**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**
**Кафедра численных методов и программирования**

**Марина Викторовна Игнатенко**

# Методы вычислений.
# Интерполирование и интегрирование

## Курс лекций

**Минск**
**2006**

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
И26

*Печатается по решению*
*Редакционно-издательского совета*
*Белорусского государственного университета*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор *П. И. Монастырный*;
доктор физико-математических наук,
профессор *Л. А. Янович*

**Игнатенко, М. В.**
И26 Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование : курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск : БГУ, 2006. – 115 с.
ISBN 985-485-664-X.

Курс лекций составляют темы «Интерполирование и приближение функций» и «Приближенное вычисление интегралов». Они являются частью дисциплины «Методы вычислений» и читаются студентам III курса механико-математического факультета БГУ.

**УДК 519.6(075.8)**
**ББК 22.19я73**

**ISBN 985-485-664-X**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Основными целями и задачами дисциплины «Методы вычислений» являются:

- построение математических моделей, определение их значения;
- знакомство с основными принципами разработки вычислительных методов для типичных и новых математических моделей;
- изучение и развитие теории и приложений вычислительных методов, их компьютерных реализаций;
- анализ достоверности численных результатов, их трактовка и внедрение.

Лекции по методам вычислений (темы «Интерполирование и приближение функций» и «Приближенное вычисление интегралов») читаются для студентов III курса механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Курс разработан в соответствии с учебной программой, рассчитанной на 32 часа (16 лекций) и включающей следующие вопросы:

- постановка задачи интерполирования;
- интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона;
- полиномы Чебышева;
- оценки остаточных членов интерполяционных полиномов и их минимизация;
- дискретное и быстрое преобразование Фурье;
- интерполирование сплайнами;
- численное дифференцирование функций и оценка его погрешности;
- понятие о методе наименьших квадратов;
- понятие о численном интерполировании и дифференцировании функций многих переменных;

- простые и составные интерполяционные квадратурные формулы;
- формулы прямоугольников, трапеции, Симпсона;
- формулы типа Гаусса;
- оптимизация распределения узлов квадратурной формулы;
- правило Рунге практической оценки погрешности;
- вычисление интегралов от функций специального вида;
- понятие о методах вычисления кратных интегралов и методе Монте-Карло.

Изучение данного курса, как и дисциплины «Методы вычислений» в целом, базируется на знаниях из университетских курсов по алгебре, геометрии, математическому анализу, функциональному анализу.

Методика изложения материала близка представленной в пособии И. П. Мысовских «Лекции по методам вычислений» [8] по соответствующим вопросам.

Структурно курс лекций разделен на темы. Дополнительный материал помечен звездочкой (*). Литература, представленная в конце, рекомендуется для углубленного изучения изложенной теории.

# ВВЕДЕНИЕ

## ОБ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧАХ И СОДЕРЖАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

*Вычислительная математика* – раздел математики, включающий решение теоретических и прикладных вопросов, связанных с построением дискретных математических моделей и применением вычислительных средств.

*Предмет вычислительной математики заключается в разработке:*

1) теории и приложений численных методов и вычислительных алгоритмов для решения типичных и новых задач науки и техники;

2) проблемы использования для этих целей современных вычислительных средств.

*Классы типичных задач вычислительной математики*:

1) приближение функций, в том числе интерполирование, и приближенное вычисление интегралов;

2) решение систем линейных алгебраических уравнений;

3) решение систем нелинейных численных уравнений;

4) решение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе в задачах математической физики;

5) оптимизация и математические методы в экономике;

6) решение некорректных задач.

*Вычислительный* (*численный*) *метод* – правило, в котором дано строгое предписание на выполнение некоторых действий, позволяющих преобразовать один массив (входные данные) в другой (выходные данные).

*Теория численных методов* включает исследование следующих вопросов:

- целенаправленность методов;
- внутренние свойства;
- границы применимости;
- надежность и достоверность;

- универсальность;
- устойчивость и сходимость;
- экономичность и точность.

Основы теории вычислительных методов достаточно полно изложены в работах [1–9].

Схема применения численных методов для решения прикладных задач иллюстрируется при рассмотрении понятия «вычислительный эксперимент».

## О СОДЕРЖАНИИ И НАЗНАЧЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ТРАКТОВКЕ А. А. САМАРСКОГО

Основы теории *вычислительного эксперимента* как научного метода исследования явлений природы и процессов с помощью математики и вычислительной техники были развиты в работах академика А. А. Самарского. В целом вычислительный эксперимент допускает следующую схематическую трактовку (рис. 1).

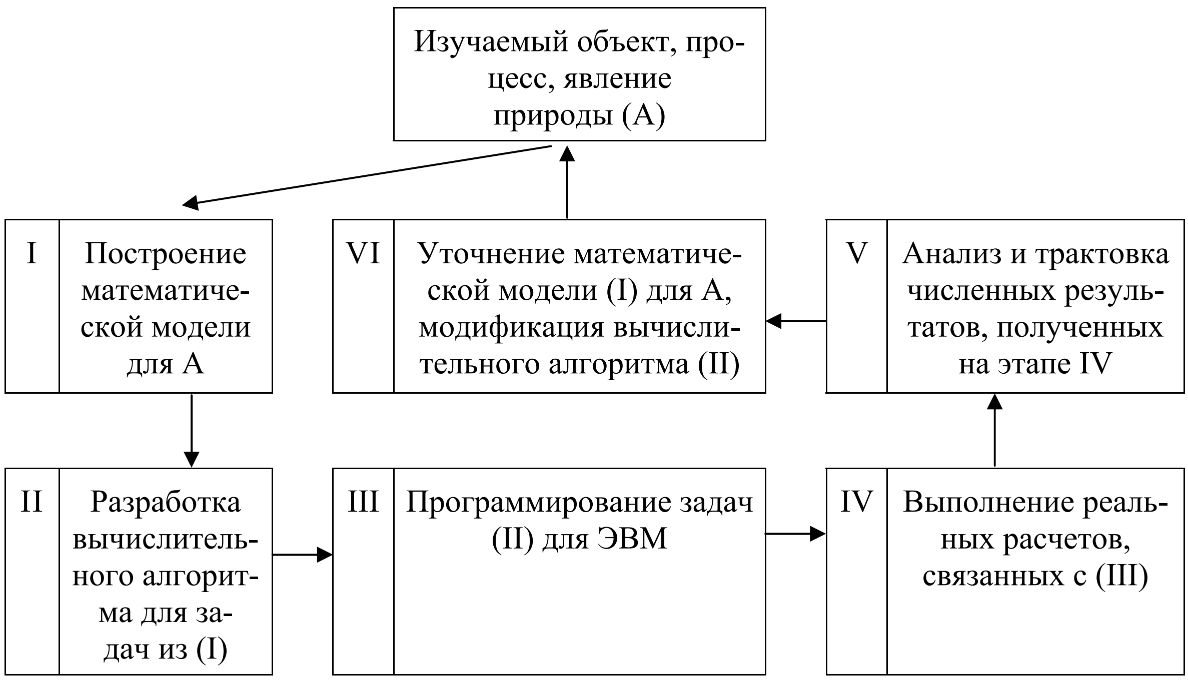



*Рис. 1.* Основные этапы вычислительного эксперимента

Сферой приложения вычислительного эксперимента может стать изучаемый объект, процесс, явление природы, а также их совокупность (А).

I. На первом этапе выделяются основные, наиболее значимые характеризующие изучаемый объект черты и связи. Эти связи записываются в виде уравнений или иных соотношений, выражающих фундаментальные законы естествознания, тем самым формулируется математическая модель для А. Для успешного этапа создания математической модели необходимо объединение и применение методов различных областей науки и техники (например, математика и механика, радиофизика и математическая электроника, химия и биология, медицина и др.).

II. Осуществляется выбор или разработка вычислительного алгоритма для математических моделей (задач) из (I).

III. Выбранный для математической модели (I) вычислительный алгоритм (II) реализуется в виде программ для ЭВМ.

IV. Выполняются реальные вычисления, связанные с (III).

V. Проводится анализ достоверности и трактовка численных результатов. Определяется, являются ли удачными выбранная математическая модель и вычислительный алгоритм.

VI. При необходимости математическая модель уточняется или модифицируется избранный вычислительный алгоритм, а в ряде случаев заменяются другими с целью получить более точный результат за минимально возможное время.

По своему содержанию и назначению вычислительный эксперимент имеет много проявлений и занимает значительное место в большом числе различных дисциплин, соединяя их и интегрируя различные направления.

## ТЕМА 1

# ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

## 1.1. СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

### 1.1.1. Определение и примеры

Пусть $\mathfrak{R}$ – линейное пространство вещественных функций, заданных на отрезке $[a,\, b]$, а $\left\{\varphi_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{N(\infty)} \subset \mathfrak{R}$ – конечная (счетная) линейно независимая система.

*Определение 1.1.* Линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\left(x\right)$, где $a_k \in R$, называется *обобщенным многочленом* по системе $\left\{\varphi_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{N}$.

*Определение 1.2.* Конечная система $\left\{\varphi_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{N}$ непрерывных на отрезке $[a,\, b]$ функций называется *чебышевской*, если любой неравный тождественно нулю обобщенный многочлен $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\left(x\right)$ имеет на $[a,\, b]$ не более чем $N-1$ корней.

Из определения 1.2 следует, что если обобщенный многочлен, построенный по чебышевской системе $\left\{\varphi_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{N}$, обращается в нуль в $N$ точках отрезка $[a,\, b]$, то он тождественно равен нулю на $[a,\, b]$.

Рассмотрим некоторые примеры чебышевских систем.

1) Система степеней $x$: $1, x, x^2, ..., x^{N-1}$ является чебышевской на любом отрезке $[a,\, b]$, так как многочлен степени не выше $N-1$ имеет не более $N-1$ корней. Такая система называется *алгебраической*.

2) *Тригонометрическая* система: $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,$ $\sin nx,\ \cos nx$ является чебышевской на $[0,\ 2\pi)$. Можно показать, что многочлен степени $n$ (он составлен по первым $N = 2n+1$ функциям тригонометрической системы) на $[0,\ 2\pi)$ имеет не более $2n = N-1$ корней.

3) *Экспоненциальная* система: $e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}$, где $\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$, – попарно различные числа, $x \in R$, является чебышевской на $R$.

## 1.1.2. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система функций была чебышевской

**Теорема 1.1.** *Для того чтобы система* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ *непрерывных на отрезке* $[a,\ b]$ *функций была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы определитель* $\left|\varphi_1(x_j)\ \ldots\ \varphi_N(x_j)\right|_{j=1}^{N}$ *был отличен от нуля для любых попарно различных точек* $x_1,\ \ldots,\ x_N$ *из* $[a,\ b]$.

*Доказательство.* Пусть существует набор попарно различных точек $x_1,\ \ldots,\ x_N \in [a,\ b]$ такой, что $\left|\varphi_1(x_j)\ \varphi_2(x_j) \ldots \varphi_N(x_j)\right|_{j=1}^{N} = 0$. Это означает, что столбцы определителя связаны линейной зависимостью

$$a_1\left[\varphi_1(x_j)\right]_{j=1}^{N} + a_2\left[\varphi_2(x_j)\right]_{j=1}^{N} + \ldots + a_N\left[\varphi_N(x_j)\right]_{j=1}^{N} = [0]_{j=1}^{N}, \qquad (1.1)$$

где среди $a_i$, $i=\overline{1,N}$, есть ненулевые.

Векторное равенство (1.1) равносильно системе скалярных равенств

$$\begin{cases} a_1\varphi_1(x_1) + \ldots + a_N\varphi_N(x_1) = 0, \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_1\varphi_1(x_N) + \ldots + a_N\varphi_N(x_N) = 0, \end{cases}$$

означающей, что обобщенный многочлен $\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$ (ненулевой, так как среди $a_k$ есть ненулевые) имеет $N$ попарно различных корней $x_1,\ \ldots,\ x_N$ на $[a,\ b]$, что противоречит определению чебышевской системы. ☒

# 1.2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

## 1.2.1. Постановка задачи. Достаточное условие существования и единственности интерполяционного обобщенного многочлена

Пусть $F$ – линейное пространство вещественных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Функцию $f \in F$ будем приближать обобщенными многочленами – функциями из базиса пространства $F$.

На отрезке $[a, b]$ выберем $N$ попарно различных точек $x_1, \ldots, x_N$ и потребуем, чтобы разность $f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)$ между приближаемой функцией $f$ и обобщенным многочленом с неопределенными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) \tag{1.2}$$

была равна нулю в этих точках. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_N$:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x_j) = f(x_j), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{1.3}$$

Матрица этой системы $\left[\varphi_1(x_j) \ldots \varphi_N(x_j)\right]_{j=1}^{N}$ является неособенной при любом выборе $N$ попарно различных на $[a, b]$ точек $x_1, \ldots, x_N$, если система $\left\{\varphi_k(x)\right\}_{k=1}^{N}$ является чебышевской. Система (1.3) имеет единственное решение. Многочлен (1.2), коэффициенты которого определяются из (1.3), называется *обобщенным интерполяционным многочленом* функции $f(x)$. Он и принимается в качестве приближающего многочлена к функции $f(x)$. Попарно различные точки $x_1, \ldots, x_N$ на отрезке $[a, b]$ называются *узлами интерполирования*, а указанный способ приближения функций – *интерполированием* [6].

**Теорема 1.2.** *Если система функций $\left\{\varphi_k(x)\right\}_{k=1}^{N}$ является чебышевской на отрезке $[a, b]$, то для любой конечной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и при любом выборе $N$ узлов интерполирования на $[a, b]$ обобщенный интерполяционный многочлен существует и является единственным.*

В частности, существует единственный алгебраический интерполяционный многочлен, так как система $\left\{x^{k-1}\right\}_{k=1}^{N}$ является чебышевской на любом отрезке $[a,\, b]$.

