ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ И ЭКОНОМИКЕ

Для студентов экономических специальностей

Составил В. С. Мастяница

2010

ГЛАВА 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1.1. Первообразная

Основной задачей дифференциального исчисления является исследование функции при помощи производной. В разделе «Интегральное исчисление» решается задача нахождения (восстановления) функции по её производной.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Например, для функции x^3 на промежутке $(-\infty;\infty)$ первообразной является функция $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$, так как $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0;\infty)$ - первообразная $F(x) = \ln x$, так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Задача вычисления первообразной для заданной функции $f(x)$ решается неоднозначно. Это означает, что если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$.

Например, для функции $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ первообразной является функция $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + x + C$.

Действительно, $\left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + x + C\right)' = x^3 + x^2 + 1$.

Теорема. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на некотором промежутке $(a;b)$, то они отличаются на постоянную C, т.е. $F_1(x)$-$F_2(x) \equiv C$, C – постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим разность $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Так как

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

то по следствию из теоремы Лагранжа найдётся такое число C, что $(F_1(x) - F_2(x)) \equiv C$.

Из данной теоремы следует, что если известна хотя бы одна первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, то все возможные первообразные функции $f(x)$ задаются формулой $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная. Так, первообразной функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x$, а множество всех первообразных этой функции определяется равенством $F(x) = \sin x + C$.

1.2. Неопределённый интеграл

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Следовательно, если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Операция вычисления неопределённого интеграла от заданной функции называется интегрированием этой функции.

Свойства неопределённого интеграла

1. *Производная неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Действительно, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

2. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Действительно, по определению дифференциала и первому свойству неопределённого интеграла $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)' dx = f(x)dx$.

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$. Сравнивая между собой свойства 2 и 3, можно сказать, что операции вычисления неопределённого интеграла и дифференциала взаимообратные, т.е. знаки d и $\int$ взаимно уничтожают друг друга.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, тогда функция $kF(x)$ является первообразной функции $kf(x)$. Отсюда

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C = k(F(x) + C_1) = k\int f(x)dx.$$

5. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ и $G(x)$ - первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$. Тогда функция $F(x) + G(x)$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$, так как

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Значит,

$$\int f(x)dx + \int g(x)gx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = F(x) + G(x) + (C_1 + C_2) = \int (f(x) + g(x))dx.$$

Таблица основных интегралов

Некоторые формулы основных интегралов являются непосредственным следствием из определения неопределённых интегралов и таблицы производных.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq 1,$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

Докажет это равенство. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \dfrac{1}{x}$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

3. $\int e^x dx = e^x + C$,
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$,
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
6. $\int \cos dx = \sin x + C$,
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$,

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$.

1.3. Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Используя свойства неопределенного интеграла, таблицу основных интегралов, можно интегрировать элементарные функции.

►***Пример 1.*** Вычислить $\int (x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

Применим свойство 5 неопределенного интеграла и формулу табличного интеграла для степенной функции при различных значениях при различных значениях показателя степени.

$$\int (x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx =$$

$$= \int x^4 dx + \int \sqrt[3]{x} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

◄

►***Пример 2.*** Вычислить $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию, выделив целую часть:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \int (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - arctgx + C.$$

◄

►***Пример 3.*** Вычислить $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 + \sin x.$$

Тогда

$$\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C.$$

◄

2. Замена переменной интегрирования в неопределенном интеграле

Метод замены переменной интегрирования (или метод подстановки) является одним из основных методов интегрирования. Удачная замена переменной может привести исходный интеграл к более простому интегралу.

Теорема. *Пусть функция* $x = \varphi(t)$ *определена и дифференцируема на промежутке* $(\alpha;\beta)$, *а функция* $f(x)$ *определена на промежутке* $(a;b)$, *причем множество значений функции* φ *содержится в* $(a;b)$: $x = \varphi(t) \in (a;b)$ *для всех* $t \in (\alpha;\beta)$. *Тогда справедлива формула:*

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Рассмотрим примеры вычисления интеграла с помощью замены переменной интегрирования.

►***Пример 4.*** Вычислить интеграл $\int xe^{x^2} dx$.

Сделаем замену переменной: $t = x^2$. Тогда $dt = 2xdx$ и $xdx = \frac{1}{2}dt$. Отсюда

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

◄

►***Пример 5.*** Вычислить интеграл $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Замену переменной выполним по формуле $x = \sin t$, тогда

$dx = \cos t dt$, $t = \arcsin x$. Так как $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$.

Отсюда

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \int\sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int\cos^2 t dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\cos 2t d2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

◄

►***Пример 6.*** Вычислить интеграл $\int\frac{\ln^2 x + \sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Пусть $t = \ln x$, тогда $dt = \frac{dx}{x}$. Отсюда

$$\int\frac{\ln^2 x + \sqrt{\ln x}}{x}dx = \int\left(t^2 + \sqrt{t}\right)dt = \int t^2 dt + \int\sqrt{t}dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln x}\right)^3 + C.$$ ◄

►***Пример 7***. Вычислить интеграл $\int tgxdx$.

$\int \mathrm{tg} x dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$. Пусть $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x dx$. Следовательно

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

◄

Имея некоторый опыт интегрирования, можно не выполнять замену переменной интегрирования, а только подразумевать её. Так, пример 7 можно решить иначе:

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int\frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Для такого подхода полезно применять простейшие правила преобразования дифференциалов:

1. $dx = d(x+a)$, где *a* – константа,
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где $a \neq 0$, a, b – константы,
3. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+a)$,
4. $\sin x dx = d(-\cos x)$,
5. $\cos x dx = d(\sin x)$,
6. $f'(x)dx = d(f(x))$.

2. Интегрирование по частям

Теорема 3. *Пусть функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы и существует* $\int u'(x)v(x)dx$. *Тогда существует* $\int u(x)v'(x)dx$ *и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. Так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то по правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Правая часть этого равенства имеет первообразную, так как первообразной для $(u(x)v(x))'$ является $u(x)v(x)$, а $u'(x)v(x)$ имеет первообразную по условию теоремы. Следовательно, и левая часть также имеет первообразную. Поэтому данное равенство можно проинтегрировать:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int ((u(x)v(x))' - u'(x)v(x))dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Формула, которую называют формулой интегрирования по частям, доказана.

Если учесть, что $u'(x)dx = du$, а $v'(x)dx = dv$, то формулу интегрирования по частям можно записать в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Применение формулы интегрирования по частям состоит в том, что подынтегральное выражение нужно разделить на произведение двух сомножителей так, чтобы $\int vdu$ не был сложнее для интегрирования. Иногда эта формула применяется для вычисления одного интеграла несколько раз.

►***Пример 8.*** Вычислить интеграл $\int x\sin xdx$.

Пусть $u = x$ и $dv = \sin xdx$тогда $du = dx$ а $v = \int \sin xdx = -\cos x$. Применив формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

◄

►***Пример 9.*** Вычислить интеграл $\int \ln xdx$.

Для применения формулы интегрирования по частям обозначим $u = \ln x$ и $dv = dx$, отсюда $du = \frac{1}{x}dx$ и $v = \int dx = x$. Теперь, интегрируя по частям, получим:

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

◄

►***Пример 10.*** Вычислить интеграл $\int (x^2+1)e^x dx$.

Пусть $\left\langle \begin{matrix} u = x^2+1 \Rightarrow & du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\rangle$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^2 dx = (x^2+1)e^x - 2\int xe^2 dx.$$

При вычислении интеграла $\int xe^x dx$ снова применим формулу интегрирования по частям, положив: $\left\langle \begin{matrix} u = x \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\rangle$, тогда

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x.$$

И окончательно

$$\int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - 2\int xe^2 dx =$$

$$(x^2+1)e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2-2x+3)e^x + C.$$

◄

►***Пример 11.*** Вычислить интеграл. $\int e^x \sin xdx.$

Пусть

$$I = \int e^x \sin x dx$$

и

$$\left\langle \begin{matrix} u = e^x & \Rightarrow & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right\rangle,$$

тогда, интегрируя по частям, получим:

$$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int \cos x e^x dx$ снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\left\langle \begin{matrix} u = e^x & \Rightarrow & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow & v = \sin x \end{matrix} \right\rangle.$$

Тогда

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I.$$

Следовательно,

$$I = e^x (\sin x - \cos x) - I \quad ,$$

отсюда

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

◄

Формулу интегрирования по частям применяют для вычисления интегралов вида

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \sin a dx, \int P_n(x) \cos a x dx,$$

где $P_n(x)$ - алгебраический многочлен степени n, a - действительное число. В этих случаях полагают $u = P_n(x)$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за dv.

При интегрировании интегралов вида

$$\int P_n(x) \ln x dx$$

принимают $u = \ln x$, и $dv = P_n(x) dx$.

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы, применяя таблицу основных интегралов.

1.1. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right)dx$; **1.2.** $\int\left(3\sin x-e^{x}\right)dx$;

1.3. $\int\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\cos^{2}x}\right)dx$; **1.4.** $\int\left(x^{2}+3^{x}\right)dx$;

1.5. $\int\left(\dfrac{1}{\sin^{2}x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; **1.6.** $\int\left(x^{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$;

1.7. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$; **1.8.** $\int\left(\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{1+x^{2}}\right)dx$;

1.9. $\int\left(5\cos x-\dfrac{7}{1+x^{2}}\right)dx$; **1.10.** $\int\left(3\sin x+4\cos 1\right)dx$.

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы, предварительно преобразовав подынтегральную функцию.

1.11. $\int\dfrac{3x^{4}-7x^{3}-2x^{2}+4x-6}{x^{3}}dx$; **1.12.** $\int\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-2}{x^{2}}dx$;

1.13. $\int\left(\sqrt{x^{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^{5}}}\right)^{2}dx$; **1.14.** $\int\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2}dx$;

1.15. $\int\dfrac{7-3\sin^{3}x}{\sin^{2}x}dx$; **1.16.** $\int\dfrac{3+8\cos^{3}x}{\cos^{2}x}dx$;

1.17. $\int 3^{x}\left(1+\dfrac{3^{-x}}{\sqrt[4]{x^{5}}}\right)dx$; **1.18.** $\int e^{x}\left(8-\dfrac{2e^{-x}}{x^{2}}\right)dx$;

1.19. $\int\left(\cos\dfrac{x}{3}-\sin\dfrac{x}{3}\right)^{2}dx$; **1.20.** $\int\dfrac{x^{4}}{x^{2}+1}dx$.

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы, предварительно подведя под знак дифференциала функцию.

1.21. $\int\sqrt{6x+7}dx$; **1.22.** $\int(x+1)\sqrt[3]{2x+1}dx$;

1.23. $\int 3^{1-2x}dx$; **1.24.** $\int e^{3x+4}dx$;

1.25. $\int\sin(3x-11)dx$; **1.26.** $\int\cos(5x+6)dx$;

1.27. $\int\frac{6}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; **1.28.** $\int\frac{14}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}dx$;

1.29. $\int\frac{3}{1+9x^2}dx$; **1.30.** $\int\frac{7}{4+x^2}dx$.

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы методом замены переменной интегрирования.

