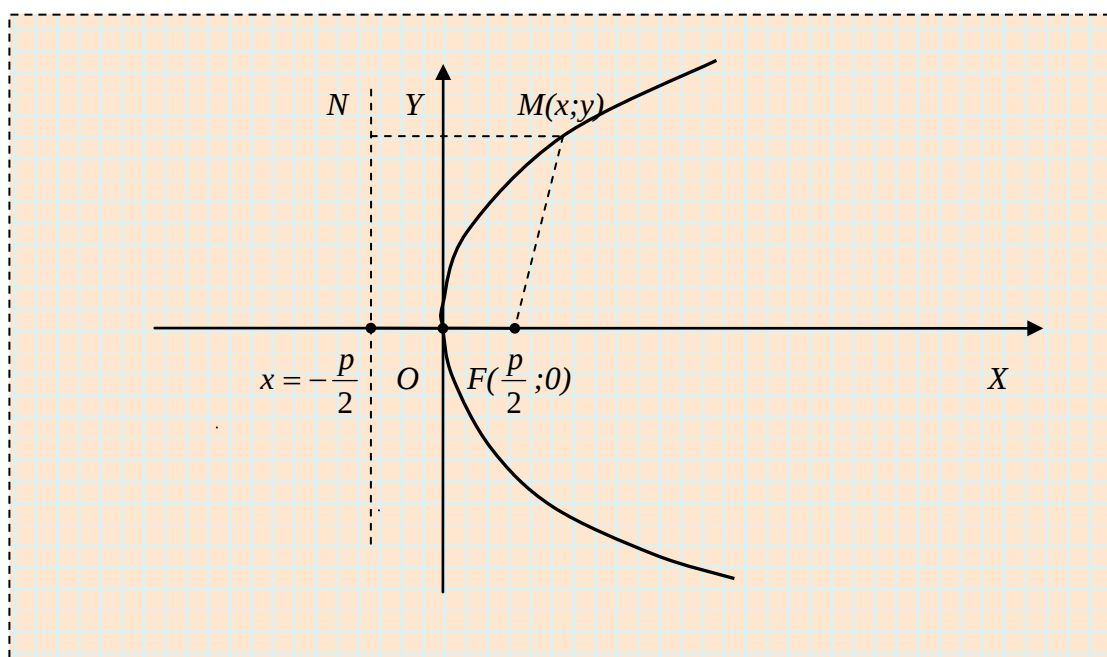


Рис. 28

Пусть расстояние между директрисой и фокусом равно p , прямоугольную систему координат зададим, направив ось абсцисс по перпендикуляру, опущенному из фокуса на директрису, начало координат совместим с серединой этого перпендикуляра (см. рис 5). В таком случае уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, а фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Так как $NM=FM$, то

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$

2.3.5. Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

преобразуем путем поворота системы координат на угол α так, чтобы слагаемое с произведением переменных отсутствовало. В этом уравнении, применив формулы поворота системы координат

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

получим

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0.$$

Запишем коэффициент при произведении $x'y'$ и приравняем его к нулю:

$$-2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Из этого равенства можно получить такие уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}, \quad B \operatorname{tg}^2 \alpha + (C-A) \operatorname{tg} \alpha + B = 0.$$

Решив одно из них, найдем угол α , вычислим значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и, применив формулы поворота, получим уравнение

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0.$$

Далее, это уравнение необходимо упростить, выделив полные квадраты относительно переменных x' и y' .

► **Пример 1.** Определить вид линии по его уравнению

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10.$$

Преобразуем уравнение, применив формулы поворота системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$9(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 4(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 6(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 = 10.$$

Запишем коэффициент при произведении переменных x' и y' и приравняем его к нулю:

$$4\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha - 6\sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Отсюда, разделив уравнение на $\cos^2 \alpha$, получим

$$2\tg^2 \alpha + 3\tg \alpha - 2 = 0.$$

Решим уравнение: $\tg \alpha = \frac{1}{2}$ или $\tg \alpha = -2$.

Возьмем значение $\tg \alpha = \frac{1}{2}$, отсюда $\alpha = \arctg 0,5 \approx 26,5^\circ$.