### 1.2.2. Представление обобщенного интерполяционного многочлена с помощью определителей

Пусть

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) \; - \tag{1.4}$$

обобщенный интерполяционный многочлен из теоремы 1.2, где $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_N$ определяются как решение системы (1.3). К уравнениям (1.3) подсоединим равенство (1.4):

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\left(x_j\right)-f\left(x_j\right)=0, \qquad j=\overline{1,N}, \\ \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)-\psi(x)=0. \end{cases}$$

Это линейная алгебраическая система из $(N+1)$ уравнения относительно $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_N$, –1. Так как эта система имеет решение и оно ненулевое, то ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_N(x_1) & f(x_1) \\ . & . & . & . \\ \varphi_1(x_N) & \ldots & \varphi_N(x_N) & f(x_N) \\ \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_N(x) & \psi(x) \end{vmatrix}=0.$$

Представим последний столбец этого определителя в виде суммы двух столбцов

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ \psi(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(x) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix}$$

и разложим исходный определитель на сумму двух определителей:

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_N(x_1) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_N(x_N) & 0 \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_N(x) & \psi(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_N(x_1) & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_N(x_N) & f(x_N) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_N(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как первый определитель в правой части полученного равенства равен $\psi(x)\Phi_N$, где $\Phi_N = \left|\varphi_1(x_j)\ \dots\ \varphi_N(x_j)\right|_{j=1}^{N}$, то

$$\psi(x) = -\frac{1}{\Phi_N} \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_N(x_1) & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_N(x_N) & f(x_N) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_N(x) & 0 \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Формула (1.5) и есть требуемое представление обобщенного интерполяционного многочлена функции $f(x)$ с помощью определителей.

Таким образом, при условии теоремы 1.2 в пространстве $F$ определен оператор $A$, который всякой конечной функции $f \in F$ ставит в соответствие интерполяционный многочлен $\psi$, построенный по узлам $x_1,\ \dots,\ x_N$, которые считаются фиксированными: $f \xrightarrow{A} \psi$ или $Af = \psi$. Учитывая равенство (1.5), получаем

$$Af = -\frac{1}{\Phi_N} \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_N(x_1) & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_N(x_N) & f(x_N) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_N(x) & 0 \end{vmatrix},$$

откуда следует, что оператор $A$ является линейным.

## 1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

### 1.3.1. Алгебраическое интерполирование как частный случай интерполирования обобщенными многочленами

Рассмотрим частный случай интерполирования обобщенными многочленами, когда система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ представляет собой систему степеней $x$: $\{x^{k-1}\}_{k=1}^{N}$. Обобщенный многочлен, построенный по первым

$N = n + 1$ функциям этой системы, является алгебраическим многочленом степени $n$:

$$P(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Векторное пространство всех многочленов степени не выше $n$ обозначим $\mathrm{P}_n$.

Пусть имеется функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,\ b]$, и требуется построить ее интерполяционный многочлен $P(x) \in \mathrm{P}_n$. Выберем $(n+1)$ попарно различных точек на отрезке $[a,\ b]$: $x_0,\ \ldots,\ x_n$ – узлов интерполирования и потребуем, чтобы $P(x_j) = f(x_j),\ j = \overline{0,n}$. Геометрически эти условия означают (рис. 2), что график многочлена $y = P(x)$ должен проходить через точки $(x_j, f(x_j)),\ j = \overline{0,n}$.

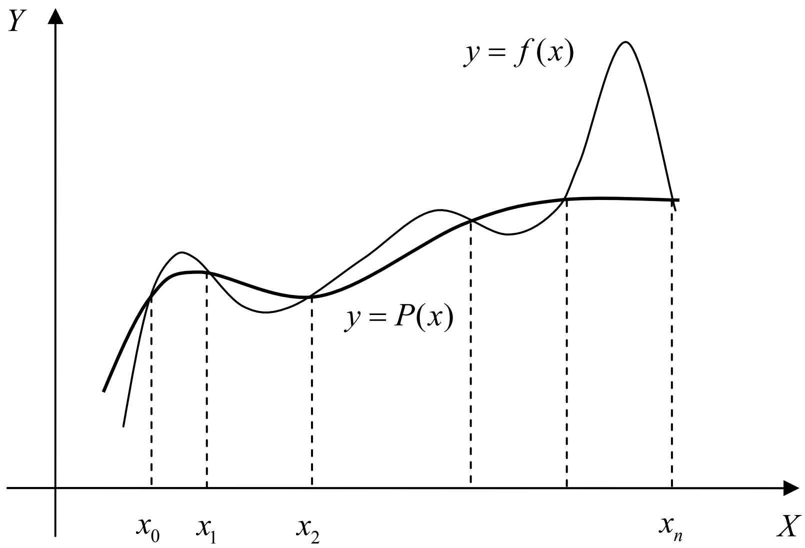



*Рис. 2*

По теореме 1.2 такой многочлен $P(x)$ существует и единственный, так как система $\{x^k\}_{k=0}^{n}$ – чебышевская на любом отрезке $[a,\ b]$.

Это утверждение можно доказать и непосредственно: система равенств $P(x_j) = f(x_j)$ равносильна системе

$$a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_n x_j^n = f(x_j),\ j = \overline{0,n}.$$

Матрица этой линейной алгебраической системы относительно неизвестных коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ является матрицей Вандермонда $V_n = \left[1\ x_j\ \ldots\ x_j^n\right]_{j=0}^{n}$, определитель $\det V_n$ которой отличен от нуля, так как точки $x_0, \ldots, x_n$ попарно различны. Следовательно, интерполяционный обобщенный многочлен $P(x)$ для функции $f(x)$ существует и единственный.

Формула (1.5) применительно к рассматриваемому случаю перепишется как

$$P(x) = -\frac{1}{\det V_n}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n & f(x_n) \\ 1 & x & \ldots & x^n & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученное равенство – представление интерполяционного многочлена с помощью определителей в случае алгебраической системы функций.

### 1.3.2. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Инвариантность относительно алгебраических многочленов соответствующей степени

Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа во многих случаях оказывается более удобным, чем, например, представление с помощью определителей. Введем обозначение

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Заметим, что

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, \ x_k = x_j; \\ 0, \ x_k \neq x_j, \end{cases}$$

т. е. $l_k(x_j) = \delta_{kj}$, $j = \overline{0, n}$, где $\delta_{kj}$ – символ Кронекера. Кроме того, $l_k(x)$ – многочлен степени $n$. Тогда многочлен $P(x) \in \mathrm{P}_n$ – интерполяционный алгебраический многочлен для функции $f(x)$, удовлетворяющий условию $P(x_j) = f(x_j)$, $j = \overline{0, n}$, легко представить в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k). \qquad (1.6)$$

Действительно, многочлен $P(x)$ как линейная комбинация с постоянными коэффициентами многочленов $l_k(x)$ степени $n$ является многочленом степени не выше $n$, т. е. $P(x) \in \mathrm{P}_n$. Далее, при $x = x_j$ получаем $P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x_j) f(x_k) = f(x_j)$, $j = \overline{0,n}$. Многочлен (1.6) называется *интерполяционным многочленом в форме Лагранжа* для функции $f(x)$, а коэффициенты $l_k(x)$, $k = \overline{0,n}$, – *фундаментальными многочленами интерполирования*.

***Пример 1.1.*** Пусть $n = 2$, а функция $f(x)$ задана таблично.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | –5 |
| 1 | 1 | 6 |
| 2 | 2 | 19 |

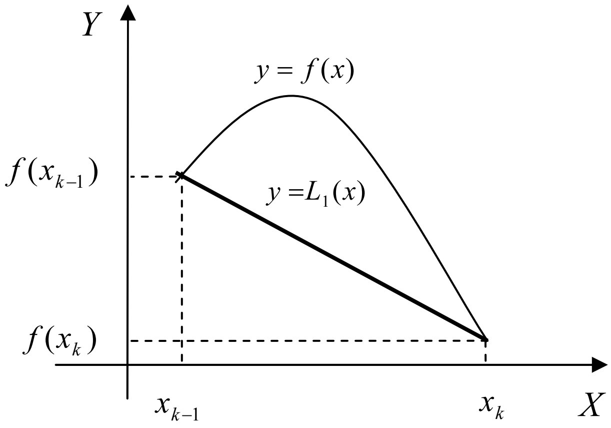
Построим интерполяционный многочлен $P(x) \approx f(x)$ в форме Лагранжа, используя формулу (1.6):

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}(-5) + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}6 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}19 = x^2 + 10x - 5.$$

Заметим, что полученный алгебраический многочлен имеет степень $n = 2$ и удовлетворяет интерполяционным условиям $P(x_j) = f(x_j)$, $j = \overline{0,2}$.

*Свойство инвариантности*. Пусть интерполируемая функция $f$ сама является многочленом степени не выше $n$, т. е. $f \in \mathrm{P}_n$. Тогда в силу единственности интерполяционного многочлена $P(x)$ вида (1.6) эта функция тождественно совпадает с ним: $f(x) \equiv P(x)$, и мы получаем $f(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$.

*Замечание 1.1.* В практических расчетах при больших $n$ часто вместо построения интерполяционного многочлена (1.6) функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным многочленом Лагранжа $L_1(x)$ первой степени по узлам $x_{k-1}$, $x_k$ на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ (рис. 3), или интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$ второй степени по узлам $x_{k-1}$, $x_k$, $x_{k+1}$ на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, $k = 1, 3, 5, \ldots, n-1$.



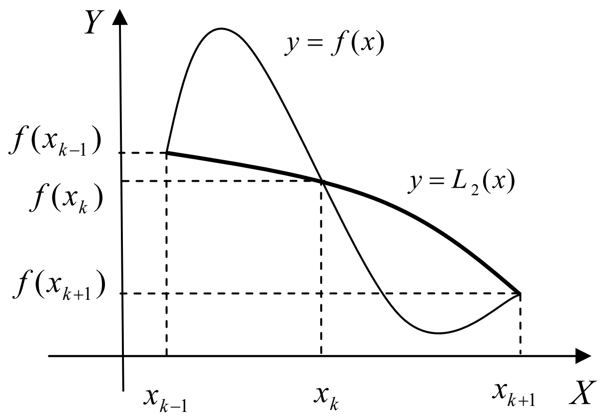




*Рис. 3*

В первом случае (*кусочно-линейная интерполяция*) полагают

$$f(x) \approx \frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k} f(x_{k-1}) + \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} f(x_k), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \ k=\overline{1,n},$$

во втором случае (*кусочно-квадратичная интерполяция*)

$$f(x) \approx \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} f(x_{k-1}) + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} f(x_k) +$$

$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} f(x_{k+1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_{k+1}], \ k=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1,$$

причем $x_{k-1}$, $x_k$, $x_{k+1}$ – узлы, ближайшие к точке $x$.

## 1.4. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

### 1.4.1. Определение, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени

Пусть $f(x)$ – конечная, вещественная функция, определенная на отрезке $[a, b]$, задана таблицей своих значений $f(x_i)=f_i$ в равноотстоящих точках $x_i = x_0 + ih$, $i=\overline{0,n}$, $h>0$.

*Определение 1.3. Конечной разностью* $k$-го порядка функции $f(x)$ называется функция $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$, где $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $k=\overline{1,n}$.

Составим таблицу конечных разностей, связанную с заданной таблицей значений аргументов и функции, которую принято записывать следующим образом.

| $x_i$ | $f(x_i)=f_i$ | $\Delta f(x_i)=\Delta f_i$ | $\Delta^2 f(x_i)=\Delta^2 f_i$ | … | $\Delta^n f(x_i)=\Delta^n f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | | |
| | | $\Delta f_0=f_1-f_0$ | | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | | |
| | | $\Delta f_1=f_2-f_1$ | | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | … | $\Delta^n f_0$ |
| $x_{n-2}$ | $f_{n-2}$ | | | | |
| | | $\Delta f_{n-2}=f_{n-1}-f_{n-2}$ | | | |
| $x_{n-1}$ | $f_{n-1}$ | | $\Delta^2 f_{n-2}$ | | |
| | | $\Delta f_{n-1}=f_n-f_{n-1}$ | | | |
| $x_n$ | $f_n$ | | | | |

Конечные разности для функций, заданных в виде таблицы с равноотстоящими узлами, играют роль, подобную той, что играют производные с непрерывно изменяющимися аргументами. Приводимые ниже свойства конечных разностей аналогичны соответствующим свойствам производных.

1. *Свойство линейности*. Операция взятия конечной разности линейна, т. е. если $\alpha$, $\beta$ – постоянные, $f$, $g$ – конечные на $R$ функции, то

$$\Delta^n\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha\Delta^n f(x)+\beta\Delta^n g(x). \qquad (1.7)$$

*Доказательство.* При $n=1$ равенство (1.7) справедливо:

$$\Delta\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)-\alpha f(x)-\beta g(x)=$$
$$=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x).$$

Пусть верно $\Delta^{k-1}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha\Delta^{k-1}f(x)+\beta\Delta^{k-1}g(x)$ при $n=k-1$.

По определению конечная разность порядка $k$ выражается через конечные разности порядка $k-1$ как

$$\Delta^k\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\Delta^{k-1}\left(\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)\right)-\Delta^{k-1}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right).$$

Применяя индукционное предположение, получаем требуемое. ☒

2. *Свойство равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени*. Конечная разность $k$-го порядка от многочлена степени $k$ является постоянной величиной, и, следовательно, все конечные разности более высокого порядка равны нулю.