1.31. $\int x\sqrt{x-4}dx$; **1.32.** $\int\frac{x}{\sqrt{4x+9}}dx$;

1.33. $\int x\ \sin x^2dx$; **1.34.** $\int e^{x^3}x^2dx$;

1.35. $\int x\sqrt{x^2-4}dx$; **1.36.** $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

1.37. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **1.48.** $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$;

1.39. $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$; **1.40.** $\int\sqrt{1+3\cos x}\sin xdx$.

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

1.41. $\int(3x+5)e^xdx$; **1.42.** $\int(x+1)\cos xdx$;

1.43. $\int(x^2+x+3)\sin xdx$; **1.44.** $\int(x^2+4x+6)\cos xdx$;

1.45. $\int\arcsin xdx$; **1.46.** $\int arcctgxdx$;

1.47. $\int xarctgxdx$; **1.48.** $\int x\ln xdx$;

1.49. $\int e^x\cos xdx$; **1.50.** $\int x^3\sin x^2dx$.

ГЛАВА 2. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций

2.1. Рациональная функция

Функция вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

называется *многочленом* степени n относительно переменной x с действительными или комплексными коэффициентами $a_i,\ i=0,1,\ldots,n$.

Корнем многочлена $P_n(x)$ называется число x_0 (действительное или комплексное) при котором выполняется равенство $P_n(x_0)=0$.

Теорема. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами:*

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\times \\ \times(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$

где $r_1+r_2+\cdots r_k+s_1+s_2+\cdots s_l=n$ *и все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.*

Приведем примеры разложений многочленов:

1. $P_2(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$;
2. $P_3(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$,

3. $P_5(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x =$

$= x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^3 + 3x^2 + 2x = x^3(x^2 + 3x + 2) + x(x^2 + 3x + 2) =$

$= x(x+1)(x+2)(x^2+1).$

Функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены соответственно степени n и m, называется *дробно-рациональной функцией*. Дробно-рациональная функция называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе т.е. $n < m$, если же $n \geq m$, то дробно-рациональная функция называется *неправильной*.

Всякую неправильную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной дробно-рациональной функции.

►***Пример 1.***

Дробно-рациональную функцию $\dfrac{x^3+2}{x+1}$ представим в виде суммы многочлена и правильной дробно-рациональной функции:

$$\frac{x^3+2}{x+1} = \frac{x^3+1+1}{x+1} = \frac{x^3+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

◄

►***Пример 2.***

Дробно-рациональную функцию $\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+4x+2}{x^2+x+1}$ представим в виде суммы многочлена и правильной дробно-рациональной функции. Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+4x+2}{x^2+x+1} = x^2 + x + 2 + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

◄

При вычислении интегралов от дробно-рациональной функции т.е. интегралов вида

$$\int R(x)dx$$

дробно-рациональную функцию $R(x)$ представляют в виде суммы многочлена и правильной дробно-рациональной функции, которую затем представляют в виде суммы *элементарных дробей*.

Элементарными рациональными дробями называют правильные рациональные дроби вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;

2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in N, k \geq 2$;

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2 - 4q < 0$, знаменатель не имеет действительных корней;

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in N, k \geq 2$, $p^2 - 4q < 0$, знаменатель не имеет действительных корней.

Теорема. *Всякую правильную рациональную дробь* $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *(* $n < m$ *), знаменатель которой представим в виде произведения*

$$Q_m(x) = a_0(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k} \times \times (x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$

$$(r_1 + r_2 + \cdots r_k + s_1 + s_2 + \cdots s_l = m)$$

можно представить единственным образом в виде суммы элементарных дробей:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-x_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2}+$$

$$+\cdots+\frac{A_{r_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_1^{(k)}}{x-x_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-x_k)^2}+\cdots+\frac{A_{r_k}^{(k)}}{(x-x_k)^{r_k}}+$$

$$+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{s_1}^{(1)}x+C_{s_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\cdots+$$

$$+\frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{B_2^{(l)}x+C_2^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^2}+\cdots+\frac{B_{s_l}^{(l)}x+C_{s_l}^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_1}}.$$

Поясним теорему на примерах.

►***Пример 3.*** Найти разложение на простейшие дроби дробно-рациональной функции $\dfrac{x^2+3}{(x-1)(x-2)^3}$.

В общем случае для этой правильной рациональной дроби справедливо разложение:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}.$$

Для вычисления коэффициентов A,B,C и D применим метод *неопределенных коэффициентов*. Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)^3}=\frac{A(x-2)^3+B(x-1)(x-2)^2+C(x-1)(x-2)+D(x-1)}{(x-1)(x-2)^3}.$$

Из равенства числителей правой и левой частей получаем:

$$x^2+3=A(x-2)^3+B(x-1)(x-2)^2+C(x-1)(x-2)+D(x-1) \text{ или}$$

$$x^2+3=(A+B)x^3+(-6A-5B+C)x^2+(12A+8B-3C+D)x+(-8A-4B+2C-D).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^3: & A+B=0, \\ x^2: & -6A-5B+C=1, \\ x^1: & 12A+8B-3C+D=0, \\ x^0: & -8A-4B+2C-D=3. \end{array}$$

Решив данную систему относительно A,B,C и D, получим: $A=-4,\ B=4,\ C=-3,\ D=7.$ Следовательно,

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)^3}=\frac{-4}{x-1}+\frac{4}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{7}{(x-2)^3}.$$

◄

►***Пример 4.*** Для дробно-рациональной функции $\dfrac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+2)}$ получить разложение на элементарные дроби.

В общем случае для этой правильной рациональной дроби имеем:

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A(x^2+2)(x+1)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+2)}.$$

Приравняв числители правой и левой частей, получаем:

$$x^2+3=A(x^2+2)(x+1)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x+1)^2.$$

Сравнив коэффициенты при соответствующих степенях x, получим систему для вычисления A,B,C и D.

$$\begin{array}{r|l} x^3: & A+C=0, \\ x^2: & A+B+2C+D=1, \\ x^1: & 2A+C+2D=0, \\ x^0: & 2A+2B+D=3. \end{array}$$

Отсюда: $A=2/9,\ B=4/3,\ C=-2/9,\ D=-1/9.$ Значит,

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{2}{9(x+1)}+\frac{4}{3(x+1)^2}-\frac{(2x+1)}{9(x^2+2)}.$$

◄

►***Пример 5.*** Найти разложение на простейшие дроби

дробно - рациональной функции $\dfrac{2x^2+3x+4}{x(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

В начале запишем:

$$\frac{2x^2+3x+4}{x(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}.$$

Приведем к общему знаменателю правую часть и приравняем числители:

$$2x^2+3x+4=A(x+1)(x^2+x+1)^2+Bx(x^2+x+1)^2+$$

$$+(Cx+D)x(x+1)(x^2+x+1)+(Ex+F)x(x+1).$$

Для вычисления коэффициентов A и B применим метод частных значений:

при $x=0$ из последнего равенства получим $A=4$, а при $x=-1$ $B=-3$. Остальные коэффициенты можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. В итоге имеем

$$\frac{2x^2+3x+4}{x(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}-\frac{x+4}{x^2+x+1}-\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}.$$

◄

2.2. Интегрирование элементарных рациональных дробей

Неопределенные интегралы от элементарных рациональных дробей – “почти” табличные интегралы.

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{B}{(x-a)^k}dx=B\int(x-a)^{-k}d(x-a)=B\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C.$

3. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$, знаменатель не имеет действительных корней.

Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы в числителе появилось выражение, равное производной от знаменателя:

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx.$$

Разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов:

$$I=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_1.$$

Вычислим интеграл $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}$.

Для этого в знаменателе выделим полный квадрат и заменим переменную интегрирования по формуле $x+\frac{p}{2}=t$.

Тогда $x=t-\frac{p}{2}$ и $dx=dt$. Обозначим $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, при этом учитывается, что $p^2-4q<0$. Теперь

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=$$

$$\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Окончательно

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\ arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$, $k\in N, k\geq 2$, $p^2-4q<0$, знаменатель не имеет действительных корней.

Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы в числителе появилось выражение, равное производной от знаменателя:

$$I=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}dx=$$
$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Первый интеграл сводится к табличному интегралу от степенной функции при помощи подстановки $x^2+px+q=t;\quad (2x+p)dx=dt$:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{dt}{t^k}=\frac{1}{(1-k)t^{k-1}}+C=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Второй интеграл, обозначив I_k и сделав замену переменной интегрирования

$$x+\frac{p}{2}=t;\quad dx=dt;\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2>0$$

запишем в виде:

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^k}dx=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Полученный интеграл вычислим, интегрируя по частям, пусть

$$u=\frac{1}{(t^2+a^2)^k}\qquad dv=dt,$$

тогда

$$du=\frac{-2kt\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}},\ v=t\ .$$

Следовательно,

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt=$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}\ .$$

В итоге

$$I_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Отсюда вытекает рекуррентная формула

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\ \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k,\ k = 1,2,\cdots.$$

При $k=1$ имеем $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C$, далее вычисляем $I_2,\ I_3,\cdots$ и т.д.

►***Пример 6.*** Вычислить $I = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$.

Так как $(x^2+2x+5)' = 2x+2$, то в числителе выделим выражение $2x+2$:

$$I = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx.$$

Теперь первый интеграл вычислим, поднеся под дифференциал выражение x^2+2x+5, а второй интеграл сводим к табличному, выделив полный квадрат относительно $x+1$:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,d(x^2+2x+5) + \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx =$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} arctg(x+1) + C\ .$$

◄

►***Пример 7.*** Вычислить интеграл $I = \int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx.$

Запишем рекуррентное соотношение:

$$I_{k+1} = \frac{1}{8k}\ \frac{x}{(x^2+4)^k} + \frac{2k-1}{8k} I_k.\ k = 1,2,\cdots$$

Отсюда:

$$I_3 = \int \frac{1}{(x^2+4)^3}dx = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} I_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3I_2\right),$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+4)} + \frac{1}{8} I_1 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + I_1\right),$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C\ .$$

Теперь вычислив

$$I_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2}\right) + C\ ,$$

получим

$$I_3 = \frac{1}{16}\left(\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{x}{(x^2+4)} + \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2}\right]\right) + C.$$

◄

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы от дробно – рациональных функций.

2.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$;   2.2. $\int \frac{x^3+9}{(x+1)(x+2)}dx$;

2.3. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$;   2.4. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$;

2.5. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$;   2.6. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$;

2.7. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$;   2.8. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$;

2.9. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$;   2.10. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$.

Решение типовой задачи. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$$

Разложим подынтегральную функцию $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ в сумму простейших дробей. Для этого дробно-рациональную функцию $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ представим в виде

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-4}.$$

Правую часть равенства приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{a(x-2)(x-4)+b(x-1)(x-4)+c(x-2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)}.$$

Приравняем числители:

$$x^2+2x+6 = a(x-2)(x-4)+b(x-1)(x-4)+c(x-2)(x-2).$$

В последнем равенстве, приняв $x=1$, получим уравнение для вычисления коэффициентов a: $9=a(-1)(-3)$, отсюда $a=3$. Аналогично при $x=2$ получаем $14=b(-2)$ и $b=-7$ и при $x=4$ из уравнения $30=c\cdot 3\cdot 2$ следует $c=5$.