Далее, вычислим: $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и получим формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'). \end{cases}$$

Подставим x и y в исходное уравнение и упростим:

$$10x'^2 + 5y'^2 = 10.$$

Это уравнение эллипса, разделив на 10, получим каноническое уравнение:

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Полуоси эллипса $a=1, b=\sqrt{2}$ (см. рис. 6) .

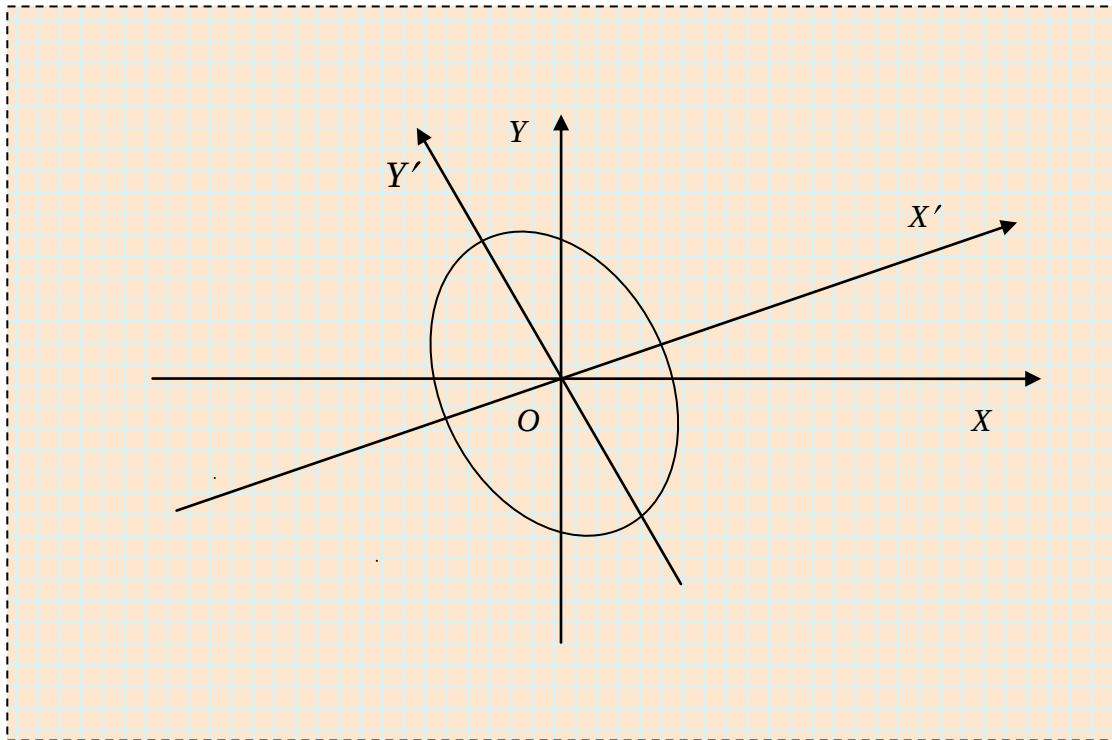


Рис. 29.



Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Преобразуем уравнение, применив формулы поворота системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 - 2(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 - \\ & - 10(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) - 6(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 25 = 0. \end{aligned}$$

Коэффициент при произведении переменных x' и y' :

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0.$$

Отсюда получаем уравнение

$$tg^2\alpha - 1 = 0,$$

решая его получим: $tg\alpha = 1$ или $tg\alpha = -1$.

Возьмем значение $tg\alpha = 1$, отсюда $\alpha = 45^\circ$.

Следовательно, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Подставим x и y в исходное уравнение и упростим:

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0.$$

Это уравнение параболы, выделим полный квадрат относительно y' :

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Вершина параболы в точке $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ◀

Глава 3. Аналитическая геометрия в пространстве

3.1. Плоскость в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $OXYZ$ даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору.

Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости, тогда векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ взаимно перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Отсюда получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости.

3.1.1. Общее уравнение плоскости

Общим уравнением плоскости называется уравнение первой степени относительно переменных x, y и z :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

3.1.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть в пространстве $OXYZ$ даны три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ расположены в одной плоскости, они компланарны и их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Отсюда получим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.1.3. Уравнение плоскости в отрезках

В пространстве $OXYZ$ возьмем три точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ и $M_3(0; 0; c)$. Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим уравнение

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3.1.4. Нормальное уравнение плоскости

Уравнение

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где α, β, γ - углы между нормальным вектором плоскости и координатными осями OX, OY, OZ соответственно, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, называется *нормальным уравнением плоскости*.