*Доказательство.* Покажем, что конечная разность первого порядка от одночлена $x^k$ является многочленом степени $k-1$. Действительно, $\Delta\left(x^k\right)=\left(x+h\right)^k-x^k=C_k^1x^{k-1}h+C_k^2x^{k-2}h^2+\ldots+h^k$, где $C_n^k=\dfrac{n!}{\left(n-k\right)!k!}$. В силу свойства линейности конечная разность первого порядка переведет многочлен степени $k$ в многочлен степени $k-1$, т. е. конечная разность первого порядка понижает степень многочлена на 1. Это утверждение доказывает свойство 2. ☒

## 1.4.2. Представление конечной разности произвольного порядка через значения функции

Конечная разность первого порядка выражается через значения заданной функции по определению: $\Delta f\left(x\right)=f\left(x+h\right)-f\left(x\right)$. Получим выражение конечной разности второго порядка через значения функции: $\Delta^2 f\left(x\right)=\Delta f\left(x+h\right)-\Delta f\left(x\right)=f\left(x+2h\right)-2f\left(x+h\right)+f\left(x\right)$.

Утверждение 1.1. *Для конечной разности порядка $n$ справедливо представление*

$$\Delta^n f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_n^k f\left(x+\left(n-k\right)h\right). \tag{1.8}$$

*Доказательство.* Действительно, при $n=1$ получаем

$$\Delta f\left(x\right)=\left(-1\right)^0 C_1^0 f\left(x+h\right)+\left(-1\right)^1 C_1^1 f\left(x\right)=f\left(x+h\right)-f\left(x\right).$$

Пусть верно $\Delta^{n-1}f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{n-1}^k f\left(x+\left(n-1-k\right)h\right)$. Тогда $\Delta^n f\left(x\right)=$

$$=\Delta^{n-1} f\left(x+h\right)-\Delta^{n-1}f\left(x\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{n-1}^k f\left(x+\left(n-k\right)h\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{n-1}^k f\left(x+\left(n-1-k\right)h\right).$$

Коэффициент при $f\left(x\right)$ в правой части полученного выражения можно преобразовать к виду $-\left(-1\right)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}=\left(-1\right)^n C_n^n$. Коэффициент при $f\left(x+nh\right)$ перепишем как $\left(-1\right)^0 C_{n-1}^0=\left(-1\right)^0 C_n^0$. Наконец, коэффициент при $f\left(x+\left(n-k\right)h\right)$ равен

$$\left(-1\right)^k C_{n-1}^k-\left(-1\right)^{k-1} C_{n-1}^{k-1}=\left(-1\right)^k C_n^k\left[\frac{n-k}{n}+\frac{k}{n}\right]=\left(-1\right)^k C_n^k, \qquad k=\overline{0,n-1}.$$

Таким образом, приходим к равенству (1.8). ☒

### 1.4.3. Представление значения функции через значения последовательных конечных разностей

Рассмотрим формулу, которая дает представление значения функции $f$ в точке $x+nh$ через значения последовательных конечных разностей $\Delta^k f(x)$ от нулевого до $n$-го порядка включительно.

Утверждение 1.2. *Значение функции $f$ в точке $x+nh$ представимо в виде*

$$f(x+nh)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x).$$

*Доказательство.* В случае $n=1$ получаем $f(x+h)=f(x)+\Delta f(x)$, что действительно верно. Пусть утверждение справедливо для $n=i-1$: $f\big(x+(i-1)h\big)=\sum\limits_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \Delta^k f(x)$. Тогда при $n=i$ имеем

$$f(x+ih)=f\big(x+(i-1)h+h\big)=f\big(x+(i-1)h\big)+\Delta f\big(x+(i-1)h\big)=$$
$$=\sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \Delta^k f(x)+\Delta\left(\sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \Delta^k f(x)\right)=$$
$$=f(x)+\sum_{k=1}^{i-1} C_i^k \left[\frac{i-k}{i}+\frac{k}{i}\right]\Delta^k f(x)+\Delta^i f(x)=\sum_{k=0}^{i} C_i^k \Delta^k f(x),$$

что и требовалось доказать. ☒

## 1.5. РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

### 1.5.1. Определения, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени

Часто приходится иметь дело с функциями, значения которых известны для неравноотстоящих значений аргумента. Конечные разности при этом использовать нельзя, и в этом случае применяются так называемые разделенные разности или разностные отношения.

Пусть задана таблица значений функции $f:[a,\, b]\to R$, где $[a,\, b]\subseteq R$, $f$ – конечная функция для различных значений $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ – аргументов из отрезка $[a,\, b]$. Эти значения не предполагаются равноотстоящими, они не обязаны также монотонно убывать или возрастать с увеличением индекса.

*Определение 1.4. Разделенной разностью* (*разностным отношением*) *первого порядка* функции $f$ относительно узлов $x_k$, $x_{k+1}$ называется число $f\left(x_k,\, x_{k+1}\right)=\dfrac{f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)}{x_{k+1}-x_k}$.

Геометрически разностные отношения первого порядка представляют собой угловые коэффициенты хорд графика функции $y=f(x)$, проходящих через точки $\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)$ и $\left(x_{k+1}, f\left(x_{k+1}\right)\right)$.

По разностным отношениям первого порядка определяются разностные отношения второго порядка.

*Определение 1.5. Разделенной разностью второго порядка* функции $f$ относительно узлов $x_k$, $x_{k+1}$, $x_{k+2}$ называется число

$$f\left(x_k,\, x_{k+1},\, x_{k+2}\right)=\frac{f\left(x_{k+1},\, x_{k+2}\right)-f\left(x_k,\, x_{k+1}\right)}{x_{k+2}-x_k}.$$

По аналогии определяются разделенные разности $n$-го порядка через разделенные разности $(n-1)$-го порядка.

*Определение 1.6. Разделенной разностью $n$-го порядка* функции $f$ относительно узлов $x_0$, $x_1$, …, $x_n$ называется число

$$f\left(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\right)=\frac{f\left(x_1,\, \ldots,\, x_n\right)-f\left(x_0,\, \ldots,\, x_{n-1}\right)}{x_n-x_0}.$$

Таблица разделенных разностей имеет тот же вид, что и таблица конечных разностей.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f(x_k,\, x_{k+1})$ | $f(x_k,\, x_{k+1},\, x_{k+2})$ | … | $f(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | | |
| | | $f(x_0,\, x_1)=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$ | | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $f(x_0,\, x_1,\, x_2)$ | | |
| | | $f(x_1,\, x_2)$ | | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | … | $f(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$ |
| $x_{n-1}$ | $f_{n-1}$ | | $f(x_{n-2},\, x_{n-1},\, x_n)$ | | |
| | | $f(x_{n-1},\, x_n)$ | | | |
| $x_n$ | $f_n$ | | | | |

Отметим основные свойства разделенных разностей.

1) *Свойство линейности*. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – фиксированные точки из отрезка $[a, b]$, а $f, g$ – вещественные функции, заданные на $[a, b]$, для которых существуют разделенные разности порядка $n$. Тогда если $\alpha, \beta \in R$, то

$$(\alpha f + \beta g)(x_0, \ldots, x_n) = \alpha f(x_0, \ldots, x_n) + \beta g(x_0, \ldots, x_n).$$

*Доказательство*. При $n = 1$ имеем

$$(\alpha f + \beta g)(x_0, x_1) = \frac{(\alpha f + \beta g)(x_1) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{\alpha f(x_1) - \alpha f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\beta g(x_1) - \beta g(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1) + \beta g(x_0, x_1).$$

Пусть равенство верно в случае разделенных разностей порядка $n-1$, т. е.

$$(\alpha f + \beta g)(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \alpha f(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \beta g(x_0, \ldots, x_{n-1}),$$
$$(\alpha f + \beta g)(x_1, \ldots, x_n) = \alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда для разностных отношений $n$-го порядка получим

$$(\alpha f + \beta g)(x_0, \ldots, x_n) = \frac{(\alpha f + \beta g)(x_1, \ldots, x_n) - (\alpha f + \beta g)(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} =$$
$$= \alpha f(x_0, \ldots, x_n) + \beta g(x_0, \ldots, x_n). \ \boxtimes$$

2) *Свойство равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени*. Разделенная разность $n$-го порядка для многочлена степени $n$ является постоянной величиной и, следовательно, разностные отношения более высокого порядка равны нулю.

*Доказательство*. Покажем, что разделенная разность первого порядка $f(x_0, x_1)$ от одночлена $x^n$ является многочленом степени $n-1$ от аргументов $x_0, x_1$. Действительно,

$$f(x_0, x_1) = \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1},$$

т. е. разделенная разность первого порядка от одночлена $x^n$ переходит в многочлен степени $n-1$ относительно каждого своего аргумента. Из полученного равенства ввиду свойства линейности следует, что разделенная разность первого порядка от многочлена степени $n$ является многочленом степени $n-1$ относительно соответствующих аргументов. По определению разделенная разность второго порядка есть разделенная разность первого порядка относительно разделенной разности первого порядка. Следовательно, она понизит степень многочлена еще на единицу и т. д. Разделенная разность $n$-го порядка понизит степень многочлена на $n$, и его степень станет равной нулю. Таким образом, разделенная разность $n$-го порядка переведет многочлен степени $n$ в многочлен нулевой степени, т. е. константу. Поскольку разделенные разности более высокого порядка определяются через разделенные разности $n$-го порядка, то они обращаются в нуль. ☒

### 1.5.2. Представление разделенных разностей произвольного порядка через значения функции. Свойство симметрии

Для разделенной разности первого порядка верна формула

$$f(x_0,\, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

В случае разделенной разности второго порядка имеем

$$f(x_0,\, x_1,\, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}\left[f(x_1,\, x_2) - f(x_0,\, x_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\right] = \sum_{k=0}^{2} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\ne k}^{2} (x_k - x_i)}.$$

Утверждение 1.3. *Для разделенной разности порядка $n$ справедливо представление*

$$f(x_0,\, \ldots,\, x_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\ne k}^{n} (x_k - x_i)}. \tag{1.9}$$

*Доказательство.* Пусть равенство (1.9) верно для разделенной разности порядка $n-1$, т. е.

$$f(x_0,\, \ldots,\, x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\ne k}^{n-1} (x_k - x_i)}.$$

Тогда по определению разделенной разности $n$-го порядка имеем

$$f(x_0,\, \ldots,\, x_n) = \frac{f(x_1,\, \ldots,\, x_n) - f(x_0,\, \ldots,\, x_{n-1})}{x_n - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n-1}(x_k - x_i)}\right] =$$

$$= \frac{f(x_0)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)} + \frac{f(x_n)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)} + \frac{1}{x_n - x_0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)\left[(x_k - x_0) - (x_k - x_n)\right]}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)}. \boxtimes$$

*Свойство симметрии.* Разделенная разность является симметрической функцией своих аргументов, иначе говоря, она не изменяется при любой перестановке аргументов.

## 1.5.3. Представление значения функции через значения последовательных разделенных разностей. Следствие

Рассмотрим формулу

$$f(x_k) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x_k - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_k)(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}),$$

которая дает представление значения функции $f$ в точке $x_k$ через значения последовательных разделенных разностей от нулевого до порядка $k$ включительно.

При $k = 1$ эта формула следует из определения $f(x_1) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x_1 - x_0)$. Пусть данное равенство верно при $k = n - 1$. Докажем его справедливость при $k = n$. По индуктивному предположению

$$f(x_{n-1}) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x_{n-1} - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

По определению разделенных разностей

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}). \qquad (1.10)$$

Подставив в правую часть требуемого равенства выражение (1.10), получим

$$f(x_0)+f(x_0,\,x_1)(x_n-x_0)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_{n-2},\,x_n)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-2})=f(x_n).$$

*Следствие.* Многочлен степени не выше $n$:

$$P(x)=f(x_0)+f(x_0,\,x_1)(x-x_0)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_0,\,\ldots,\,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (1.11)$$

при $x=x_k$ равен $f(x_k)$: $P(x_k)=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$.

## 1.5.4. Представление разделенной разности через производную функции соответствующего порядка

Связь между разностными отношениями и производными соответствующего порядка дается следующей теоремой.

**Теорема 1.3.** *Если функция $f(x)$ имеет конечную производную порядка $n$ на наименьшем отрезке $[a,\,b]$, содержащем различные точки $x_0,\,\ldots,\,x_n$, то внутри этого отрезка существует такая точка $\xi$, что*

$$f(x_0,\,\ldots,\,x_n)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

*Доказательство.* Введем функцию $\varphi(x)=f(x)-P(x)$, где $P(x)$ – многочлен вида (1.11).

Функция $\varphi(x)$ дифференцируема $n$ раз на $[a,\,b]$ и обращается в нуль в $(n+1)$ точках $x_0,\,\ldots,\,x_n\in[a,\,b]$. По теореме Ролля производная этой функции $\varphi'(x)$ имеет по меньшей мере $n$ различных корней внутри отрезка $[a,\,b]$. По теореме Ролля в применении к функции $\varphi'(x)$ вторая производная $\varphi''(x)$ имеет по крайней мере $(n-1)$ различных корней внутри отрезка $[a,\,b]$. Продолжая таким же образом, получим, что $\varphi^{(n)}(x)$ имеет по крайней мере один корень внутри отрезка $[a,\,b]$. Обозначим его через $\xi$, $\xi\in(a,\,b)$. В формулу $\varphi^{(n)}(x)=$ $=f^{(n)}(x)-n!f(x_0,\,\ldots,\,x_n)$ для производной порядка $n$ функции $\varphi(x)$ подставим $x=\xi$. Так как $\varphi^{(n)}(\xi)=0$, то $f(x_0,\,\ldots,\,x_n)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, $\xi\in(a,\,b)$. ☒

## 1.5.5. Связь между разделенными и конечными разностями для равноотстоящих аргументов. Выражение конечной разности через производную функции

Пусть аргументы $x_i$, $i=\overline{0,n}$, функции $f$ являются равноотстоящими: $x_i = x_i + ih$, $h>0$. По определению для разделенной разности первого порядка имеем $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{h}$. В случае разделенной разности второго порядка получим

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2-x_0}\left[f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)\right] =$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta f(x_1)}{h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}.$$

Утверждение 1.4. *Для любого числа равноотстоящих на отрезке* $[a, b]$ *узлов* $x_i = x_i + ih$, $i=\overline{0,n}$, где $h>0$, *справедливо тождество*

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}. \tag{1.12}$$

*Доказательство.* Пусть равенство (1.12) справедливо в случае разделенной разности порядка $(n-1)$: $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \dfrac{\Delta^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!h^{n-1}}$. По определению разделенной разности $n$-го порядка получим

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} =$$
$$= \frac{1}{nh}\left[\frac{\Delta^{n-1} f(x_1)}{(n-1)!h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!h^{n-1}}\right] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}. \boxtimes$$

*Следствие.* Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную порядка $n$ на отрезке $[x_0, x_0+nh]$, тогда внутри этого отрезка существует такая точка $\xi$, что $\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi)$.