Используя разложение подынтегральной функции

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{(x-1)} + \frac{-7}{x-2} + \frac{5}{x-4},$$

исходный интеграл представим виде суммы интегралов:

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{-7}{x-2} + \frac{5}{x-4}\right)dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-7}{x-2}dx + \int \frac{5}{x-4}dx$$

Теперь, используя формулу $\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$, получим окончательный результат:

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C.$$

Ответ.

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C.$$

2.11. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx$; 2.12. $\int \frac{2x^3+12x^2+26x+14}{(x-1)(x+2)^3}dx$;

2.13. $\int \frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x+2)(x-2)^3}dx$; 2.14. $\int \frac{4x^3-9x^2+30x-18}{(x-1)(x-2)^3}dx$;

2.15. $\int \frac{x^3-9x^2+30x-18}{(x+3)(x-3)^3}dx$; 2.16. $\int \frac{x^3+3x^2+6x-2}{(x-1)(x+1)^3}dx$;

2.17. $\int \frac{x^3+9x^2+30x-39}{(x+4)(x+3)^3}dx$; 2.18. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+11}{(x+3)(x+2)^3}dx$;

2.19. $\int \frac{x^3+3x^2+x-3}{(x+2)(x+1)^3}dx$; 2.20. $\int \frac{2x^3+12x^2+23x+17}{(x+1)(x+2)^3}dx$.

Решение типовой задачи. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx.$$

Сначала дробно-рациональную функцию $\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}$ представим в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{d}{(x+2)^3}$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}=\frac{a(x+2)^3+b(x+2)(x+2)^2+c(x-2)(x+2)+d(x-2)}{(x-2)(x+2)^3}$$

и приравняв числители, получим равенство:

$$x^3+6x^2+13x+6=a(x+2)^3+b(x+2)(x+2)^2+c(x-2)(x+2)+d(x-2).$$

В последнем равенстве, приняв $x=-2$ и $x=2$, и приравняв коэффициенты многочленов в левой и правой частях при x^3 и x^2, получим уравнения для вычисления *a,b,c d*:

$$x=-2 \Rightarrow -4=-4d,\ d=1;$$

$$x=2 \Rightarrow 64=64a,\ a=1;$$

$$x^3 \Rightarrow 1=a+b,\ b=0;$$

$$x^2 \Rightarrow 6=6a+2b+c,\ c=6-6a-2b=0.$$

Следовательно, для подынтегральной функции справедливо разложение:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x+2)^3}$$

и исходный интеграл можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x+2)^3}\right)dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x+2)^3}dx.$$

Теперь, используя формулы $\int z^k dz=\frac{z^{k+1}}{k+1}+C$ и $\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C$, получим окончательный результат:

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x+2)^3}dx=\ln|x-2|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$$

Ответ.

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x+2)^3}dx=\ln|x-2|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$$

2.21. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$; **2.22.** $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$;

2.23. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$; **2.24.** $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}dx$;

2.25. $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$; **2.26.** $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$;

2.27. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx$; **2.28.** $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$;

2.29. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+4)^2(x^2+4)}dx$; **2.30.** $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$;

Решение типовой задачи. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$$

Дробно-рациональную функцию $\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ представим в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{(ax+b)(x^2+x+1)+(cx+d)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}$$

и приравняв числители, получим равенство:

$$2x^3+3x^2+3x+2 = (ax+b)(x^2+x+1)+(cx+d)(x^2+1).$$

В последнем равенстве, приравняв коэффициенты многочленов в левой и правой частях при x^3, x^2, x и x^0, получим уравнения для вычисления *a,b,c d*:

$$x^3:\ 2 = a+c,$$

$$x^2:\ 3 = a+b+d,$$

$$x: 3 = a+b+c,$$

$$x^0: 2 = b+d.$$

Решив полученную систему, получим $a=1, b=1, c=1, d=1.$

Следовательно, для подынтегральной функции справедливо разложение:

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

и исходный интеграл можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx = \int (\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1})dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$$

Сначала вычислим первый интеграл:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctgx + C.$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}d\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2x+1\right)\right) + C\,.$$

Объединив оба интеграла, получим окончательный результат:

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx = = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + arctgx + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2x\right)\right) + C =$$

$$= \ln\sqrt{(x^2+1)(x^2+x+1)} + arctgx + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2x\right)\right) + C\,.$$

Ответ.

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx = = \ln\sqrt{(x^2+1)(x^2+x+1)} + arctgx + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2x\right)\right) + C\,.$$

2.3. Интегрирование тригонометрических функций

Функция $R(x,y)$, называется рациональной функцией двух аргументов x и y, если над аргументами и некоторыми постоянными производятся операции сложения, вычитания, умножения и деления. Например, функция $R(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ - рациональная функция двух аргументов x и y.

Интегралы от тригонометрических функций $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R - рациональная функция двух аргументов x и y, преобразуются к интегралам от рациональных функций. Для этого подынтегральную функцию при помощи соответствующих подстановок необходимо преобразовать к рациональной функции.

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Для функций $\sin x$ и $\cos x$ известны представления через $tg\dfrac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому в результате подстановки

$$t=tg\frac{x}{2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

интеграл

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

преобразуется к виду

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

$R_1(t)$ - дробно-рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка позволяет вычислять интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, но в некоторых случаях приводит к сложным вычислениям. Наиболее эффективной применение этой подстановки для интегралов вида $\int\dfrac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$, где коэффициенты a и b одновременно не равны нулю.

►***Пример 8.*** Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{4\sin x+3\cos x+3}$.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+3}=\int\frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{4t+3}=.$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t+3|+C=\frac{1}{4}\ln\left|4tg\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

◄

Если учесть свойства подынтегральной функции, то интегралы от тригонометрических функций можно преобразовать к интегралам от рациональных функций при помощи других, более простых, подстановок:

а) если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, т.е. функция $R(\sin x,\cos x)$ - нечетная относительно $\sin x$, то применяют подстановку $t=\cos x$;

б) если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, т.е. функция $R(\sin x,\cos x)$ - нечетная относительно $\cos x$, то применяют подстановку $t=\sin x$;

в) если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, т.е. функция $R(\sin x,\cos x)$ - четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то применяют подстановку $t=tgx$.

►***Пример 9.*** Вычислить интеграл $\int\sin x\cos^{10}xdx$.

$$\int\sin x\cos^{10}xdx=-\int\cos^{10}xd(\cos x)=-\frac{\cos^{11}x}{11}+C.$$

◄

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы от тригонометрических функций.

2.31. $\int \frac{1}{5+4\cos x}dx$; **2.32.** $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$;

2.33. $\int \frac{1}{2+3\sin x+2\cos x}dx$; **2.34.** $\int \frac{1}{5+2\sin x-\cos x}dx$;

2.35. $\int \frac{1}{1+8\sin^2 x}dx$; **2.36.** $\int \frac{1}{1+24\cos^2 x}dx$;

2.37. $\int \sin x\cos^5 x dx$; **2.38.** $\int \sin^7 x\cos x dx$;

2.39. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$; **2.40.** $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$.

2.4. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ n\in N,\ ad-bc\neq 0.$$

Такой интеграл подстановкой $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ сводится к интегралу от рациональной функции. Действительно, отсюда следует:

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},\ x=\frac{b-t^n d}{ct^n-a},\ dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt$$

и

$$\int R\left(\frac{b-t^n d}{ct^n-a}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ - дробно-рациональная функция.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ n,m\in N,\ ad-bc\neq 0$$

сводится к интегралу от рациональной функции при помощи подстановки

$t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где k — наименьшее общее кратное чисел n и m.

►***Пример 10.*** Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\left\langle \begin{matrix} t=\sqrt{x+4},\ x=t^2-4 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\int \frac{2t^2dt}{t^2-4}=2\int \frac{(t^2-4+4)dt}{t^2-4}=2\left(\int dt+4\int \frac{dt}{t^2-4}\right)=$$

$$=2t+2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

◄

►***Пример 11.*** Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}\,dx = \left\langle \begin{matrix} t=\sqrt[6]{x+2},\ x=t^6-2,\ \ dx=6t^5dt \\ \sqrt[3]{(x+2)^2}=t^4,\ \sqrt{x+2}=t^3 \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \int \frac{6t^5}{t^4-t^3}\,dt = 6\int \frac{t^2}{t-1}\,dt = = 6\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}\right)+\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C\,.$$

◄

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций можно преобразовать к интегралам от рациональных функций при помощи тригонометрических подстановок:

а) для интеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ применяют подстановку $x=a\sin t$;

б) для интеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ применяют подстановку $x=a tg t$;

в) для интеграла $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ применяют подстановку $x=\dfrac{a}{\sin t}$.

►***Пример 12.*** Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \left\langle \begin{matrix} x=\sin t,\ \ dx=\cos t dt \\ t=\arcsin x,\ \sqrt{1-x^2}=\cos t \end{matrix} \right\rangle = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t}\,dt - \int dt = -ctgt - t + C =$$

$$= -ctg(\arcsin x) - \arcsin x + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

◄

Интеграл вида

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx\,,$$

где a, b - действительные числа, - рациональные числа, называются интегралом от дифференциального бинома. Только при условии, когда одно из чисел $p,\ \dfrac{m+1}{n},\ \dfrac{m+1}{n}+p$ является целым числом можно подынтегральную функцию преобразовать к рациональной функции. Для этого применяются следующие подстановки:

а) если p - целое число, то применяют подстановку $x=t^k$ где k - наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

б) если $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, то применяют подстановку $a+bx^n=t^s$ где s - знаменатель дроби p;

в) если $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число, то применяют подстановку $a+bx^n=x^n t^s$ где s - знаменатель дроби p.

►***Пример 13.*** Вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^8}\,dx$.

Это интеграл от дифференциального бинома, здесь $m=-\dfrac{2}{3},\ n=\dfrac{1}{6},\ p=-8$ - целое число (вариант а) интегрируемости дифференциального бинома), поэтому применим подстановку $t=\sqrt[6]{x}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt{x}+1)^8}\,dx = \left\langle \begin{array}{c} t=\sqrt[6]{x},\ x=t^6 \\ \sqrt[3]{x^2}=t^4,\ dx=6t^5dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{6t^5}{t^4(t+1)^8}\,dt = \int \frac{6t}{(t+1)^8}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t+1-1}{(t+1)^8}\,dt = 6\int \left((t+1)^{-7}-(t+1)^{-8}\right)dt = 6\left(\frac{(t+1)^{-6}}{-6}-\frac{(t+1)^{-7}}{-7}\right)+C = 6\left(\frac{1}{7(t+1)^7}-\frac{1}{6(t+1)^6}\right)+C =$$

$$6\left(\frac{1}{7(\sqrt{x}+1)^7}-\frac{1}{6(\sqrt{x}+1)^6}\right)+C.$$

◄

В следующих задачах вычислить неопределенные интегралы от иррациональных функций.