Чтобы привести общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормальному необходимо умножить его на множитель

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак выбирается противоположным знаком коэффициента D .

3.2. Основные задачи в пространстве

3.2.1. Угол между плоскостями

В пространстве $OXYZ$ заданы две плоскости α и β :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Угол между этими плоскостями равен углу φ между их нормальными векторами

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Из этой формулы следуют условия перпендикулярности и параллельности плоскостей.

Если плоскости α и β перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные вектора $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Значит, скалярное произведение $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Это равенство есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Если плоскости α и β параллельны, то параллельны и их нормальные вектора $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это равенство есть необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей.

3.2.2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть в пространстве $OXYZ$ заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Примеры

1. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-2, 3, 4)$ параллельно плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$.

Вектор $\vec{v} = (1, -3, 2)$ перпендикулярен данной плоскости и искомой плоскости. И её уравнение вид

$$(x + 2) - 3(y - 3) + 2(z - 4) = 0.$$

или

$$x - 3y + 2z + 3 = 0.$$

2. Написать уравнение плоскости, которая перпендикулярна прямой, проходящей через точки $A(9; 5; -1)$, $B(3; -4; 2)$ и пересекает эту прямую в точке $C(2; -1; 1)$.

Из условия следует, что вектор $\vec{AB} = (-6; -9; 3)$ перпендикулярен искомой плоскости. Поэтому уравнение этой плоскости имеет вид

$$-6(x - 2) - 9(y + 1) + 3(z - 1) = 0$$

или

$$2x + 3y - z = 0.$$

3.3. Прямая в пространстве

3.3.1. Общее уравнение прямой

Прямую в пространстве можно определить как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Пусть заданы две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и

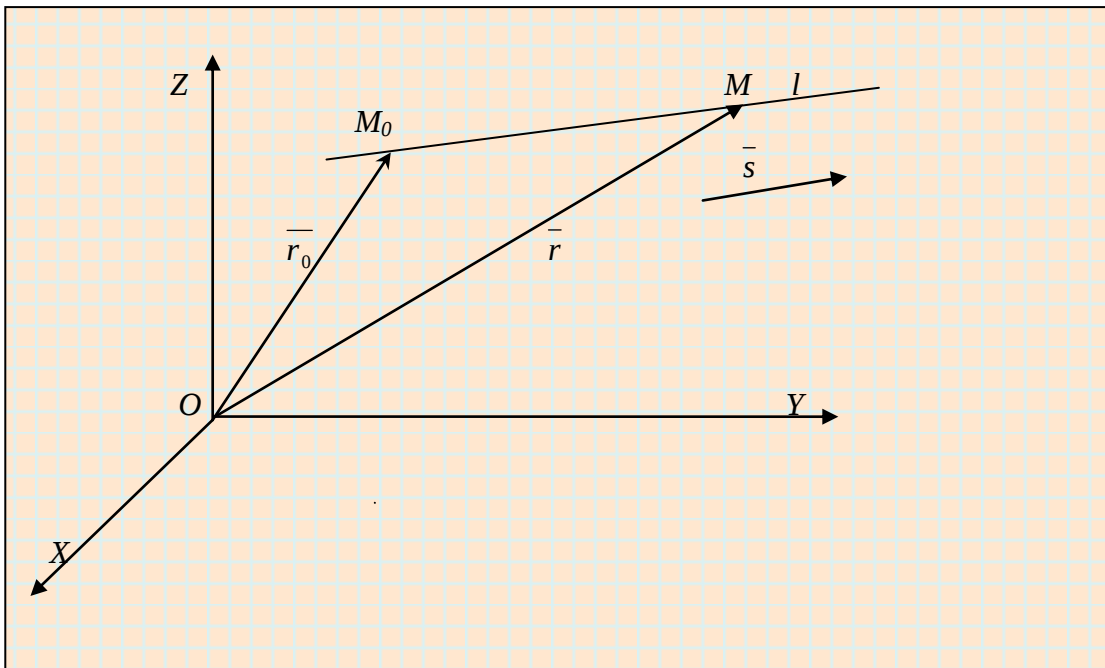
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если нормальные векторы этих плоскостей не коллинеарные, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

определяет прямую.