# 1.6. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

## 1.6.1. Определение, построение, свойство инвариантности относительно многочленов соответствующей степени

Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

имеющий степень не выше $n$ и удовлетворяющий условиям $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$, называется *интерполяционным многочленом в форме Ньютона* по чебышевской системе функций $\{x^i\}_{i=0}^{n}$ и в силу единственности совпадает с интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

*Преимущество интерполяционной формулы Ньютона.* Пусть по узлам $x_0, \ldots, x_n$ построен многочлен $P_n(x)$ для интерполирования функции $f(x)$ и дает недостаточно хорошее приближение. Тогда возникает необходимость в добавлении нового узла $x_{n+1}$ и построении многочлена $P_{n+1}(x)$. При этом как в формуле Лагранжа, так и в формуле Ньютона добавляется одно слагаемое. Однако все прежние слагаемые в формуле Ньютона остаются без изменения, тогда как в формуле Лагранжа все слагаемые изменяются.

*Преимущество интерполяционной формулы Лагранжа.* Когда по одной системе узлов необходимо интерполировать несколько функций, более удобна формула Лагранжа.

***Пример 1.2.*** Пусть $n = 2$, а функция $f(x)$ задана таблично.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | –5 |
| 1 | 1 | 6 |
| 2 | 2 | 19 |

Построим таблицу разделенных разностей заданной функции.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f(x_k, x_{k+1})$ | $f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | –5 | | |
| 1 | 1 | 6 | $f(x_0, x_1) = 11$ | |
| 2 | 2 | 19 | $f(x_1, x_2) = 13$ | $f(x_0, x_1, x_2) = 1$ |

Используя разностные отношения, расположенные в верхней косой строке таблицы, запишем интерполяционный многочлен $P(x) \approx f(x)$ в форме Ньютона:

$$P(x) = -5 + 11(x-0) + (x-0)(x-1) = x^2 + 10x - 5.$$

Заметим, что полученный алгебраический многочлен имеет степень $n = 2$ и удовлетворяет интерполяционным условиям $P\left(x_j\right) = f\left(x_j\right)$, $j = \overline{0,2}$.

*Свойство инвариантности.* Если интерполируемая функция $f\left(x\right)$ является многочленом степени не выше $n$, то в силу единственности интерполяционного многочлена она совпадает с ним, и мы получаем

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f\left(x_0,\, x_1\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0,\, x_1,\, x_2\right)\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) + \ldots$$
$$\ldots + f\left(x_0,\, \ldots,\, x_n\right)\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right).$$

Построение формулы Ньютона связано с построением таблицы разделенных разностей. В формулу входят разностные отношения, расположенные в верхней косой строке таблицы.

# 1.7. МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

## 1.7.1. Определение

*Многочлены Чебышева* определяются равенствами

$$T_n\left(x\right) = \cos\left[n \cdot \arccos x\right], \quad |x| \le 1, \quad n \ge 0.$$

Из определения ясно, что $T_0\left(x\right) = 1$, $T_1\left(x\right) = x$. Чтобы убедиться в том, что $T_n\left(x\right)$ – алгебраический многочлен при $n \ge 2$, получим рекуррентное соотношение, которое связывает три последовательных многочлена Чебышева. Подставим $Q = \arccos x$ в тождество

$$\cos kQ + \cos\left(k-2\right)Q = 2\cos Q \cos\left(k-1\right)Q.$$

Получим $T_k\left(x\right) = 2xT_{k-1}\left(x\right) - T_{k-2}\left(x\right)$, $k \ge 2$. С помощью этого соотношения последовательно находим

$$T_2\left(x\right) = 2x^2 - 1,\ T_3\left(x\right) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4\left(x\right) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ T_5\left(x\right) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

и т. д.

Таким образом, $T_n\left(x\right)$ – многочлен степени $n$, содержащий одночлены $x^k$ одинаковой с $n$ четности. Коэффициент при $x^n$ у многочлена

$T_n(x)$ равен $2^{n-1}$, т. е. $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ . Из определения $T_n(x)$, $n \geq 0$, следуют равенства $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$, а также неравенства $|T_n(x)| \leq 1$, $x \in [-1, 1]$, $n \geq 0$.

## 1.7.2. Корни многочлена Чебышева

Определение многочлена Чебышева позволяет указать корни многочлена $T_n(x)$, $n \geq 0$. Если $x_k$ – корень $T_n(x)$, то аргумент косинуса $(n \cdot \arccos x)$ должен удовлетворять равенству $n \cdot \arccos x_k = \dfrac{2k-1}{2}\pi$, откуда

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.13}$$

Геометрическую интерпретацию корней рассмотрим на примере $T_4(x)$.

Для этого на полуокружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geq 0 \end{cases}$ выберем $2n + 1 = 9$ равноотстоящих точек, включая $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Пронумеруем точки на полуокружности натуральными числами, начиная с точки $(1, 0)$, в порядке возрастания против часовой стрелки (рис. 4).

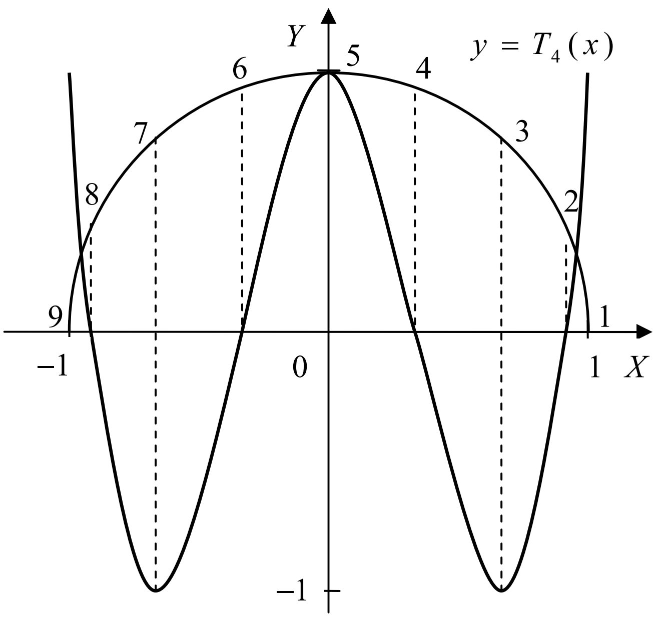



*Рис. 4*

Проекции точек с четными номерами на ось $X$ совпадают с корнями (1.13). Все они лежат внутри отрезка $\left[-1,\ 1\right]$, не являются равноотстоящими и при возрастании $n$ сгущаются к концам интервала $\left(-1,\ 1\right)$.

## 1.7.3. Точки экстремума многочлена Чебышева

Найдем точки, принадлежащие $\left[-1,\ 1\right]$, в которых $T_n\left(x\right)$ достигает максимума и минимума. Эти точки – корни производной многочлена Чебышева степени $n-1$. Имеем $T_n'\left(x\right)=\dfrac{n\sin\left[n\cdot\arccos x\right]}{\sqrt{1-x^2}}$. Если $\tilde{x}_k$ – корень $T_n'\left(x\right)$, то аргумент синуса $n\cdot\arccos\tilde{x}_k=\pi k$. Следовательно, $\tilde{x}_k=\cos\dfrac{\pi k}{n}$, $k=\overline{1,n-1}$. Точки $\tilde{x}_0=1$ и $\tilde{x}_n=-1$ не являются корнями $T_n'\left(x\right)$, хотя числитель $\sin\left[n\cdot\arccos x\right]$ в них обращается в нуль. Значение многочлена $T_n\left(x\right)$ в подозрительных на экстремум точках $\tilde{x}_k$ найдем с помощью определения многочлена Чебышева и равенства $n\cdot\arccos\tilde{x}_k=\pi k$: $T_n\left(\tilde{x}_k\right)=$ $=\cos\left[n\cdot\arccos\left(\cos\dfrac{\pi k}{n}\right)\right]=\cos\pi k=\left(-1\right)^k$, $k=\overline{1,n-1}$. Из неравенств $\left|T_n\left(x\right)\right|\le$ $\le 1$, $x\in\left[-1,\ 1\right]$, $n\ge 0$, заключаем, что все подозрительные точки являются экстремальными. К этим точкам следует добавить концы отрезка $\left[-1,\ 1\right]$, так как $T_n\left(1\right)=1$, $T_n\left(-1\right)=\left(-1\right)^n$, $n\ge 0$.

Таким образом, на отрезке $\left[-1,\ 1\right]$ получаем $\left(n+1\right)$ точек $\tilde{x}_k=$ $=\cos\dfrac{\pi k}{n}$, $k=\overline{0,n}$, в которых $T_n\left(x\right)$ поочередно принимает максимальные и минимальные значения: $T_n\left(\tilde{x}_k\right)=\left(-1\right)^k$, $k=\overline{0,n}$. Отметим, что проекции точек с нечетными номерами на ось $X$ совпадают с точками $\tilde{x}_k$.

Корни многочлена $T_n\left(x\right)$ – точки $x_k$, $k=\overline{1,n}$, и точки экстремума $\tilde{x}_k$, $k=\overline{0,n}$, упорядочены на отрезке $\left[-1,\ 1\right]$ следующим образом:

$$-1=\tilde{x}_n<x_n<\ldots<\tilde{x}_2<x_2<\tilde{x}_1<x_1<\tilde{x}_0=1.$$

## 1.7.4. Приведенный многочлен Чебышева

Положим $\Pi_n=\left\{x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\mid a_j\in R\right\}$.

Многочлен, у которого коэффициент при $x^n$ равен 1, будем называть *приведенным*. Таким образом, множество $\Pi_n$ – множество приведенных многочленов степени $n$ с вещественными коэффициентами.

Утверждение 1.5. *Приведенный многочлен Чебышева* $\overline{T_n}(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}} = 2^{1-n} T_n(x)$ *имеет в пространстве* $C[-1,\ 1]$ *наименьшую норму среди всех приведенных многочленов степени* $n$, *определенных на отрезке* $[-1,\ 1]$, *т. е.* $\left\| \overline{T_n}(x) \right\|_{C[-1,\ 1]} \le \left\| P_n(x) \right\|_{C[-1,\ 1]}$. *Иными словами, приведенный многочлен Чебышева является наименее уклоняющимся от нуля среди многочленов* $\Pi_n$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$.

*Доказательство.* Предположим обратное. Пусть существует многочлен $P_n(x) \ne \overline{T_n}(x)$ такой, что

$$\left\| P_n(x) \right\|_{C[-1,\ 1]} < \left\| \overline{T_n}(x) \right\|_{C[-1,\ 1]} = \max_{x \in [-1,\ 1]} \left| 2^{1-n} T_n(x) \right| = 2^{1-n}.$$

Тогда в точках экстремума многочлена Чебышева знак разности $\overline{T_n}(x) - P_n(x)$ определяется знаком многочлена $\overline{T_n}(x)$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\left( \overline{T_n}(\tilde{x}_k) - P_n(\tilde{x}_k) \right) = \operatorname{sign}\left( \overline{T_n}(\tilde{x}_k) \right) = \\ &= \operatorname{sign}\left( (-1)^k 2^{1-n} \right) = (-1)^k, \quad k = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

При этом указанная разность является отличным от нуля многочленом степени $n-1$, но имеет $n$ нулей, поскольку $n+1$ раз меняет знак в точках экстремума, т. е. $\overline{T_n}(x) - P_n(x) \equiv 0$. ☒

# 1.8. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА И ЕЕ МИНИМИЗАЦИЯ

## 1.8.1. Представление погрешности интерполирования в форме Лагранжа

Положим $R(f,\ x) = R_n(f,\ x) = f(x) - P_n(x)$, где $P_n(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ степени не выше $n$, построенный по узлам $x_0,\ \ldots,\ x_n$. Функция $R(f,\ x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$, где определена $f(x)$. Она характеризует точность приближения функции

$f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ и называется *погрешностью* или *остаточным членом интерполирования*.

Если функция $f(x) \in \mathrm{P}_n$, то $f(x) \equiv P_n(x)$ и, следовательно, погрешность интерполирования $R(f, x) \equiv 0$. Если же $f(x) \notin \mathrm{P}_n$, то погрешность $R(f, x) = 0$ в узлах $x_0, \ldots, x_n$ и заведомо отлична от нуля на отрезке $[a, b]$.

**Теорема 1.4.** *Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[a, b]$, содержащем узлы $x_0, \ldots, x_n$ и точку интерполирования $y$, где $a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$, $b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$. Тогда существует такая точка $\xi = \xi(y)$, $a < \xi < b$, что справедливо представление*

$$R_n(f, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}\omega_n(y), \tag{1.14}$$

*где* $\omega_n(y) = \prod_{i=0}^{n}(y - x_i)$.

*Доказательство.* Если $y = x_k$, то обе части равенства (1.14) обращаются в нуль, и, следовательно, оно справедливо.