2.41. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

2.42. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$;

2.43. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

2.44. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt{x-1}}\,dx$;

2.45. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$;

2.46. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

2.47. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

2.48. $\int \frac{1}{x(1+\sqrt[4]{x})}\,dx$;

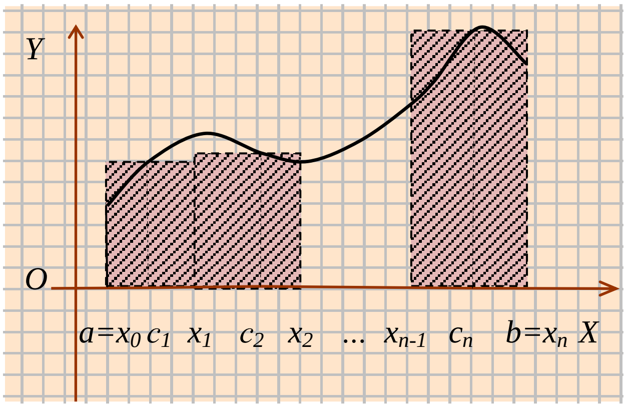
2.49. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;

2.50. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{(x+1)^2+\sqrt{x+1}}\,dx$.

ГЛАВА 3. Определённый интеграл

3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Пусть задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. На плоскости XOY рассмотрим фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$. Такая фигура называется криволинейной трапецией. Найдём её площадь. Для этого отрезок $[a;b]$ разобьём точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. В результате отрезок $[a;b]$ разделится на n частичных отрезков $[x_0;x_1],[x_1;x_2],\ldots,[x_{n-1};x_n]$.



На каждом из частичных отрезков возьмём произвольную точку c_i и вычислим значение $f(c_i)$. Умножим $f(c_i)$ на длину соответствующего частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Полученное произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с высотой $f(c_i)$ и основанием Δx_i. Сумма всех таких произведений

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

приближённо равна площади *S* криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i .$$

Сумма S_n называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если $n\to\infty$ и при этом уменьшаются все Δx_i, то значение S_n приближается к S.

За точное значение площади *S* криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится интегральная сумма S_n при неограниченном росте *n*.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le x\le n}\Delta x_i$ и при $n\to\infty$ $\lambda\to 0$, тогда

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i .$$

Число *S* называется определённым интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$,

где a,b - нижний и верхний пределы интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, *x* – переменная интегрирования.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

3.2. Свойства определённого интеграла

Из определения определённого интеграла следуют свойства определённого интеграла.

1. $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx,\quad k$ - постоянный множитель, не зависящий от x.

6. $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b (f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. Если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

3.3. Способы вычисления определённого интеграла

Для вычисления определенного интеграла применяются формула Ньютона –Лейбница, замена переменной интегрирования, и интегрирование по частям.

Формула Ньютона – Лейбница.

Если для подынтегральной функции $f(x)$ можно найти первообразную $F(x)$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

►***Пример 1.*** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 x^2 dx$.

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

◄

►***Пример 2.*** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}dx$.

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_e^{e^2} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big\|_e^{e^2} = \ln|\ln e^2| - \ln|\ln e| = \ln 2.$$

◄

►***Пример 3.*** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

Сначала подынтегральную функцию преобразуем:

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|.$$

Так как функция $\cos x$ на промежутке интегрирования $[0;\pi]$ принимает значения разных знаков ($\cos x \geq 0$, если $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\cos x \leq 0$, если $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$), то интеграл необходимо разбить на два интеграла:

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\pi}|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx.$$

Теперь каждый интеграл вычислим по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0)-(0-1) = 2.$$

◄

3.4. Замена переменной интегрирования

В интеграле $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, выполним замену переменной интегрирования по формуле $x = g(t)$. Если функция $g(t)$ удовлетворяет условиям: $g(\alpha)=a,\ g(\beta)=b$; функции $g(t)$ и $g'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$; множеством значений функции $g(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ является промежуток $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Для доказательства этой формулы запишем последовательность равенств:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\quad \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))+C,$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),\quad \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) = F(b)-F(a).$$

Сравнив правые части, двух последних равенств, получим требуемую формулу.

►***Пример 4.*** Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x(2-x^2)^5dx$.

Заменим переменную интегрирования по формуле $t = 2-x^2$, тогда $xdx = -\dfrac{1}{2}dt$. Если $x=0$, то $t=2$, если $x=1$, то $t=1$. Следовательно,

$$\int_0^1 x(2-x^2)^5dx = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^5dt = -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}\Big|_2^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{2^6}{6}\right) = \frac{21}{4}.$$

◄

3.5. Формула интегрирования по частям

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула интегрирования по частям определенного интеграла:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Докажем эту формулу. Так как функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v+uv'.$$

Значит, uv - первообразная функции $u'v+uv'$. Отсюда по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v+uv')dx = uv\Big|_a^b.$$

Преобразовав левую часть этого равенства, получим

$$\int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \text{ и } \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

►***Пример 5.*** Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$.

Пусть $u = x$, и $dv = \sin xdx$ тогда $du = dx$ и $v = -\cos x$. Отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

◄

3.6. Интегрирование четных и нечетных функций на симметричном отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \textit{ если } f(x) - \textit{четная функция,} \\ 0, \textit{ если } f(x) - \textit{нечетная функция.} \end{cases}$$

Для доказательства этой формулы интеграл представим в виде суммы двух:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx .$$

В первом интеграле заменим переменную интегрирования по формуле $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left\langle \begin{matrix} x = -t,\ dx = -dt \\ \textit{если } x = -a, \textit{ то } t = a, \textit{ если } x = 0, \textit{ то } t = 0 \end{matrix} \right\rangle = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt .$$

Вернувшись к прежней переменной x, имеем:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx .$$

Следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = $$
$$= \int_0^a (f(-x) + f(x))dx .$$

Далее, учитывая, что для четной функции $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, а для нечетной - $f(-x) + f(x) = 0$, получаем доказательство формулы.

►***Пример 6.*** Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin xdx$.

Подынтегральная функция $f(x) = e^{-x^2} \sin x$ нечётная, так как

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} \sin(-x) = -e^{-(x)^2} \sin(x) = -f(x) .$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin xdx = 0 .$$

◄

►***Пример 7.*** Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1} xarctgxdx.$

Подынтегральная функция $f(x) = xarctgx$ чётная, т.е.

$$f(-x) = -xarctg(-x) = xarctgx = f(x) ,$$

тогда $\int\limits_{-1}^{1} x\,arctgx\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\,arctgx\,dx.$

Вычислим неопределенный интеграл $\int x\,arctgx\,dx$, применив интегрирование по частям:

$$\int x\,arctgx\,dx = \left\langle \begin{matrix} u = arctgx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ xdx = dv, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2+1-1}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx)$$

.

Отсюда

$$\int\limits_{-1}^{1} x\,arctgx\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\,arctgx\,dx = 2\left.\left(\frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx)\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

◄

3.7. Теорема о среднем и оценки определённого интеграла

1. ***Теорема о среднем***. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то существует точка* $c \in [a;b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$-первообразная функции $f(x)$. Применив к разности $F(b)-F(a)$ теорему Лагранжа

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a),$$

получим

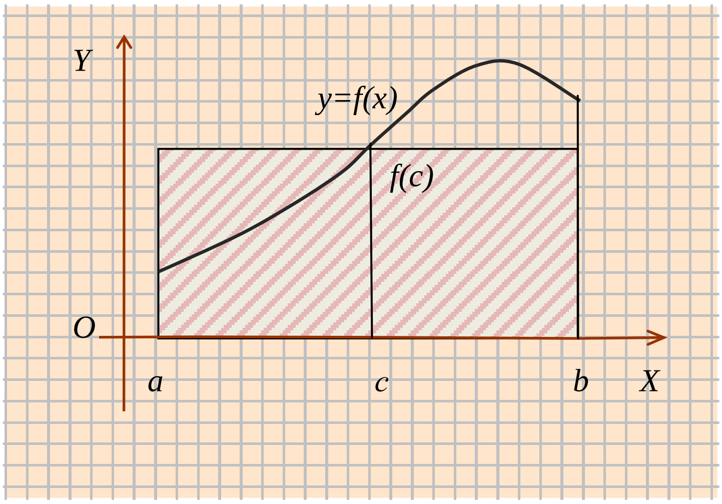
$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a).$$

Число

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем состоит в том, что значение $\int\limits_a^b f(x)dx$ равно площади прямоугольника высотой $f(c)$ и шириной $b-a$ (см. рисунок).



►***Пример 8.*** Найти среднее значение функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;2]$.

$$f(c) = \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

◄

2. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *где* $a < b$ *и* $f(x) \geq 0$, *тогда и* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. По теореме о среднем $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a;b]$. Так как функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то и $f(c) \geq 0$. Следовательно, и $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

3. *Если для функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *непрерывных на отрезке* $[a;b]$, *где* $a < b$, *справедливо неравенство*

$$f_1(x) \leq f_2(x),\ x \in [a;b],$$

то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Так как функция $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то и

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \geq 0.$$

Значит $\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \geq 0$ и $\int_a^b f_2(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx$.

►***Пример 9.*** Определить, какой из интегралов больше

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{14} x dx \text{ или } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx.$$

На промежутке $[0;\frac{\pi}{2}]$ функция $y = \sin x$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq \sin x \leq 1$, следовательно, $\sin^{10} x \leq \sin^4 x$. Проинтегрировав это неравенство, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{14} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx.$$

◄

4. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *а* m *и* M *- соответственно наименьшее и наибольшее её значения, то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказательство. Так как на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна, то по теореме Вейерштрасса

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x) \le f(x) \le \max_{a \le x \le b} f(x) = M.$$

Проинтегрировав неравенства

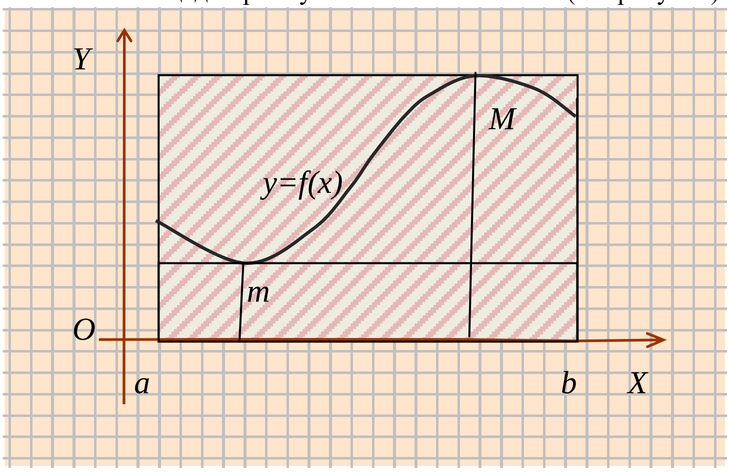
$$m \le f(x) \le M,$$

и, учитывая, что

$$\int_a^b m dx = m(b-a) \text{ и } \int_a^b M dx = M(b-a),$$

получим оценку определенного интеграла $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Геометрический смысл этих неравенств состоит в том, что значение площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$, не меньше площади прямоугольника высотой m и не больше площади прямоугольника высотой M (см. рисунок).



►***Пример 10.*** Оценить интеграл $\int_1^4 \sqrt{8+x^3}dx$.