3.3.2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Зададим прямую l в пространстве при помощи точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s} = (m; n; p)$ параллельного прямой l . Эти условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую. Вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ называется направляющим вектором прямой. Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка прямой l (см. рис.)



Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, следовательно,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}, t \in R.$$

Три вектора $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M},$$

поэтому справедливо равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, t \in R.$$

Полученное равенство называется *векторным уравнением прямой*. Здесь множитель t может принимать любые числовые значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Если векторное равенство записать в координатной форме, то получим *параметрическое уравнение прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in R,$$

где скалярный множитель t называется *параметром*.

Примеры

1. Написать уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(1, -1, 2)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y + z + 2 = 0$.

Вектор $v = (2, -3, 1)$ перпендикулярен данной плоскости и, значит, параллелен прямой l . Теперь параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

2. Найти значения m , при которых прямая

$$\begin{cases} x = 1 + mt, \\ y = 2 - t, \\ z = t \end{cases}$$

лежит в плоскости $2x - y + z = 0$.

Прямая лежит в плоскости, если координаты всех точек прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Отсюда следует, что после подстановки x , y и z из уравнения прямой в уравнение данной плоскости, получим равенство

$$2(1 + mt) - (2 - t) + t = 0,$$

которое должно выполняться при всех значениях t . Полученное равенство справедливо при всех t только тогда, когда $m = -1$.

3.3.3. Коническое уравнение прямой

Пусть $\vec{s} = (m; n; p)$ - направляющий вектор прямой и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит на этой прямой. Если $M(x; y; z)$ - произвольная точка прямой, то вектор $\vec{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{s}$ и координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Полученное уравнение называется *каноническим уравнением прямой*.

3.3.4. Уравнение прямой проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

возьмем в качестве направляющего вектора прямой и из канонического уравнения прямой получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение называется уравнением прямой проходящей через две точки.

3.3.5. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых

Две прямые заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами

$$\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) \text{ и } \vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2):$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Условие параллельности и перпендикулярности прямых равносильно коллинеарности и перпендикулярности направляющих векторов этих прямых.

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы

$$\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) \text{ и } \vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2). \text{ Значит, скалярное произведение}$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Если прямые параллельны, то параллельны и их нормальные вектора, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3.4. Прямая и плоскость в пространстве

В пространстве заданы прямая и плоскость своими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

3.4.1. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m; n; p)$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A; B; C)$ коллинеарны, т.е.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Прямая и плоскость параллельны, когда эти векторы перпендикулярны, т.е.

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

3.4.2. Точка пересечения прямой с плоскостью

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему двух уравнений

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение прямой запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

После подстановки получим

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Отсюда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Далее необходимо вычислить координаты точки.

3.5. Поверхности второго порядка

Сфера

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2.$$

Цилиндрические поверхности

Поверхности, составленные из всех прямых, пересекающих данную линию l и параллельных данной прямой, называются цилиндрическими поверхностями.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{ эллиптический цилиндр}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{ гиперболический цилиндр}$$

$$y^2 = 2px \quad - \text{ параболический цилиндр}$$

Конические поверхности

Поверхность составленная из всех прямых пересекающих данную линию l , и проходящих через данную точку p , называются конической поверхностью.

$$\text{Уравнение конической поверхности: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ эллипсоид}$$

Гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ однополостный гиперболоид}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad - \text{ двуполостный гиперболоид}$$

Параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad - \text{ эллиптический параболоид}$$

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad - \text{ гиперболический параболоид.}$$

Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, Мн., БГУ, 1998 г.
2. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 1, Мн., Высш. школа, 1988 г.
3. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс, – М.: 2001 г.
4. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов/. М.: ЮНИТИ, 2003 г.
5. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред проф. В.И. Ермакова, 2001 г.
6. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов, том 1, Мн., 2003.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.Г. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 2001г.
8. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. 1999 г.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: 2003 г.
10. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 1. М.,2001 г.
11. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 2. М.,2001 г.