Пусть $y \neq x_k$, $k = \overline{0,n}$. Введем функцию

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(y) - \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(y)}\left[f(y) - P_n(y)\right].$$

Эта функция дифференцируема $(n+1)$ раз на $[a, b]$ и имеет на этом отрезке $(n+2)$ попарно различных корней: $x_0, x_1, \ldots, x_n, y$. По теореме Ролля функция $\varphi'(x)$ имеет по крайней мере $(n+1)$ корень из $(a, b)$. Аналогично $\varphi''(x)$ имеет по меньшей мере $n$ корней из интервала $(a, b)$. Продолжая таким же образом, получим, что $\varphi^{(n+1)}(x)$ имеет на $(a, b)$ по крайней мере один корень. Обозначим его $\xi$. Так как

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega_n(y)}\left[f(y) - P_n(y)\right],$$

то для погрешности интерполирования $R_n(f, y) = f(y) - P_n(y)$ справедливо представление в форме Лагранжа:

$$R_n(f, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(y), \ \ a < \xi < b. \ \boxtimes$$

*Замечание 1.2.* Эту теорему можно доказать иным способом. Пусть $y \in [a,\ b]$, $y \neq x_k$, $k = \overline{0,n}$. Так как

$$f(y) = f(x_0) + (y - x_0) f(x_0,\ x_1) + \ldots + (y - y_0)(y - x_1) \times$$
$$\times (y - x_{n-1}) f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) + \ldots + \omega_n(y) f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y),$$

то, заметив, что сумма первых $(n+1)$ слагаемых в правой части совпадает с интерполяционным многочленом $P_n(y)$ в форме Ньютона, можем записать

$$R_n(f,\ y) = f(y) - P_n(y) = \omega_n(y) f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y) =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(y), \quad a < \xi < b. \ \boxtimes$$

***Пример 1.3.*** С какой точностью можно вычислить $\ln 100{,}5$ по известным значениям $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$, $\ln 104$?

Из формулы представления остатка (1.14) имеем

$$\left| R_4(\ln(x),\ 100{,}5) \right| \leq \frac{\max\limits_{x \in [100,\ 104]} \left| \ln^{(5)}(x) \right| \cdot \left| \omega_4(100{,}5) \right|}{5!} =$$
$$= \frac{24 \cdot 0{,}5^2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}5}{10^{10} \cdot 5!} < 0{,}7 \cdot 10^{-10}.$$

Следовательно, $\left| \ln 100{,}5 - P_4(100{,}5) \right| < 0{,}7 \cdot 10^{-10}$.

### 1.8.2. Минимизация погрешности интерполяционного полинома в точке для функций, заданных таблично

Пусть $f \in MC^{(n+1)}[a,\ b]$ – класс функций $f(x)$, у которых на отрезке $[a,\ b]$ существует непрерывная производная $(n+1)$ порядка, удовлетворяющая неравенству $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M$, $x \in [a,\ b]$. Будем считать, что узлы интерполирования $x_0,\ \ldots,\ x_n$ и точка интерполирования $y$ принадлежат $[a,\ b]$. Тогда для функций $f \in MC^{(n+1)}[a,\ b]$ справедлива оценка погрешности интерполирования

$$\left| R_n(f,\ y) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| \omega_n(y) \right|. \tag{1.15}$$

Рассмотрим функцию $f_0(x)=\dfrac{M}{(n+1)!}\omega_n(x),\ x\in[a,\ b]$. Она является многочленом степени $(n+1)$, а ее производная $f_0^{(n+1)}(x)\equiv M$, следовательно, $f_0\in MC^{(n+1)}[a,\ b]$. Так как интерполяционный многочлен функции $f_0$ тождественно совпадает с нулевым, то

$$\left|R_n(f_0,\ y)\right|=\left|f_0(y)\right|=\frac{M}{(n+1)!}\left|\omega_n(y)\right|. \qquad (1.16)$$

Из (1.15) и (1.16) получаем, что $\sup\limits_f\left|R_n(f,\ y)\right|=\dfrac{M}{(n+1)!}\left|\omega_n(y)\right|$, $f\in MC^{(n+1)}[a,\ b]$. Таким образом, точная верхняя граница погрешности интерполирования функций класса $MC^{(n+1)}[a,\ b]$ в точке $y$ зависит от узлов интерполирования $x_0,\ \ldots,\ x_n$.

Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана таблица значений произвольной функции $f\in MC^{(n+1)}[a,\ b]$ для аргументов $X_1,\ \ldots,\ X_m$, где $m>n+1$, и точка интерполирования $y$ не совпадает ни с одной из этих точек. Поставим задачу: среди аргументов $\{X_i\}_{i=1}^m$ выбрать в качестве узлов интерполирования точки $x_0,\ \ldots,\ x_n$, чтобы в заданной точке $y$ точная верхняя граница $\sup\limits_f\left|R_n(f,\ y)\right|=\dfrac{M}{(n+1)!}\left|\omega_n(y)\right|$ была наименьшей.

Для решения поставленной задачи из множества $\{X_i\}_{i=1}^m$ выберем в качестве узлов те точки, для которых величина $\dfrac{M}{(n+1)!}\left|\omega_n(y)\right|$ или, что то же самое, величина $\left|\omega_n(y)\right|=\prod\limits_{i=0}^{n}\left|y-x_i\right|$ имеет наименьшее значение. Такой выбор произвести легко. В качестве $x_0$ выбираем ту точку из множества $\{X_i\}_{i=1}^m$, для которой модуль разности $\left|y-X_i\right|$, $i=\overline{1,m}$, наименьший. Из оставшихся точек в качестве $x_1$ выбираем ту, для которой модуль $\left|y-X_i\right|$ наименьший, и т. д. Очевидно, что при таком выборе узлов величина $\left|\omega_n(y)\right|$ имеет наименьшее значение.

Рассмотренная задача – *задача о минимизации погрешности интерполирования* для класса функций $MC^{(n+1)}[a,\ b]$ в заданной точке.

### 1.8.3. Минимизация погрешности интерполяционного полинома для функций, заданных на отрезке

Предположим теперь, что функция $f \in MC^{(n+1)}[a, b]$ и задана на отрезке $[a, b]$ всюду, например, аналитически. В этом случае при построении интерполяционного многочлена имеется полная свобода в выборе узлов на $[a, b]$. В качестве меры погрешности интерполирования $R_n(f, x)$ на $[a, b]$ выберем норму $\|R_n(f, \cdot)\|_{C[a,b]}$ – норму в пространстве $C[a, b]$. Из неравенства $|R_n(f, y)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega_n(y)|$, $f \in MC^{(n+1)}[a, b]$, которое выполняется для любых $y \in [a, b]$, имеем $\|R_n(f, \cdot)\|_{C[a, b]} \le$ $\le \frac{M}{(n+1)!}\|\omega_n\|_{C[a, b]}$, $f \in MC^{(n+1)}[a, b]$. В этом неравенстве точная верхняя граница достигается при $f(x) = f_0(x) = \frac{M}{(n+1)!}\omega_n(x)$, поэтому

$$R_n\left(MC^{(n+1)}[a, b]\right) = \sup_{f \in MC^{(n+1)}[a, b]} \|R_n(f, \cdot)\|_{C[a, b]} = \frac{M}{(n+1)!}\|\omega_n\|_{C[a, b]}.$$

Значит, указанная верхняя граница зависит от множителя $\|\omega_n\|_{C[a, b]}$, который представляет собой норму приведенного многочлена степени $(n+1)$ в пространстве $C[a, b]$.

1) Если $[a, b] = [-1, 1]$, то ранее было установлено, что минимальную норму в пространстве $C[-1, 1]$ среди всех приведенных многочленов степени $(n+1)$, определенных на $[-1, 1]$, имеет приведенный многочлен Чебышева $\overline{T}_{n+1}$. Его корни $x_k = \cos\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}$, $k = \overline{0,n}$, если их взять в качестве узлов интерполирования, доставляют наименьшее значение точной верхней границы $R_n\left(MC^{(n+1)}[-1, 1]\right)$. Эти узлы назовем *оптимальными* для класса функций $MC^{(n+1)}[-1, 1]$. Так как $\left\|\overline{T}_{n+1}\right\|_{C[-1, 1]} = 2^{-n}$, то при выборе оптимальных узлов

$$R_n\left(MC^{(n+1)}[-1, 1]\right) = \sup_{f \in MC^{(n+1)}[-1, 1]} \|R_n(f, \cdot)\|_{C[-1, 1]} = \frac{M}{(n+1)!2^n}.$$

***Пример 1.4.*** Построим интерполяционный многочлен Ньютона $P(x) \approx f(x)$ третьей степени на отрезке $[-1,\, 1]$ для $f(x) = \sin x$ по оптимальным узлам.

Так как степень интерполяционного многочлена $n = 3$, то необходимо выбрать четыре оптимальных узла по формуле $x_k = \cos\dfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi$, $k = \overline{0,3}$, и вычислить значения $f(x_k)$:

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{8},\ x_1 = \cos\frac{3\pi}{8},\ x_2 = \cos\frac{5\pi}{8},\ x_3 = \cos\frac{7\pi}{8},$$
$$f(x_0) = \sin\left(\cos\frac{\pi}{8}\right),\ f(x_1) = \sin\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right),$$
$$f(x_2) = \sin\left(\cos\frac{5\pi}{8}\right),\ f(x_3) = \sin\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right).$$

Используя полученную таблицу значений исходной функции в оптимальных узлах, запишем интерполяционный многочлен, например, в форме Ньютона:

$$P(x) = f(x_0) + f(x_0,\, x_1)(x - x_0) + f(x_0,\, x_1,\, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) = -0{,}158505x^3 + 0{,}998983x\,.$$

Заметим, что погрешность интерполирования по выбранным узлам не превышает величины, равной $\dfrac{1}{4!2^3} \approx 0{,}005208$.

2) Укажем оптимальные узлы для класса $MC^{(n+1)}[a,\, b]$ в случае любого отрезка $[a,\, b]$. Для этого сделаем линейную замену переменной $t = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{b+a}{2}$, которая переводит отрезок $[-1,\, 1]$ в отрезок $[a,\, b]$. Искомые оптимальные узлы – точки $t_k = \dfrac{b-a}{2}x_k + \dfrac{b+a}{2}$, где $x_k = \cos\dfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi$, $k = \overline{0,n}$. Найдем верхнюю границу $R_n\left(MC^{(n+1)}[a,\, b]\right)$, которая определяется оптимальными узлами $t_k$. Для этого необходимо вычислить $\|\omega_n\|_{C[a,\, b]}$, где $\omega_n(t)$ – приведенный многочлен степени $(n+1)$ от переменной $t$, корнями которого являются узлы $t_k$. Найдем $t - t_k =$

$=\dfrac{b-a}{2}x+\dfrac{b+a}{2}-\dfrac{b-a}{2}x_k-\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{b-a}{2}\left(x-x_k\right)$. Тогда многочлен $\omega_n\left(t\right)$ можно представить в виде

$$\omega_n\left(t\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(t-t_k\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\left(x-x_k\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\overline{T}_{n+1}\left(x\right).$$

Следовательно, $\left\|\omega_n\right\|_{C[a,\, b]}=\dfrac{\left(b-a\right)^{n+1}}{2^{2n+1}}$, и верхняя граница

$$R_n\left(MC^{(n+1)}\left[a,\, b\right]\right)=\sup_f\left\|R_n\left(f,\ \cdot\right)\right\|_{C[-1,\, 1]}=\frac{M\left(b-a\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!2^{2n+1}},\ f\in MC^{(n+1)}\left[a,\, b\right].$$

Таким образом, для любой функции $f\in MC^{(n+1)}\left[a,\, b\right]$ погрешность интерполирования по оптимальным узлам $t_k$ удовлетворяет неравенству

$$\left|R_n\left(f,\ t\right)\right|\le\frac{M\left(b-a\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!2^{2n+1}},\quad t\in\left[a,\, b\right].$$

## 1.9. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО РАВНООТСТОЯЩИМ УЗЛАМ

### 1.9.1. Формула Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Погрешность интерполирования

Пусть функция $f$ задана таблицей своих значений в точках $x_k=x_0+kh$, $k=\overline{0,n}$, $h>0$, а точка интерполирования $x$ расположена вблизи точки $a=x_0$, т. е. $x\in\left(a,\ a+\dfrac{h}{2}\right]$. Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона

$$P_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f\left(x_0,\, x_1\right)\left(x-x_0\right)+\ldots+f\left(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_n\right)\left(x-x_0\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)$$

и преобразуем ее с помощью равенства $f\left(x_0,\ \ldots,\, x_k\right)=\dfrac{\Delta^k f\left(x_0\right)}{k!h^k}$, $k=\overline{1,n}$. Получим

$$P_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{1!h}\left(x-x_0\right)+\frac{\Delta^2 f\left(x_0\right)}{2!h^2}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Введем новую переменную $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, тогда $x=a+th$, $\dfrac{x-x_k}{h}=t-k$, $k=\overline{0,n}$, и, следовательно,

$$P_n(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{1!}t+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}t(t-1)(t-2)\ldots(t-(n-1)). \qquad (1.17)$$

Формула (1.17) дает представление интерполяционного многочлена Ньютона для интерполирования в начале таблицы. В правую часть этой формулы входят конечные разности, расположенные в верхней косой строке таблицы конечных разностей.

Пусть существует конечная производная функции $f(x)$ порядка $(n+1)$ на отрезке $[a,\ x_n]$, тогда для погрешности интерполирования справедливо представление

$$R_n(f,\ a+th)=R_n(f,\ x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)=$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n),$$

где $\xi\in(a,\ a+nh)$.

## 1.9.2. Формула Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Погрешность интерполирования

Пусть $f$ задана таблицей значений в точках $x_k=x_0-kh$, $k=\overline{0,n}$, $h>0$, а точка интерполирования $x$ расположена в конце таблицы вблизи точки $a=x_0$, т. е. $x\in\left(a-\dfrac{h}{2},\ a\right]$. Формула Ньютона

$$P_n(x)=f(x_0)+f(x_0,\ x_1)(x-x_0)+\ldots+f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

с помощью равенства $f(x_0,\ \ldots,\ x_k)=\dfrac{\Delta^k f(x_k)}{k!h^k}$ преобразуется к виду

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_1)}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f(x_2)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^n f(x_n)}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Введя, как и ранее, переменную $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, получим, что $\dfrac{x-x_k}{h}=$ $=t+k$, и, значит,

$$P_n(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_1)}{1!}t+\frac{\Delta^2 f(x_2)}{2!}t(t+1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^n f(x_n)}{n!}t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1).$$

Полученная формула дает представление интерполяционного многочлена Ньютона для интерполирования в конце таблицы. В правую часть этой формулы входят конечные разности, расположенные в нижней косой строке таблицы конечных разностей.