Функция $f(x) = \sqrt{8+x^3}$ монотонно возрастает на отрезке $[1;4]$. Действительно, $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}}$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in [1;4]$. Поэтому наименьшее значение функции - $m = f(1) = \sqrt{8+1} = 3$, наибольшее - $M = f(4) = \sqrt{8+64} = \sqrt{72}$ и длина отрезка интегрирования $b - a = 3$. Отсюда получаем оценку

$$9 \le \int_1^4 \sqrt{8+x^3}dx \le 18\sqrt{2}.$$

◄

5. *Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции*:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,\ a < b.$$

Доказательство. Проинтегрировав двойное неравенство

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

получим

$$-\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx .$$

Отсюда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

6. Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, тогда она интегрируема и в промежутке $[a,x]$, где x - произвольная точка промежутка $[a,b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

называется определенным интегралом с переменным верхним пределом.

Функцию $F(x)$ можно дифференцировать и справедлива формула:

$$\left(F(x)\right)' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) .$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)\Big|_a^x = F(x) - F(a) .$$

Следовательно, $\left(\int_a^x f(x)dx\right)' = \left(F(x) - F(a)\right)' = F'(x) = f(x)$.

►***Пример 11.*** Найти производную функции $\int_1^{\sqrt{x}} \ln t dt$.

$$F'(x) = \left(\int_1^{\sqrt{x}} \ln t dt\right)' = \ln\sqrt{x}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x} .$$

◄

В следующих задачах вычислить определенные интегралы.

3.51. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx$;

3.52. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

3.53. $\int_0^2 (x^2 + 2x - 1)dx$;

3.54. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+1)dx$;

3.55. $\int_0^e \frac{dx}{x+1}$;

3.56. $\int_{-1}^{\ln 2} e^{x+1}dx$;

3.57. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

3.58. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$;

3.59. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3.60. $\int_0^1 (x\sqrt{x} + x^4)dx$.

В следующих задачах вычислить определенные интегралы при помощи замены переменной интегрирования.

3.61. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$;

3.62. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx$;

3.63. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$;

3.64. $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$;

3.65. $\int_0^1 \frac{arctgx+x}{1+x^2}dx$;

3.66. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arcsin x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3.67. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$;

3.68. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx$;

3.69. $\int_0^5 (+x)\sqrt[3]{9-x}dx$;

3.70. $\int_1^6 (-x)\sqrt[3]{3+x}dx$.

В следующих задачах вычислить определенные интегралы, применяя интегрирование по частям.

3.71. $\int_1^e x\ln xdx$;

3.72. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$;

3.73. $\int_0^1 arctgxdx$;

3.74. $\int_0^1 \arcsin xdx$;

3.75. $\int_0^{\pi/2} (1+5x)\sin xdx$;

3.76. $\int_0^{\pi} (3-7x)\cos xdx$;

3.77. $\int_{-\pi}^0 (x^2+5x+6)\cos xdx$;

3.78. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+2x+1)\sin xdx$;

3.79. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$;

3.80. $\int_1^1 \ln^2 xdx$.

3.8. Приближенное вычисление определенного интеграла

Для многих элементарных функций первообразную невозможно выразить через элементарные функции. Кроме того, в экономических задачах подынтегральная функция иногда задается в виде таблицы. В таких случаях для вычисления определенного интеграла применяют приближенные методы. Формулы приближенного интегрирования называют квадратурными:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n,$$

где A_k - коэффициенты квадратурной формулы, x_k - узлы квадратурной формулы $x_k \in [a;b]$, R_n - погрешность квадратурной формулы.

Рассмотрим простейшие квадратурные формулы.

Для вычисления $\int_a^b f(x)dx$ на промежутке интегрирования $[a;b]$ зададим $n+1$ точку

$$x_k = a + hk,\ k = 0,1,\ldots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}.$$

1. Формула левых прямоугольников.

Если на каждом промежутке $[x_{k-1}; x_k], k = 0,1,\ldots,n,$ выбрать левую точку $c_{k-1} = x_{k-1}, k = 1,\ldots,n$, то получим формулу левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

2. Формула правых прямоугольников.

Если на каждом промежутке $[x_{k-1}; x_k], k = 0,1,\ldots,n,$ выбрать правую точку $c_k = x_k, k = 1,\ldots,n$, то получим формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

3. Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right).$$

4. Формула Симпсона

На промежутке интегрирования $[a;b]$ зададим точки

$$x_k = a + hk,\ k = 0,1,\ldots,2n,\quad h = \frac{b-a}{2n}.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\big) +$$

$$+ 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\big)\Big).$$

►***Пример 12.*** Вычислим определенный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx$ по формуле левых и правых прямоугольников, формуле трапеций и формуле Симпсона при $n = 4$.

В этом случае $h = 0{,}25$, вычислим таблицу значений функции:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	0,99611	0,94118	0,75964	0,5

Формула левых прямоугольников: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \approx 0{,}25(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) =$

$$0{,}25(1 + 0{,}99611 + 0{,}94118 + 0{,}75964) = 0{,}92423.$$

Формула правых прямоугольников:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \approx 0{,}25(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) =$$

$$= 0{,}25(0{,}99611 + 0{,}94118 + 0{,}75964 + 0{,}5) = 0{,}79923.$$

Формула трапеций:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \approx 0{,}25\left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 +{}_3\right) =$$

$$= 0{,}25\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 0{,}99611 + 0{,}94118 + 0{,}75964\right) = 0{,}86173.$$

Формула Симпсона:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \approx \frac{0{,}25}{3}(y_0 + y_4 + 4(y_1 +{}_3) + 2y_2) =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}(1 + 0{,}5 + 4\cdot(0{,}99611 + 0{,}75964) + 2\cdot 0{,}94118) = 0{,}86711.$$

Точное значение: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx = 0{,}86697.$

◄

3.9. Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для непрерывной функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ конечной длины называется *собственным интегралом*. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы от неограниченной функции называются *несобственными интегралами*.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования или несобственные интегралы I-го рода определяются следующими формулами:

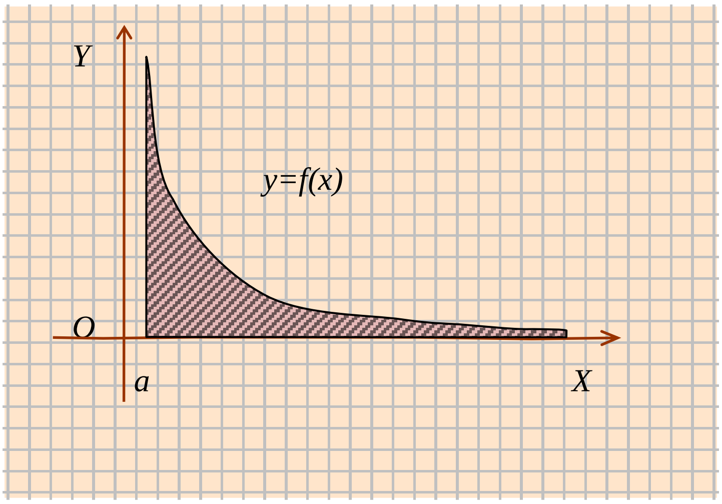
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Предположим, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$, тогда по определению полагают, что

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx \qquad (1)$$

Если предел справа существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть, например, функция $f(x)$ неотрицательная и убывающая на $[a,+\infty)$, (см. рисунок).



Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямой $x = a$. Площадь этой фигуры может быть конечной, несмотря на то, что фигура неограниченна.

Подобным образом определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;+\infty)$ представляется в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx,$$

где b - произвольное конечное число. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если оба интеграла в правой части формулы сходятся.

►***Пример 1.*** Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или установить его расходимость.

По определению несобственного интеграла по неограниченному промежутку имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} 2(\sqrt{b} - \sqrt{1}) = +\infty.$$

Значит, несобственный интеграл расходится.

◄

►***Пример 2.*** Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ или установить его расходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{2}$.

◄

►***Пример 3.*** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx$ или установить его расходимость.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{0} \sin x dx = \lim_{b\to-\infty} -\cos x\Big|_b^0 = \lim_{b\to-\infty} \left(-\cos 0 + \cos b\right).$$

Так как предел не существует, то несобственный интеграл расходится.

◄

Теорема (признак сравнения). Если для всех $x \ge a$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и справедливо неравенство $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

►***Пример 4.*** Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\sin^2 x\right)}dx$.

На промежутке $[1,+\infty)$ справедливо неравенство $\frac{1}{x^2\left(1+\sin^2 x\right)} \le \frac{1}{x^2}$. Поэтому, применяя признак сравнения, интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\sin^2 x\right)}dx$ сравним с интегралом $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$, который сходится. Действительно,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} -\left(\frac{1}{b}-1\right) = 1.$$

Значит, и интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\sin^2 x\right)}dx$ сходится и его значение не превосходит 1.

◄

Теорема 2 (предельный признак). *Если для всех* $x \ge a$ $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ *и существует* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = p,\ 0 < p < \infty$*, то несобственные интегралы* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

►***Пример 5.*** Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \ln\frac{x\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}+1}dx$.

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x) = \ln\frac{x\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}+1}$. Преобразовав выражение под знаком логарифма $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}+1}\right)$, видим, что при $x \to \infty$ функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}+1}\right)}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} = 1.$$

Следовательно, применяя предельный признак, перейдем к исследованию сходимости более простого несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$, чем исходный интеграл:

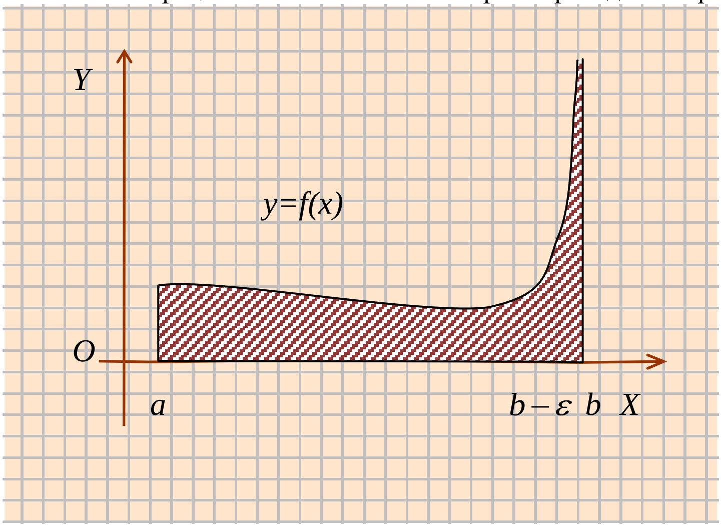
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}-2\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}-2\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)=2.$$

Так как этот интеграл сходится, то сходится и исходный интеграл.

◄

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$ и в точке $x=b$ имеет бесконечный разрыв, то $\int_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом от неограниченной функции или несобственным интегралом второго рода. Геометрическая иллюстрация несобственного интеграла приведена на рисунке.



По определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx.$$

Если предел справа в этом равенстве существует и конечен, то рассматриваемый интеграл называется *сходящимся*, в противном случае - *расходящимся*.