Пусть существует конечная производная функции $f(x)$ порядка $(n+1)$ на отрезке $[x_n,\ a]$, тогда остаточный член интерполирования представим в виде

$$R_n(f,\ a+th)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t+1)\ldots(t+n),\quad \xi\in(a-nh,\ a).$$

## 1.9.3*. Формула Гаусса для интерполирования в середине таблицы. Погрешность интерполирования

*а*) *Формула Гаусса для интерполирования вперед.* Пусть известны значения функции $f(x)$ в точках $x_k=x_0+kh$, $h>0$, $k=\overline{-p,q}$, где $p,\ q\geq\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ – целой части числа $\dfrac{n+1}{2}$. Пусть, далее, точка интерполирования $x\in\left(x_0,\ x_0+\dfrac{h}{2}\right]$. На основании результата о минимизации погрешности в точке к интерполированию следует привлечь узлы в следующем порядке: $x_0,\ x_1,\ x_{-1},\ x_2,\ x_{-2},\ \ldots,\ x_{(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Запишем интерполяционный многочлен функции $f(x)$, отвечающий этому выбору узлов, в форме Ньютона

$$P_n(f,\ x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(x-x_{(-1)^{k+1}\left[\frac{k+1}{2}\right]}\right)f\left(x_0,\,x_1,\,x_{-1},\,\ldots,\,x_{(-1)^{k+2}\left[\frac{k+2}{2}\right]}\right).$$

Используя равенство $f\left(x_0,\,x_1,\,x_{-1},\,\ldots,\,x_{(-1)^{k+2}\left[\frac{k+2}{2}\right]}\right)=\dfrac{\Delta^{k+1}f\left(x_{-\left[\frac{k+1}{2}\right]}\right)}{(k+1)!h^{k+1}}$ и введя переменную $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, получим, что $\dfrac{x-x_{\pm k}}{h}=t-(\pm k)$ и, следовательно,

$$P_n(f,\,x_0+th)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1}t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(t-(-1)^{k+1}\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)\frac{\Delta^{k+1}f\left(x_{-\left[\frac{k+1}{2}\right]}\right)}{(k+1)!}.$$

Эта формула – формула Гаусса для интерполирования вперед. Ее погрешность имеет вид

$$R_n(f,\,x_0+th)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots\left(t-(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

где точка $\xi$ принадлежит отрезку, концами которого служат минимальный и максимальный из узлов.

*б*) *Формула Гаусса для интерполирования назад*. Названная формула применяется, если точка интерполирования $x\in\left[x_0-\dfrac{h}{2},\,x_0\right)$. Узлы берем в следующем порядке: $x_0,\,x_{-1},\,x_1,\,x_{-2},\,x_2,\,\ldots,\,x_{-(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Соответственно формула Гаусса для интерполирования назад имеет вид

$$P_n(f,\,x_0+th)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1}t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(t+(-1)^{k+1}\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)\frac{\Delta^{k+1}f\left(x_{-\left[\frac{k+2}{2}\right]}\right)}{(k+1)!},$$

а ее погрешность

$$R_n\left(f,\, x_0+th\right)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)\ldots\left(t+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

где точка $\xi$, как и ранее, принадлежит отрезку, концами которого служат минимальный и максимальный из узлов.

*Замечание 1.3.* Полусумма интерполяционных многочленов Гаусса для интерполирования вперед и назад применяется для приближения функции $f(x)$ в точке $x\in\left[x_0-\frac{h}{2},\, x_0+\frac{h}{2}\right]$ и носит название формулы Стирлинга. Погрешность такого интерполирования определяется как полусумма погрешностей соответствующих формул.

*Замечание 1.4.* Из формул Гаусса для интерполирования вперед и назад может быть получена формула для приближения функции $f(x)$ в точке, которая принадлежит отрезку $[x_0,\, x_1]$ и находится близко к его середине или совпадает с ней. Решение такой задачи дается формулой Бесселя [8].

# 1.10*. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТА

## 1.10.1. Постановка задачи Эрмита

Пусть имеется $(n+1)$ различных вещественных чисел $x_0,\, x_1,\, ...,\, x_n$ – узлов интерполирования. Предположим, что в узле $x_j$ заданы значение функции $f(x)$ и значения всех ее производных до порядка $(p_j-1)$:

$$f(x_j),\, f'(x_j),\, f''(x_j),\, ...,\, f^{(p_j-1)}(x_j),\;\; j=0,\, 1,\, ...,\, n.$$

Таким образом, о функции $f(x)$ известно $p_0+p_1+...+p_n=N+1$ данных.

Рассмотрим задачу о построении многочлена степени не выше $N$:

$$P_N(x)=a_Nx^N+a_{N-1}x^{N-1}+...+a_1x+a_0\,, \tag{1.18}$$

удовлетворяющего условиям

$$P_N^{(s)}\left(x_j\right)=f^{(s)}\left(x_j\right),\;\; j=0,\, 1,\, ...,\, n,\;\; s=0,\, 1,\, ...,\, p_j-1. \tag{1.19}$$

Здесь под $f^{(0)}(x)$ понимается $f(x)$. Условия (1.19) представляют собой линейную алгебраическую систему $(N+1)$ уравнений относительно $(N+1)$ неизвестных коэффициентов $a_0$, $a_1$, ..., $a_N$ многочлена (1.18):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j{}^2 + \ldots + a_N x_j{}^N = f(x_j), \\ a_1 + 2a_2 x_j + \ldots + N a_N x_j{}^{N-1} = f'(x_j), \\ \vdots \\ (p_j - 1)! a_{p_j - 1} + \ldots + \dfrac{N!}{(N - p_j + 1)!} a_N x_j{}^{N - p_j + 1} = f^{(p_j - 1)}(x_j), \ j = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Построение многочлена (1.18) по условиям (1.19) называется *интерполированием Эрмита* или *интерполированием с кратными узлами*. Число $p_j$ называется *кратностью узла* $x_j$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

## 1.10.2. Существование и единственность интерполяционного многочлена Эрмита

Отметим, что может существовать лишь один многочлен (1.18), удовлетворяющий условиям (1.19). В самом деле, пусть существует два таких многочлена: $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда их разность $Q_1(x) - Q_2(x)$ является многочленом степени не выше $N$, причем она удовлетворяет нулевым условиям (1.19) и, следовательно, имеет $x_j$ корнем кратности $p_j$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$ т. е. имеет $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = N + 1$ корней. Это возможно лишь в случае $Q_1(x) - Q_2(x) \equiv 0$.

Из единственности интерполяционного многочлена Эрмита следует его существование. Действительно, многочлен Эрмита, построенный по функции $f(x) \equiv 0$, также единственен, а это равносильно тому, что система, соответствующая линейной алгебраической системе (1.19), имеет только нулевое решение. Отсюда вытекает, что определитель системы (1.19) отличен от нуля и, следовательно, она имеет решение при любой правой части.

## 1.10.3. Частные случаи интерполирования Эрмита

Остановимся на трех частных случаях задачи Эрмита.

1. Если узлы $x_j$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$ простые, т. е. $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = 1,$ $n + 1 = N + 1,$ то задача Эрмита совпадает с задачей Лагранжа, а интерполяционный многочлен в этом случае имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_j)(x - x_j)} f(x_j),$$

где

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} \left( x - x_j \right). \tag{1.20}$$

2. Пусть $n = 0$, т. е. имеется единственный узел $x_0$, и в нем заданы значения $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), ..., f^{(p_0-1)}(x_0)$. В этом случае $p_0 = N + 1$, и интерполяционный многочлен Эрмита степени не выше $N$ может быть представлен как частичная сумма ряда Тейлора функции $f(x)$:

$$P_N(x) = \sum_{q=0}^{N} \frac{f^{(q)}\left(x_0\right)}{q!} \left(x - x_0\right)^q.$$

3. Рассмотрим интерполирование Эрмита с двукратными узлами. Пусть в узлах $x_j$, $j = 0, 1, ..., n$, заданы значения $f(x_j)$ и $f'(x_j)$. В этом случае $p_0 = p_1 = ... = p_n = 2, \quad 2(n+1) = N + 1,$ и интерполяционный многочлен Эрмита степени не выше $N = 2n + 1$ может быть представлен как

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega^2(x)}{\left[\omega'(x_j)\right]^2 (x - x_j)^2} \left\{ f(x_j) \left[ 1 - \frac{\omega''(x_j)}{\omega'(x_j)} (x - x_j) \right] + \right.$$
$$\left. + f\left(x_j\right)\left(x - x_j\right) \right\}, \tag{1.21}$$

где $\omega(x)$ задается равенством (1.20).

Справедливость интерполяционных условий $P_N^{(s)}\left(x_j\right) = f^{(s)}\left(x_j\right)$, $j = 0, 1, ..., n$, $s = 0, 1$, можно установить непосредственными вычислениями.

### 1.10.4. Представление погрешности интерполирования

Докажем теорему о представлении остаточного члена интерполирования Эрмита для вещественной $N+1$ раз дифференцируемой функции.

**Теорема 1.5.** *Пусть функция* $f\left(x\right)$ *имеет конечную производную* $f^{(n+1)}\left(x\right)$ *на наименьшем отрезке* $\left[a, b\right]$, *содержащем узлы* $x_0, \ldots, x_n$ *и точку интерполирования* $y$, *где* $a = \min\left\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\right\}$, $b = \max\left\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\right\}$. *Тогда существует такая точка* $\xi = \xi\left(y\right)$, $a < \xi < b$, *что для остаточного члена интерполирования Эрмита справедливо представление*

$$R_N(f, y)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\Omega(x), \qquad (1.22)$$

где $\Omega(x)=(x-x_0)^{p_0}(x-x_1)^{p_1}...(x-x_n)^{p_n}$, $p_0+p_1+...+p_n=N+1$.

*Доказательство.* Если $y=x_k$, то обе части равенства (1.22) обращаются в нуль, и, следовательно, оно справедливо.

Пусть $y\neq x_k$, $k=\overline{0,n}$. Введем функцию

$$\varphi(x)=f(x)-P_N(x)-\frac{\Omega(x)}{\Omega(y)}\left[f(y)-P_N(y)\right].$$

Эта функция дифференцируема $(N+1)$ раз на $[a, b]$ и имеет на этом отрезке $p_0+p_1+...+p_n+1=N+2$ корней (с учетом кратности): $x_0$, $x_1$, …, $x_n$, $y$. По теореме Ролля функция $\varphi'(x)$ имеет по крайней мере $N+1$ корень из $(a,b)$. Аналогично $\varphi''(x)$ имеет по меньшей мере $N$ корней из интервала $(a,b)$. Продолжая таким же образом, получим, что $\varphi^{(N+1)}(x)$ имеет на $(a,b)$ по крайней мере один корень. Обозначим его $\xi$. Так как

$$0=\varphi^{(N+1)}(\xi)=f^{(N+1)}(\xi)-\frac{(N+1)!}{\Omega(y)}\left[f(y)-P_N(y)\right],$$

то для погрешности интерполирования $R_N(f, y)=f(y)-P_N(y)$ справедливо представление

$$R_N(f, y)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\Omega(y), \ \ a<\xi<b. \ \boxtimes$$

*Замечание 1.5.* Приближенное равенство

$$f(x)\approx P_N(x) \qquad (1.23)$$

обращается в точное, если функция $f(x)$ является многочленом степени не выше $N$, так как $f^{(N+1)}(x)\equiv 0$. Если же функция $f(x)=x^{N+1}$, то $R_N(f, x)=\Omega(x)\neq 0$ и формула (1.23) не точна. В этом случае говорят, что формула интерполирования (1.23) имеет *алгебраическую степень точности*, равную $N$.

***Пример 1.5.*** Пусть $n=2$, а функция $f(x)$ задана таблично.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | –5 | 2 |
| 1 | 1 | 6 | 6 |
| 2 | 2 | 19 | –22 |

Построим интерполяционный многочлен $P_N(x) \approx f(x)$, $N = 2n + 1 = 5$, используя интерполяционную формулу Эрмита (1.21) для случая двукратных узлов. Так как $\omega(x) = x(x-1)(x-2)$, то $\omega'(x) = x(x-1) + x(x-2) + (x-1)(x-2)$, $\omega''(x) = 2x + 2(x-1) + 2(x-2)$. Следовательно,

$$P_5(x) = \frac{(x-1)^2 (x-2)^2}{4}\left\{-5(1+3x) + 2x\right\} +$$

$$+\frac{x^2(x-2)^2}{1}\left\{6 + 6(x-1)\right\} + \frac{x^2(x-1)^2}{4}\left\{19\left(1-3(x-2)\right) - 2(x-2)\right\} =$$

$$= -12x^5 + 58x^4 - 94x^3 + 57x^2 + 2x - 5.$$

Заметим, что полученный алгебраический многочлен имеет пятую степень. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что построенный многочлен удовлетворяет интерполяционным условиям $P_5^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j)$, $j = 0, 1, 2,$ $s = 0, 1$.

# 1.11. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ. ДИСКРЕТНОЕ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

## 1.11.1. Существование и единственность тригонометрического интерполяционного многочлена

Выберем $N = 2n + 1$ попарно различных точек на интервале $[0,\ 2\pi)$:

$$0 \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < 2\pi. \qquad (1.24)$$

Рассмотрим задачу построения тригонометрического многочлена $T_n(x)$ степени не выше $n$ вида

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \qquad (1.25)$$

удовлетворяющего условиям

$$T_n(x_j) = f_j, \quad f_j \in R, \quad j = \overline{0, N-1}. \qquad (1.26)$$

Такой многочлен называется *интерполяционным тригонометрическим* многочленом, построенным по узлам (1.24).