Для функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(a,b]$ и неограниченной в точке a,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx.$$

Если же функция $f(x)$ неограниченна во внутренней точке $c\in(a;b)$, то несобственный интеграл второго рода определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл в левой части равенства называется *сходящимся*, если оба несобственных интеграла в правой части равенства *сходятся независимо друг от друга.*

►***Пример 6***. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ неограниченна в точке $x=1$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-1+\varepsilon}+2\sqrt{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{1}\right)=2.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и его значение равно 2.

◄

Теорема (признак сравнения). Если на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, имеют бесконечный разрыв в точке $x=b$ и для всех $x \in [a;b)$ удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и справедливо неравенство $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

►***Пример 7.*** Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^3+\sqrt{x}}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{2x^3+\sqrt{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$. Для $x \in (0;1]$ справедливо неравенство $\frac{1}{2x^3+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Следовательно, можно применить признак сравнения и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^3+\sqrt{x}}$ сравнить с интегралом $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, который сходится. Действительно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Значит, сходится и несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^3+\sqrt{x}}$.

◄

Теорема (предельный признак). Если на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, имеют бесконечный разрыв в точке $x=b$ и существует $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = p,\ 0 < p < \infty$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

►***Пример 8.*** Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,$$

то применим предельный признак сравнения, исходный интеграл сравним с интегралом $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$. Исследуем его сходимость:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = \infty.$$

Отсюда несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$ расходится, следовательно, расходится и несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

◄

В следующих задачах вычислить несобственные интегралы по бесконечному промежутку или установить их расходимость.

3.81. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

3.82. $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}dx$;

3.83. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$;

3.84. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$;

3.85. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+10}dx$;

3.86. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}dx$;

3.87. $\int_1^{\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx$;

3.88. $\int_1^{\infty}\frac{x^3+1}{x^5}dx$;

3.89. $\int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$;

3.90. $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$.

В следующих задачах исследовать сходимость несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

3.91. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$;

3.92. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}+\cos^2 x}dx$;

3.93. $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$;

3.94. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$;

3.95. $\int_1^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+x+1)^3}dx$;

3.96. $\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+2x+5}dx$.;

3.97. $\int_1^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$;

3.98. $\int_1^{\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{1+x^4}}dx$;

3.99. $\int_{-\infty}^{0}e^x dx$;

3.100. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$.

В следующих задачах вычислить несобственные интегралы от неограниченной функции или установить их расходимость.

3.101. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

3.102. $\int_0^{1}\frac{1}{x^2}dx$;

3.103. $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$;

3.104. $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3.105. $\int_1^{2}\frac{1}{(x+2)\sqrt{2-x}}dx$;

3.106. $\int_1^{3}\frac{1}{(x-3)\sqrt{x+1}}dx$;

3.107. $\int_0^{1}\ln x dx$;

3.108. $\int_0^{1}x\ln^2 x dx$;

3.109. $\int_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

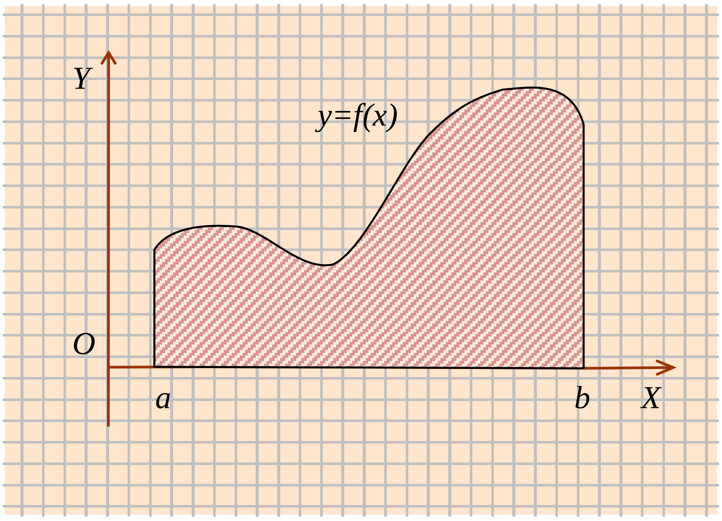
3.110. $\int_1^{2}\frac{1}{x\ln x}dx$.

ГЛАВА 4. Приложения определенного интеграла в геометрии и экономике

4.1. Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b, y = 0$, (см. рисунок) равна значению определенного интеграла:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



►***Пример 1***. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью OX и синусоидой $y = \sin(x)$, $x \in [0,\pi]$.

Площадь данной фигуры равна

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$

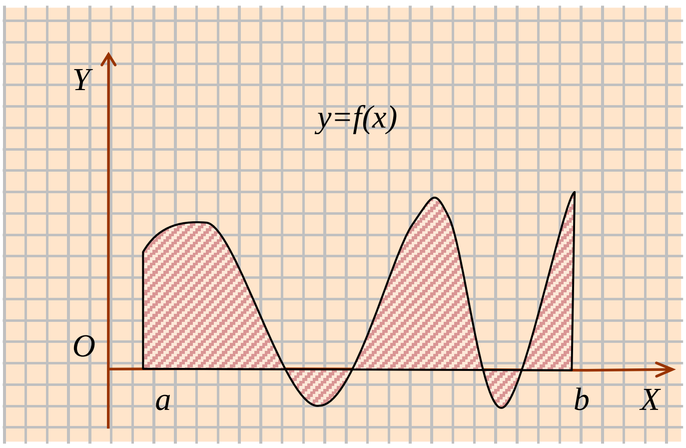
◄

Если функция $y = f(x)$ отрицательна на промежутке $[a;b]$ и криволинейная трапеция расположена ниже оси абсцисс, то площадь находится по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

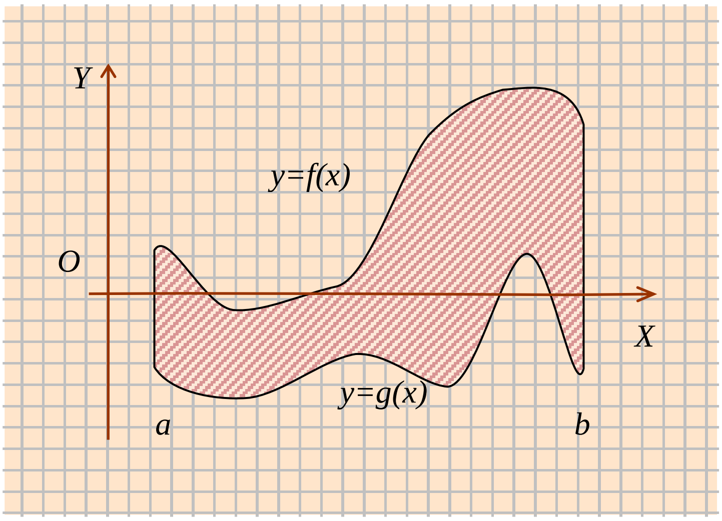
В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и положительна и отрицательна (см. рисунок), площадь фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

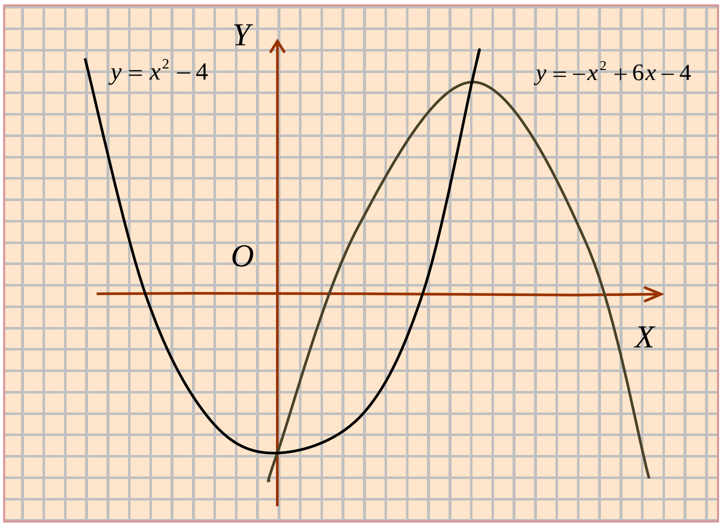


Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ $(f(x) \geq g(x))$, прямыми $x = a, x = b$ (см. рисунок), вычисляют по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



►***Пример 2.*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 6x - 4$.



Найдем точки пересечения графиков функций. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

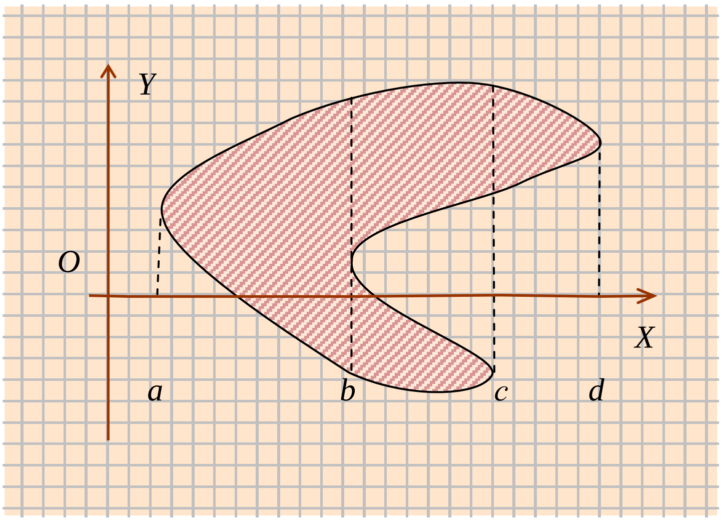
Отсюда $x_1 = 0, y_1 = -4, x_2 = 3, y_2 = 5$.

Площадь данной фигуры равна

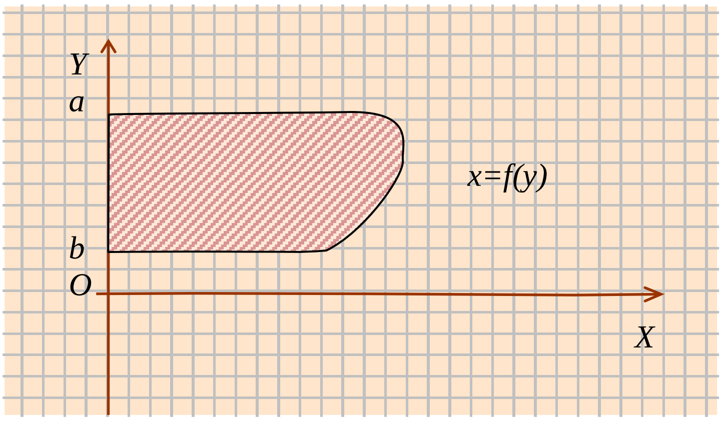
$$S = \int_0^3 ((-x^2 + 6x - 4) - (x^2 - 4))dx = = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx = (-2\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2})\Big|_0^3 = -18 + 27 = 9.$$

◄

Если фигура имеет сложную форму (см. рисунок), то прямыми, параллельными оси *OY*, необходимо разделить на части, площади которых можно вычислить по формулам, рассмотренным ранее.