Утверждение 1.6. *Тригонометрический интерполяционный многочлен* (1.25), *построенный по узлам* (1.24) *и удовлетворяющий условиям* (1.26), *существует и единственный.*

*Доказательство.* Многочлен (1.25) будем разыскивать в виде $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, где $z = e^{ix}$, а $i$ – мнимая единица. Обозначим $z_m = e^{ix_m}$, $m = \overline{0, N-1}$. Из (1.24) следует, что числа $z_m$ при любых $m = \overline{0, N-1}$ попарно различны. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$T_n\left(x_j\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z_j^k = f_j, \qquad j = \overline{0, N-1} \tag{1.27}$$

с неизвестными $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$. Определитель матрицы этой системы

$$\left| z_j^{-n} \quad z_j^{-n+1} \quad \ldots \quad 1 \quad z_j \quad \ldots \quad z_j^n \right|_{j=0}^{N-1} = \left(z_0 z_1 \ldots z_{N-1}\right)^{-n} \left| 1 \quad z_j \quad z_j^2 \quad \ldots \quad z_j^{N-1} \right|_{j=0}^{N-1}$$

отличается от определителя Вандермонда, построенного по $N$ попарно различным числам $z_0, \ldots, z_{N-1}$, множителем, отличным от нуля. Следовательно, существует единственный тригонометрический многочлен (1.25), удовлетворяющий интерполяционным условиям (1.26). ☒

### 1.11.2. Случай равноотстоящих узлов

Пусть точки (1.24) равноотстоящие: $x_m = \dfrac{2\pi m}{N}$, $m = \overline{0, N-1}$, тогда $z_m = e^{ix_m} = e^{i\frac{2\pi m}{N}}$. Введем обозначение $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$. Заметим, что $\omega = \sqrt[N]{1}$, а $\omega^S = 1$ тогда и только тогда, когда $S$ – целое, кратное $N$. Учитывая введенные обозначения, систему (1.27) запишем в виде $\sum_{m=-n}^{n} c_m \omega^{jm} = f_j$, $j = \overline{0, N-1}$. Умножим, далее, обе части полученной системы на $\omega^{-jl}$, $l = \overline{-n, n}$, и просуммируем по $j$ от 0 до $N-1$: $\sum_{m=-n}^{n} c_m \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(m-l)} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-jl}$, $l = \overline{-n, n}$. Заметим, что внутренняя сумма в левой части этого равенства

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(m-l)} = \frac{1 - \omega^{(m-l)N}}{1 - \omega^{m-l}} = \begin{cases} N, & m = l; \\ 0, & m \neq l. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались тем, что разность $m - l$ не может быть кратной $N$, так как $-n \leq m,\ l \leq n$, и, следовательно, $\omega^{m-l} \neq 1$. Из вышесказанного следует, что коэффициенты тригонометрического интерполяционного многочлена $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$ в случае равноотстоящих узлов имеют вид $c_l=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-jl}$, $l=\overline{-n,n}$.

### 1.11.3. Дискретное преобразование Фурье

*а*) *Прямое дискретное преобразование Фурье.*

*Определение 1.7.* Линейное преобразование

$$y(j)=\sum_{k=0}^{N-1} a(k)\omega^{kj}, \qquad \omega=e^{i\frac{2\pi}{N}}, \qquad j=\overline{0,N-1}, \tag{1.28}$$

которое вектору $a=\left(a(0),\ \ldots,\ a(N-1)\right)^T$ сопоставляет вектор $y=$ $=\left(y(0),\ \ldots,\ y(N-1)\right)^T$, называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ).

Здесь $N$ – любое натуральное число (не обязательно $N=2n+1$, т. е. нечетное).

Введем матрицу ДПФ:

$$W=\begin{bmatrix}1 & \omega^j & \omega^{2j} & \ldots & \omega^{(N-1)j}\end{bmatrix}_{j=0}^{N-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}.$$

Среди элементов этой матрицы имеется только $N$ различных: 1, ω, $\omega^2$, …, $\omega^{N-1}$, так как $\omega^{r(N-1)}=\omega^{rN-r}=\omega^{N-r}$, и мы получаем

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{N-2} & \ldots & \omega\end{bmatrix}.$$

Заметим, что записанная матрица $W$ является симметрической. ДПФ можно записать в векторной форме: $y=Wa$.

*б*) *Обратное дискретное преобразование Фурье.*

Укажем обратное к ДПФ. Для этого умножим обе части равенства (1.28) на $\omega^{-lj}$, $l=\overline{0,N-1}$, и просуммируем по $j$ от 0 до $N-1$. В результате получим $a(l)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1} y(j)\omega^{-lj}$, $l=\overline{0,N-1}$. Полученное равенство определяет *обратное ДПФ*, матрица которого имеет вид

$$W^{-1}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-(N-2)} & \dots & \omega^{-1} \end{bmatrix}.$$

Обратное ДПФ непосредственно связано с нахождением коэффициентов тригонометрического интерполяционного многочлена: вектору известных значений $\left(f(x_0),\ \dots, f(x_{N-1})\right)^T=\left(y(0),\ \dots,\ y(N-1)\right)^T$, где $N=$ $=2n+1$, обратное ДПФ $a=W^{-1}y$ ставит в соответствие вектор неизвестных коэффициентов $\left(C_{-n},\ C_{-n+1},\ \dots,\ C_n\right)^T=\left(a(0),\ \dots,\ a(N-1)\right)^T$.

## 1.11.4. Быстрое преобразование Фурье

*Быстрое преобразование Фурье* (БПФ) – это способ вычисления дискретного преобразования Фурье. Обычный прямой способ вычисления ДПФ по определению требует выполнения $N^2$ операций умножения комплексных чисел (предполагается, что значения $\omega^{jk}$ вычислены заранее).

Если натуральное число $N$ является составным, то имеется возможность уменьшить число умножений и тем самым получить выигрыш в отношении накопления вычислительной погрешности по сравнению с формулами ДПФ.

Пусть $N=r_1r_2$, тогда индексы $j$ и $k$ в ДПФ можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} j&=j_1r_1+j_0, \quad j_0=\overline{0,r_1-1}, \quad j_1=\overline{0,r_2-1}; \\ k&=k_1r_2+k_0, \quad k_0=\overline{0,r_2-1}, \quad k_1=\overline{0,r_1-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, пара чисел $(j_1,j_0)$ определяет индекс $j$, а пара чисел $(k_1,\ k_0)$ определяет индекс $k$. Формулу (1.28) перепишем в виде

$$y(j_1,j_0)=\sum_{k_0=0}^{r_2-1}\sum_{k_1=0}^{r_1-1} a(k_1,\ k_0)\omega^{jk_1r_2}\omega^{jk_0}. \tag{1.29}$$

Так как $\omega^{jk_1r_2}=\omega^{(j_1r_1+j_0)k_1r_2}=\omega^{j_0k_1r_2}$, то внутренняя сумма по $k_1$ в равенстве (1.29) зависит только от $j_0$ и $k_0$. Положим

$$\sum_{k_1=0}^{r_1-1} a(k_1,\, k_0)\omega^{j_0k_1r_2} \equiv a_1(j_0,\, k_0). \tag{1.30}$$

Число значений $a_1(j_0,\, k_0)$, $j_0=\overline{0,r_1-1}$, $k_0=\overline{0,r_2-1}$, равно $r_1r_2=N$. При этом для вычисления одного значения $a_1(j_0,\, k_0)$ по формуле (1.30) требуется выполнить $r_1$ умножений, следовательно, для вычисления всех значений $a_1(j_0,\, k_0)$ потребуется выполнить $Nr_1$ операций умножения комплексных чисел.

Перепишем формулу (1.29) с учетом (1.30) в виде

$$y(j_1,\, j_0)=\sum_{k_0=0}^{r_2-1} a_1(j_0,\, k_0)\omega^{jk_0}.$$

Отсюда видно, что для вычисления $N$ значений $y(j_1,\, j_0)$ требуется выполнить $Nr_2$ умножений, учитывая, что $a_1(j_0,\, k_0)$ уже найдены. Таким образом, общее число умножений, которые следует выполнить для получения $N$ значений $y(j_1,\, j_0)$, равно $Nr_1+Nr_2=N(r_1+r_2)$.

*Замечание 1.6.* Таким же способом можно убедиться, что если $N=r_1r_2\ldots r_m$, то для выполнения БПФ требуется $T=N(r_1+r_2+\ldots+r_m)$ умножений. В частности, при $r_1=r_2=\ldots=r_m=2$, т. е. $N=2^m$, для $m=10$ имеем $T=2^{10}\cdot 20$. Это приблизительно в 50 раз меньше, чем $N^2=2^{20}$ операций умножения комплексных чисел в случае ДПФ.

## 1.12. ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ СПЛАЙНАМИ

Слово сплайн (англ. *spline*) означает приспособление, применяемое чертежниками для проведения гладких кривых через заданные точки. В математике под *сплайном* понимают кусочно-полиномиальную функцию и используют как аппарат приближения функций. Простейшим примером сплайна является кусочно-линейная функция, или ломаная.

Пусть множество точек $\Delta_N=\{a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\ldots<\overline{x}_N=b\}$ – разбиение отрезка $[a,\, b]\subset R$.

*Определение 1.8.* Функция $S_{m,\tilde{k}}(x)$ называется *сплайном* степени $m$ *с дефектом* $\tilde{k}$ и узлами $\Delta_N$, если:

1) на каждом частичном отрезке $[\overline{x}_k, \overline{x}_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, функция $S_{m,\tilde{k}}(x)$ является многочленом степени не выше $m$, и эта степень равна $m$ хотя бы на одном из отрезков;

2) $S_{m,\tilde{k}}(x) \in C^{(m-\tilde{k})}[a, b]$, при этом $S_{m,\tilde{k}}^{(m-\tilde{k}+1)}(x)$ не является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$.

В определении сплайна число $\tilde{k}$ может принимать значения 1, 2, …, $m+1$. В случае $m-\tilde{k}=-1$ под $C^{(-1)}[a, b]$ понимается линейное пространство кусочно-непрерывных функций с точками разрыва первого рода.

Заметим, что число точек разбиения $N+1$ не связано со степенью сплайна $m$.

Если при решении задачи приближения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, сплайном $S_{m,\tilde{k}}(x)$ потребовать выполнения условия

3) $S_{m,\tilde{k}}(x_k) = f(x_k)$, $x_k \in [\overline{x}_k, \overline{x}_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, то такой сплайн называется *интерполяционным* для функции $f(x)$.

Для единственности сплайна $S_{m,\tilde{k}}(x)$ следует задать $(m-\tilde{k})$ условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a, b]$. Вопрос о существовании и единственности сплайна решается в каждом конкретном случае отдельно.

Пусть $m=1$, $\tilde{k}=1$. Требуется построить сплайн $S_{1,1}(x)$ – ломаную с вершинами в заданных точках $(x_k, f(x_k))$, $k = \overline{0, n}$ (рис. 5).

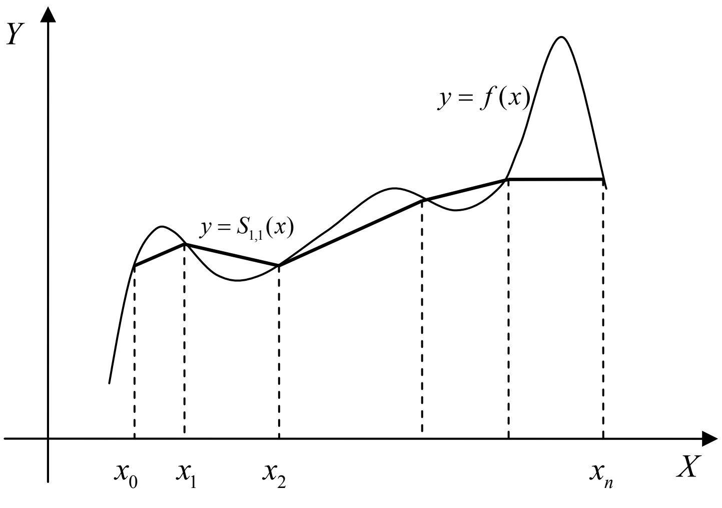



*Рис. 5*

По условию 1) и 3) в определении интерполяционного сплайна можем записать

$$S_{1,1}(x)=\left\{P_k(x)=f(x_k)+(x-x_k)A_k,\quad x\in[x_k,\,x_{k+1}],\quad k=\overline{0,n-1},\right.$$

где $A_k$ – многочлен $(m-1)$ степени или нулевой. По условию 2) определения сплайна

$$P_k(x_{k+1})=P_{k+1}(x_{k+1})\equiv f(x_{k+1}),$$

т. е. $f(x_k)+(x_{k+1}-x_k)A_k=f(x_{k+1})$, следовательно, $A_k=\dfrac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$, а искомый сплайн имеет вид

$$S_{1,1}(x)=\left\{f(x_k)+(x-x_k)\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k},\quad x\in[x_k,\,x_{k+1}],\quad k=\overline{0,n-1}.\right.$$

Построенный сплайн определен однозначно, он является многочленом первой степени на любом из частичных отрезков, представляет собой непрерывную функцию и удовлетворяет интерполяционным условиям.