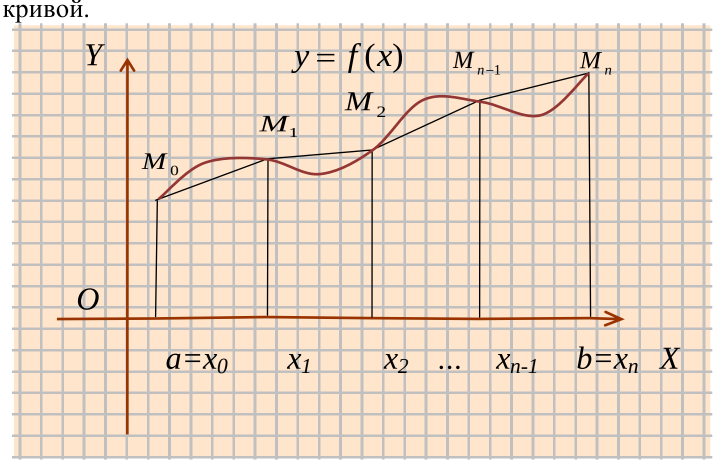


В случае, когда криволинейная трапеция ограничена прямыми $y=a, y=b, x=0$ и графиком неотрицательной функции $x=f(y)$ (см. рисунок), то её площадь можно вычислить по формуле $S=\int_a^b f(y)dy$.



4.2. Длина дуги кривой

Вычисление длины дуги кривой также приводит к интегралам. Пусть функция $y=f(x)$ и её производная $y'=f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Её график представляет некоторую кривую (см. рисунок). Необходимо найти длину L дуги этой кривой.



Отрезок $[a;b]$ разобьём точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$ на n частичных отрезков $[x_0;x_1],[x_1;x_2],\ldots,[x_{n-1};x_n]$, тогда на плоскости получим точки $M_i(x_i, f(x_i)), i=1,\ldots n$, на кривой. Соединив последовательно эти точки отрезками прямой, получим ломаную линию $M_0M_1\ldots M_{n-1}M_n$. Пусть l_k есть длина отрезка $M_{i-1}M_i, i=1,2,3,\cdots,n$, и $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} l_i$. Тогда длина ломаной $M_0M_1\ldots M_{n-1}M_n$ равна $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$.

Естественно определить длину L кривой как предельное значение длины L_n при $\lambda \to 0$, т. е.:

$$L = \lim_{\lambda\to 0} L_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} l_i \ .$$

Применив формулу расстояния между двумя точками $M_{i-1}(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ и $M_i(x_i; f(x_i))$, найдем

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}), c_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

и поэтому

$$l_i = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i\,, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Следовательно, $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$ есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому справедлива формула

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

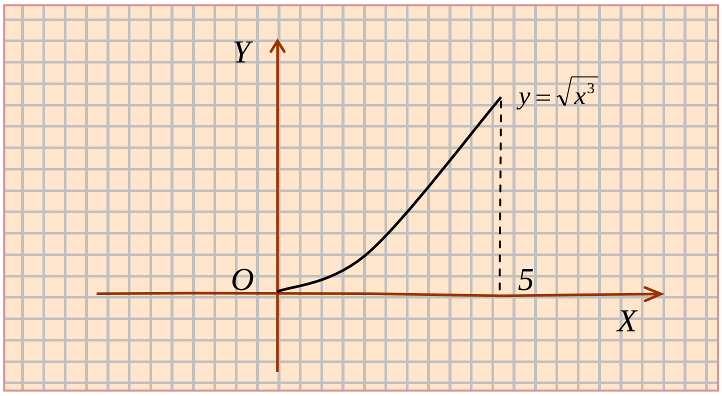
►***Пример 3***. Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{x^3}$ между точками с абсциссами $x=0$ и $x=5$.

Так как $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ то длина дуги

$$L = \int_0^5 \sqrt{1+(f'(x)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int_0^5 \frac{4}{9}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\cdot 5\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8} - 1\right) = \frac{335}{27}.$$

◄



4.3. Вычисление объема произведенной продукции

Пусть функция $y = f(t)$ задает производительность некоторого производственного процесса в зависимости от времени t. Найдем объём V продукции, произведенной за промежуток времени $[0;T]$. Предположим, что функция $y = f(t)$ непрерывна для $t \in [0;T]$.

Разобьём отрезок $[0,T]$ на отрезки точками

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\,.$$

Объём продукции, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$, приближенно равен

$$\Delta v_i = f(c_i)\Delta t_i, c_i \in [t_{i-1}; t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0; T]$, равен

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i.$$

Сумма V_n является интегральной суммой функции $y = f(t)$ на промежутке $[0; T]$. Пусть $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$, найдем предел V_n при $n \to \infty$, учитывая при этом, что $\tau \longrightarrow 0$ и $V_n \to V$. Так как функция $y = f(t)$ непрерывна на промежутке $[0; T]$, то этот предел существует и равен $\int_0^T f(t)dt$. Следовательно,

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)dt.$$

Итак, если $f(t)$ -производительность труда в момент времени, то объём выпускаемой продукции за промежуток времени $[0; T]$ равен

$$V = \int_0^T f(t)dt.$$

Из этой формулы следует, что объем продукции, произведенной за промежуток времени $[T_1; T_2]$ равен

$$V = \int_{T_1}^{T_2} f(t)dt.$$

►***Пример 4.*** Определить объём продукции, произведённой за второй час работы, если производительность труда задана функцией.

$$f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3.$$

$$V = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right)dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+4| + 3t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 10 + 6 - \frac{2}{3}\ln 7 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3$$ ◄

4.4. Применение теоремы о среднем в экономических задачах

Пусть функция $t = t(x)$, задаёт время, необходимое на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Функцию $t(x)$ называют функцией обучения, она определяется экспериментально и имеет вид:

$$t(x) = ax^{-b}, a > 0, 0 < b < 1,$$

где a - затраты времени на изготовление первого изделия, b - параметр производственного процесса.

Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения производства от изделия x_1 до изделия x_2 (изделия с номером $x_1 + 1$, $x_1 + 2$, …, x_2) определяется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

►***Пример 5.*** Вычислить среднее время, необходимое на изготовление одного изделия в период освоения производства от изделия с номером 100 до изделия с номером 121, если на изготовление первого изделия затрачивается 600 минут и параметр производственного процесса $b = 0{,}5$.

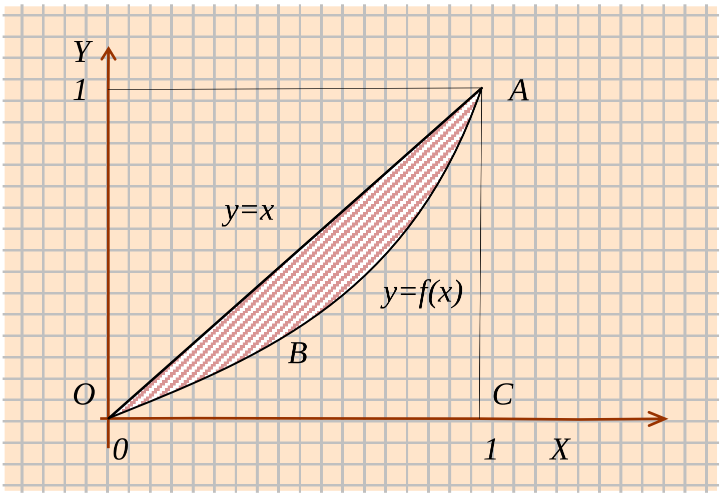
Функция обучения $t(x) = \dfrac{600}{\sqrt{x}}$, тогда среднее время

$$t_{ср}=\frac{1}{121-100}\int_{100}^{121}\frac{600}{\sqrt{x}}dx=\frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121}=\frac{1200}{21}(\sqrt{121}-\sqrt{100})=\frac{1200}{21}(11-10)==\frac{1200}{21}\approx 57{,}2 \text{ (мин.).}$$

◄

4.5. Коэффициент неравномерности распределения доходов

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, где x - часть наиболее низко оплачиваемого населения некоторого региона, y - доля совокупного дохода, получаемая частью x. Очевидно, что $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ и $y\le x$. Если $y(0{,}2)=0{,}1$, то 0,2 населения (20%) получают 0,1 совокупного дохода (10%). Функция $y=f(x)$ называется *функцией Лоренца*, а её график – *кривой Лоренца* (см. рисунок).



Если бы распределение доходов было совершенным, то кривой Лоренца была бы прямая $y=x$, и 1% населения получал бы 1% совокупного дохода, 10% населения – 10% дохода и т.д. Степень неравномерности распределения доходов определяется отношением площади заштрихованной фигуры *OAB* к площади треугольника *OAC* и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов:*

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$$

или, если учесть, что $S_{OAC}=\frac{1}{2}$, то

$$k=2\left(\int_0^1 (x-f(x))dx\right).$$

При вычислении коэффициента неравномерности распределения доходов можно учесть следующее равенство:

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}=\frac{S_{OAC}-S_{OBAC}}{S_{OAC}}=1-\frac{S_{OBAC}}{S_{OAC}}=1-2S_{OBAC}=1-2\int_0^1 f(x)dx$$

Отсюда следует, что $0\le k\le 1$, и при совершенном распределении доходов $k=0$.

►***Пример 6.*** Распределение доходов задано функцией Лоренца: $y(x)=\frac{9}{10}x^2+\frac{1}{10}x$. Вычислить коэффициент неравномерности распределения доходов.

$$k=2\int_0^1 (x-y(x))dx=2\int_0^1\left(x-\frac{9}{10}x^2-\frac{1}{10}x\right)dx=2\int_0^1\frac{9}{10}(x-x^2)dx=$$

$$=2\cdot\frac{9}{10}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2\cdot\frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{6}=0{,}3.$$

◄

В следующих задачах вычислить площадь плоских фигур, ограниченных графиками функций.

4.1. $y=6+5x-x^2,\ y=0$; **4.2.** $y=6-x-x^2,\ y=0$;

4.3. $y=x^2+2x-10,\ y=14$; **4.4.** $y=x^2-2x+1,\ y=16$;

4.5. $y=-x^2-x+1,\ y=-5$; **4.6.** $y=-x^2+3x+10,\ y=-8$;

4.7. $y=x^2-x,\ y=x+3$; **4.8.** $y=x^2-2x-17,\ y=2x+4$;

4.9. $\begin{array}{l} y=x^2+5x-6, \\ y=-x^2-5x+22 \end{array}$; **4.10.** $\begin{array}{l} y=x^2-2x-24, \\ y=-x^2+2x+6 \end{array}$.

В следующих задачах вычислить объем произведенной продукции за указанный промежуток времени, если производительность труда задана функцией $f(t)$.

4.11. $f(t)=32+70t-9t^2$, за второй час работы.

4.12. $f(t)=30+28t-4t^2$, за первые 3 часа работы.

В следующих задачах необходимо применить теорему о среднем.

4.13. После сборки первых 100 радиоприёмников определена функция обучения $x(t)=40t^{-0,14}$ (мин.). Вычислить среднее время, необходимое для сборки каждого из 50 следующих радиоприёмников.

4.14. После покраски первых 10 автобусов определена функция обучения $x(t)=20t^{-0,3}$ (час.). Вычислить среднее время, необходимое для покраски каждого из 50 следующих автобусов.

В следующих задачах задана функция Лоренца $y=f(x)$. Какую часть дохода получает *p%* наиболее низко оплачиваемого населения? Вычислить коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

4.15. $f(x)=0{,}87x^2+0{,}13x,\ p=8\%$;

4.16. $f(x)=0{,}96x^2+0{,}04x,\ p=10\%$;

4.17. $f(x)=\dfrac{11}{12}x^2+\dfrac{1}{12}x,\ p=15\%$;

4.18. $f(x)=\dfrac{9}{10}x^2+\dfrac{1}{10}x,\ p=10\%$;

4.19. $f(x)=\dfrac{5}{10}x^2+\dfrac{5}{10}x,\ p=5\%$.

Ответы

1.1. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. **1.2.** $-3\cos x-e^x+C$; **1.3.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+tgx+C$.

1.4. $\pi^2 x+\frac{3^x}{\ln 3}+C$. **1.5.** $-ctgx+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}+C$. **1.6.** $\frac{x^3}{3}+\arcsin x+C$. **1.7.** $\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}-\arcsin x+C$.

1.8. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+arctgx+C$; **1.9.** $5\sin x-7arctgx+C$; **1.10.** $-3\cos x+(4\cos 1)x+C$.

1.11. $\frac{3}{2}x^2-7x-2\ln x-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+C$; **1.12.** $\frac{-4}{\sqrt{x}}+\frac{9}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x}+C$. **1.13.** $\frac{1}{6}x^6+2x-\frac{1}{4x^4}+C$.

1.14. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-6x+27\sqrt[3]{x}+C$. **1.15.** $-7tgx+3\cos x+C$. **1.16.** $3tgx+8\sin x+C$.

1.17. $\frac{3^x}{\ln x}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C$. **1.18.** $8e^x+\frac{2}{x}+C$. **1.19.** $x+3\cos^3\frac{x}{3}+C$. **1.20.** $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C$.

1.21. $\frac{1}{9}\sqrt[2]{(6x+7)^3}+C$. **1.22.** $\frac{3}{14}\sqrt[3]{(2x+1)^7}+C$. **1.23.** $\frac{-1}{2\ln 3}3^{1-3x}+C$. **1.24.** $\frac{1}{3}e^{3x+4}+C$.

1.25. $\frac{-1}{3}\cos(3x-1)+C$. **1.26.** $\frac{1}{5}\sin(5x+6)+C$. **1.27.** $3\arcsin(2x)+C$. **1.28.** $70\arcsin(\frac{x}{5})+C$;

1.29. $arctg(3x)+C$. **1.30.** $\frac{7}{2}arctg(\frac{x}{2})+C$. **1.31.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5}+\frac{8}{3}\sqrt{(x-4)^3}+C$.

1.32. $\frac{1}{24}\sqrt{(4x+9)^3}-\frac{9}{8}\sqrt{4x+9}+C$. **1.33.** $\frac{-1}{2}\cos(x^2)+C$. **1.34.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **1.35.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-4)^3}+C$. **1.36.** $2\sin\sqrt{x}+C$. **1.37.** $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C$. **1.48.** $\frac{1}{2}arctg^2 x+C$. **1.39.** $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$.

1.40. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos x)^3}+C$. **1.41.** $(3x+2)e^x+C$. **1.42.** $2\cos x+(2x+1)\sin x+C$.

1.43. $(x^2-x-1)\cos x+(2x+1)\sin x+C$. **1.44.** $(x^2+4x+4)\sin x+(2x+4)\cos x+C$.

1.45. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **1.46.** $xarcctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **1.47.** $\frac{1}{2}(x^2arctgx+arctgx-x)+C$. **1.48.** $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. **1.49. 1.50.** $\frac{1}{2}\sin x^2-\frac{1}{2}x^2\cos x^2+C$.

2.1. $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|-\ln|x|+C$. **2.2.** $\frac{x^2}{2}-3x+8\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$.

2.3. $x^2+2x+7\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$. **2.4.** $x^2-2x+11\ln|x+3|+3\ln|x-2|+C$.

2.5. $\frac{3}{2}x^2+2\ln|x-1|+\ln|x+1|+C$. **2.6.** $\frac{1}{2}x^2+4x+8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+C$.

2.7. $\frac{3}{2}x^2-9x-\ln|x+2|+22\ln|x+1|+C$. **2.8.** $x+2\ln|x-1|-17\ln|x-2|+23\ln|x-3|+C$.

2.9. $x+2\ln|x-4|-8\ln|x-2|+12\ln|x-3|+C$. **2.10.** $3x-\frac{5}{4}\ln|x+8|+\frac{33}{4}\ln|x-2|-2\ln|x-1|+C$.

2.11. $\ln(x+1)-\frac{1}{(x+2)^2}+C$. **2.12.** $2\ln(x-1)-\frac{1}{(x+2)^2}+C$. **2.13.** $\ln(x+2)-\frac{1}{2(x-2)^2}+C$.

2.14. $4\ln(x-1)-\dfrac{3}{2(x+2)^2}+C$. **2.15.** $\ln(x+3)-\dfrac{3}{2(x-2)^2}+C$. **2.16.** $\ln(x-1)-\dfrac{3}{(x+1)^2}+C$.

2.17. $\ln(x+4)-\dfrac{3}{2(x+2)^2}+C$. **2.18.** $\ln(x+3)-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$. **2.19.** $\ln(x+2)+\dfrac{1}{(x+1)^2}+C$.

2.20. $2\ln(x-1)+\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$. **2.21.** $\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+arctgx+C$;

2.22. $\dfrac{1}{x+1}+\ln(x^2+x+1)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+C$; **2.23.** $\dfrac{2}{x+1}+\ln(x^2+2x+2)+C$;

2.24. $\dfrac{-1}{2(x+1)}+\dfrac{3}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{4}\ln(x^2+2x+3)-\dfrac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}(2x+2)\right)+C$;

2.25. $\dfrac{-2}{x+1}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}(2x+2)\right)+C$;

2.26. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2}\ln(x^2+2)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C$; **2.27.** $\dfrac{-1}{x+3}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)+C$;

2.28. $\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)+\dfrac{1}{2}arctg\left(\dfrac{1}{2}x\right)+C$;

2.29. $\dfrac{7}{5(x+4)}+\dfrac{11}{25}\ln(x+4)+\dfrac{7}{25}\ln(x^2+4)+\dfrac{2}{25}arctg\left(\dfrac{1}{2}x\right)+C$;

2.30. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C$;

2.31. $\dfrac{2}{3}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{3}+C$. **2.32.** $-\dfrac{2}{tg\frac{x}{2}+1}+C$. **2.33.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|3tg\dfrac{x}{2}+2\right|+C$.

2.34. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$. **2.35.** $\dfrac{1}{3}arctg(3tgx)+C$. **2.36.** $\dfrac{1}{5}arctg\left(\dfrac{tgx}{5}\right)+C$.

2.37. $\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$. **2.38.** $\dfrac{\sin^8 x}{8}+C$. **2.39.** $\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

2.40. $\dfrac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\dfrac{1}{8}\sin 8x\right)+C$.

2.41. $2\left(\dfrac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}+2\sqrt{x-1}\right)+C$. **2.42.** $2\left(\dfrac{x}{2}+\sqrt{x}+\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right)+C$.

2.43. $6\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{3}-\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{2}+\sqrt[6]{x+1}-\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|\right)+C$.

2.44. $6\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2}+\sqrt[6]{x-1}+\ln\left|\sqrt[6]{x-1}-1\right|\right)+C$.

2.45. $6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{x\sqrt[6]{x}}{7}\right)+C$. **2.46.** $-6\left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\right|\right)+C$.

2.47. $6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C$. **2.48.** $4\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}}{1+|\sqrt[4]{x}|}\right|+C$.

2.49. $\frac{1}{14}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^4}+C$. **2.50.** $\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{3}}+C$.

3.51. $\frac{3}{4}$. **3.52.** 1. **3.53.** $\frac{14}{3}$. **3.54.** $\cos 1-\sin 1$. **3.55.** $\ln(e+1)$. **3.56.** $2e-1$. **3.57.** 1. **3.58.** $\frac{\pi}{4}$. **3.59.** $\frac{\pi}{2}$. **3.60.** $\frac{3}{5}$. **3.61.** $\frac{\pi}{8}$. **3.62.** $\frac{\ln 2}{4}$. **3.63.** $\frac{3}{2}$. **3.64.** $\frac{e^2}{2}$. **3.65.** $\frac{\pi^2}{32}+\frac{\ln 2}{2}$. **3.66.** $\frac{\pi^2}{32}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$. **3.67.** $\ln 2$. **3.68.** $-\frac{3}{16}$. **3.69.** $\frac{634}{15}$. **3.70.** $-\frac{506}{15}$. **3.71.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$. **3.72.** 1. **3.73.** $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

3.74. $\frac{\pi}{2}-1$. **3.75.** 6. **3.76.** 14. **3.77.** $10-2\pi$. **3.78.** $1+\pi$. **3.79.** 2. **3.80.** 2. **3.81.** расходится. **3.82.** расходится. **3.83.** $\frac{1}{2}$. **3.84.** 2. **3.85.** $\frac{\pi}{2}-arctg 4$. **3.86.** $\frac{\pi}{8}$. **3.87.** расходится. **3.88.** $\frac{5}{4}$.

3.89. расходится. **3.90.** $\frac{1}{2e}$. **3.91.** сходится. **3.92.** сходится. **3.93.** сходится. **3.94.** сходится.

3.95. сходится. **3.96.** расходится. **3.97.** $\frac{3}{32}\pi^2$. **3.98.** расходится. **3.99.** $\frac{1}{2e}$. **3.100.** расходится. **3.101.** $\frac{3}{2}$. **3.102.** расходится. **3.103.** $\frac{3}{2}$. **3.104.** $\frac{\pi}{2}$. **3.105.** $\frac{\ln 3}{2}$. **3.106.** расходится. **3.107.** -1. **3.108.** $\frac{1}{4}$. **3.109.** 2. **3.110.** расходится. **4.1.** $\frac{343}{6}$. **4.2.** $\frac{125}{6}$. **4.3.** $\frac{500}{3}$. **4.4.** $\frac{256}{3}$. **4.5.** $\frac{125}{6}$. **4.6.** $\frac{243}{2}$. **4.7.** $\frac{32}{3}$. **4.8.** $\frac{500}{3}$. **4.9.** 243. **4.10.** $\frac{512}{3}$. **4.11.** 116. **4.12.** 180.

Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1, Мн., БГУ, 1998 г.
2. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 2, Мн., БГУ, 1998 г.
3. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 1, Мн., Высш. школа, 1988 г.
4. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 2, Мн., Высш. школа, 1988 г.
5. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс, – М.: 2001 г
6. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс, – М.: 2001 г
7. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов/. М.: ЮНИТИ, 2003 г.
8. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред проф. В.И. Ермакова, 2001 г.
9. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов, том 1, Мн., 2003.
10. Красс М.С., Чупрынов Б.Г. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 2001г.
11. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. 1999 г.
12. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 1. М.,2001 г.
13. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. Ч. 2. М.,2001 г.