***Пример 1.6.*** Пусть функция $f(x)$ задана следующей таблицей.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,5 |
| 1 | 2 | 2,3 |
| 2 | 4 | 3,4 |

Построим интерполяционный сплайн $S_{1,1}(x)$ первой степени с дефектом 1 для функции $f(x)$. На каждом из отрезков $[0,\ 2]$ и $[2,\ 4]$ искомый сплайн имеет вид многочлена первой степени $P_k(x)=f(x_k)+$ $+\dfrac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k)$ для $k=0,1$ соответственно, т. е.

$$S_{1,1}(x)=\begin{cases}P_0(x)=1{,}5+0{,}4x,\ x\in[0,\ 2];\\ P_1(x)=1{,}2+0{,}55x,\ x\in[2,\ 4].\end{cases}$$

Для полученного сплайна $S_{1,1}(x)$ выполнены интерполяционные условия:

$$S_{1,1}(0)=P_0(0)=1{,}5=f(0),$$

$$S_{1,1}(2)=P_0(2)=P_1(2)=2{,}3=f(2),$$

$$S_{1,1}(4)=P_1(4)=3{,}4=f(4).$$

Пусть, далее, $m$, $\tilde{k}$ – заданные натуральные числа. Тогда для сплайна $S_{m,\tilde{k}}(x)$, проходящего через точки $(x_k, f(x_k))$, $k=\overline{0,n}$, используем представление

$$S_{m,\tilde{k}}(x)=\{P_k(x)=f(x_k)+(x-x_k)Q_k(x),\quad x\in[x_k,\ x_{k+1}],\quad k=\overline{0,n-1},$$

где $Q_k(x)$ – многочлен степени $m-1$ с $m$ неизвестными коэффициентами.

Такая схема построения сплайна $S_{m,\tilde{k}}(x)$ обеспечивает выполнение условий 1) и 3) в его определении. Для выполнения условия 2) потребуем, чтобы $P_k^{(i)}(x_{k+1})=P_{k+1}^{(i)}(x_{k+1})$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-\tilde{k}$. Для единственности сплайна $S_{m,\tilde{k}}(x)$ необходимо задать $(m-\tilde{k})+n(\tilde{k}-1)$ дополнительных условий. В результате получим $m$ уравнений для нахождения $m$ неизвестных коэффициентов многочлена $Q_k(x)$.

***Пример 1.7.*** Построим интерполяционный сплайн $S_{2,1}(x)$ второй степени с дефектом 1, который удовлетворяет дополнительному условию $S'_{2,1}(0)=0$, для функции $f(x)$, заданной следующей таблицей.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 5 |

Для сплайна $S_{2,1}(x)$ используем представление

$$S_{2,1}(x)=\begin{cases} P_0(x)=f(x_0)+(x-x_0)(A_0x+B_0)=0+x(A_0x+B_0),\ x\in[0,\ 1]; \\ P_1(x)=f(x_1)+(x-x_1)(A_1x+B_1)=1+(x-1)(A_1x+B_0x),\ x\in[1,\ 2] \end{cases}$$

с неизвестными коэффициентами $A_0$, $A_1$, $B_0$ и $B_1$.

Так как дополнительное условие задано в точке $x_0$ из отрезка $[0,\ 1]$, то оно равносильно условию $P'_0(x_0)=0$. Учитывая, что $P'_0(x)=2A_0x+B_0$, а $P'_1(x)=2A_1x+B_1-A_1$, запишем систему из четырех уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} P'_0(x_0)=0, \\ P_0(x_1)=P_1(x_1), \\ P'_0(x_1)=P'_1(x_1), \\ P_1(x_2)=f(x_2). \end{cases} \text{Следовательно,} \begin{cases} B_0=0, \\ A_0=1, \\ A_1+B_1=2, \\ 1+2A_1+B_1=5, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} B_0=0, \\ A_0=1, \\ A_1=2, \\ B_1=0. \end{cases}$$

Таким образом, интерполяционный сплайн $S_{2,1}(x)$ для заданной функции $f(x)$ имеет вид $S_{2,1}(x)=\begin{cases} P_0(x)=x^2,\ x\in[0,\ 1]; \\ P_1(x)=2x^2-2x+1,\ x\in[1,\ 2]. \end{cases}$

*Замечание 1.7.* Сплайн $S_{1,1}(x)$ равномерно сходится к непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ функции $f(x)$, если $\max\limits_{0\le i\le n-1}|x_i-x_{i+1}|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Равномерная сходимость имеет место для сплайнов $S_{2,1}(x)$ и $S_{3,1}(x)$, причем скорость сходимости возрастает вместе с порядком сплайна и гладкостью функции $f(x)$.

# 1.13. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

## 1.13.1. Постановка задачи аппроксимации

Задача нахождения функции $y=F(x)$, значения которой на отрезке $[a,\ b]$, содержащем точки $x_i$, $i=\overline{1,n}$, возможно мало отличаются от значений искомой функции $f(x_i)=y_i$, $i=\overline{1,n}$, называется *задачей аппроксимации*.

Требование точного совпадения $F(x_i)=y_i$, $i=\overline{1,n}$, приводит к задаче интерполирования.

Задача аппроксимации – задача о выборе некоторой функции $F(x)$, характеризующей функциональную зависимость на всем отрезке $[a,\ b]$ в целом, без копирования ошибок экспериментальных данных – местных отклонений.

В такой постановке задача весьма неопределенна. Поэтому обычно

1) указывают достаточно узкий класс функций $\Omega$, зависящий от параметров $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ (например, многочлены определенной степени, показательные функции и т. д.), которому должна принадлежать искомая функция $F(x)$;

2) подбирают параметры $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ функции $y=F(x,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m)$ таким образом, чтобы разности $\varepsilon_k=|F(x_k)-f(x_k)|$ оказались минимальными.

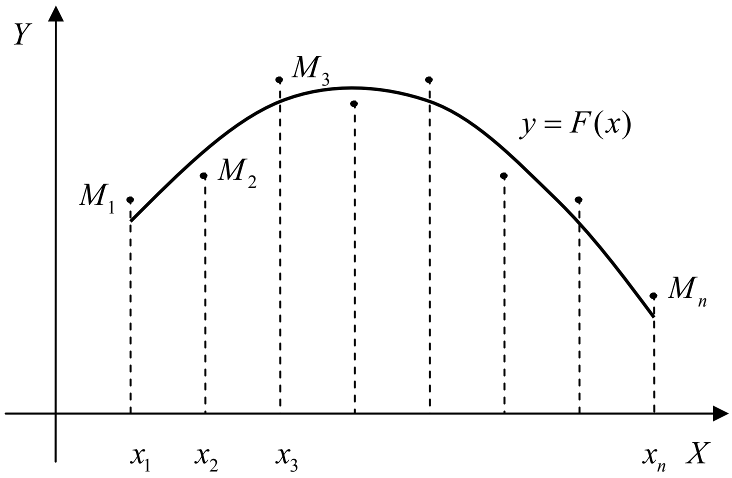



*Рис. 6*

Геометрически эти разности представляют собой расстояние по вертикали от точек $\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)$ до графика функции $y = F\left(x\right)$. Задача состоит в выборе той функции $y = F\left(x,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\right)$ из заданного класса $\Omega$, график которой проходит (рис. 6) около системы точек $\left\{M_k\left(x_k,\ y_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$ в некотором смысле ближе, чем графики других функций этого класса.

## 1.13.2. Метод наименьших квадратов

Для нахождения параметров $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ используем *метод наименьших квадратов* (*средней квадратической аппроксимации*). Критерием этого метода является минимизация суммы квадратов отклонений функции $F\left(x,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\right)$ от ординат $y_i$, т. е.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i,\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_m\right) - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2.$$

Это функция многих переменных. Необходимое условие экстремума такой функции приводит к системе $\left(m+1\right)$ уравнений:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i,\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_m\right) - y_i\right)\frac{\partial F\left(x_i,\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_m\right)}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad j = \overline{0, m}.\right.$$

Рассмотрим схемы определения параметров $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ для некоторых частных случаев.

1) Пусть искомая функция есть многочлен степени не выше $m$: $y =$

$= P_m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$. Тогда задача заключается в минимизации функции $S = \sum_{i=1}^{n} \left( P_m(x_i) - y_i \right)^2$.

Необходимое условие экстремума приводит к системе уравнений $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left( P_m(x_i) - y_i \right) \cdot x_i^j = 0, \; j = \overline{0,m} \right.$. Раскрыв скобки в каждом уравнении системы, получим $\left\{ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} P_m(x_i) x_i^j = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} y_i x_i^j, \; j = \overline{0,m} \right.$.

Обозначим $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_i^j = t_j, \; j = \overline{0,2m}, \; C_j = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} y_i x_i^j, \; j = \overline{0,m}$, тогда последняя система перепишется в виде

$$\alpha_0 \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m+1} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_m \begin{bmatrix} t_m \\ \vdots \\ t_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Эта система линейна относительно параметров $\alpha_i, \; i = \overline{0,m}$. Ее определитель отличен от нуля, т. е. система имеет единственное решение, следовательно, неизвестные параметры $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ определяются из нее однозначно.

*Замечание 1.8.* Поскольку матрица системы является симметрической и невырожденной, то для ее решения удобно использовать, например, метод квадратного корня. В этом случае достаточно задать исходную информацию в виде элементов треугольной матрицы.

Для выбора степени аппроксимирующего многочлена можно:

- построить точечную диаграмму $(x_i, y_i), \; i = \overline{1,n}$, и визуально оценить, графику какой функции (прямой, параболе второго, параболе третьего порядка и т. д.) соответствуют полученные точки;
- выбрав некоторое $m$, найти $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, вычислить среднее квадратическое отклонение $\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$ и сравнить его с известной физической погрешностью эксперимента $\varepsilon$. Если $\delta >> \varepsilon$, т. е. математическая погрешность аппроксимации во много раз превышает физическую погрешность эксперимента, то $m$ следует увеличить. В случае, когда $\delta << \varepsilon$, т. е. старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны, необходимо уменьшить $m$. При $\delta \approx \varepsilon$ число $m$ оптимальное.

Обычно начинают с $m = 1$, когда заведомо $\delta >> \varepsilon$, и увеличивают $m$, пока не выполнится условие $\delta \approx \varepsilon$.

***Пример 1.8.*** Пусть экспериментальная зависимость $f(x)$ задана таблицей.

| $k$ | $x_k$ | $y_k = f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,78 | 2,5 |
| 2 | 1,56 | 1,2 |
| 3 | 2,34 | 1,12 |
| 4 | 3,12 | 2,25 |
| 5 | 3,81 | 4,28 |

Для аппроксимации этой функциональной зависимости методом наименьших квадратов построим точечную диаграмму исходных данных и определим вид аппроксимирующей кривой. Графическое исследование диаграммы приводит к гипотезе об общем виде аппроксимирующего многочлена второй степени $P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ с неизвестными коэффициентами $\alpha_0$, $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Для их нахождения составим линейную систему вида

$$\begin{cases} t_0\alpha_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 = c_0, \\ t_1\alpha_0 + t_2\alpha_1 + t_3\alpha_2 = c_1, \\ t_2\alpha_0 + t_3\alpha_1 + t_4\alpha_2 = c_2, \end{cases}$$

где $t_i = \sum_{k=1}^{5} x_k^i$, $i = \overline{0,4}$, т. е. $t_0 = 1$, $t_1 = 11,61$, $t_2 = \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 32,7681$, $t_3 = 102,762$, $t_4 = 341,750$, а $c_i = \sum_{k=1}^{5} x_k^i f(x_k)$, $i = \overline{0,2}$, т. е. $c_0 = 11,350$, $c_1 = 29,770$, $c_2 = 94,605$.

Решив записанную систему, находим $\alpha_0 = 5,022$, $\alpha_1 = -4,014$, $\alpha_2 = 1,002$. Следовательно, искомый многочлен, аппроксимирующий исходную экспериментальную зависимость $f(x)$, имеет вид

$$P_2(x) = 5,022 - 4,014x + 1,002x^2.$$

Заметим, что в рассмотренном примере среднее квадратическое отклонение $\delta = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(f(x_i) - P_2(x_i)\right)^2} \approx 0,003$ сопоставимо с физической погрешностью эксперимента.

2) Если точки $(x_i,\, y_i)$ располагаются вдоль некоторой линии, сходной по форме, например, с графиком гиперболической, показательной, логарифмической или других функций, то соответствующая функция с неизвестными параметрами выбирается в качестве аппроксимирующей. Затем проводится линеаризация этой функции с помощью замены переменных, и задача сводится к аппроксимации зависимости многочлена первой степени. Так, если вид функциональной зависимости гиперболический: $y=\dfrac{k}{x}+b$, то по формулам $X=\dfrac{1}{x},\ Y=y$ приходим к линейной зависимости $Y=kX+b$, а в случае экспоненциальной зависимости $y=Be^{kx}$ замена $Y=\ln y,\ X=x,\ b=\ln B$ приводит к $Y=kX+b$.

# 1.14. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ОЦЕНКА ЕГО ПОГРЕШНОСТИ

## 1.14.1. Применение интерполирования для задачи приближенного вычисления производных функции, заданной таблицей

Пусть требуется вычислить производную порядка $m$ таблично заданной на отрезке $[a,\, b]$ функции $f(x)$ в точке $y$. Выберем $(n+1)$ точек $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ – аргументов таблицы функции $f(x)$, ближайших к точке $y$, и построим интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени не выше $n$ для $f(x)$ по выбранным точкам как узлам интерполирования.

Получим приближенное равенство $f(x)\approx P_n(x)$, которое позволяет найти приближенное значение производной порядка $m\le n$ от функции $f(x)$ в точке $y$:

$$f^{(n)}(y)\approx P_n^{(m)}(y), \quad m\le n. \tag{1.31}$$

Требование $m\le n$ естественное, так как для $m>n$ производная $P_n^{(m)}(x)\equiv 0$.

## 1.14.2. Представление погрешности численного дифференцирования функций

Исследуем погрешность формулы (1.31). Формула погрешности интерполирования функции $f(x)$ в точке $y$ имеет вид

$$R_n(f, y) = f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(y), \quad \xi \in (a, b), \quad (1.32)$$

где $\omega_n(y) = \prod_{k=0}^{n}(y - x_k)$. Предполагается, что существует $f^{(n+1)}(x) \neq \pm\infty$ на отрезке $[a, b]$, где $a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$, $b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$. Очевидно, что $R_n^{(m)}(f, y) = f_n^{(m)}(y) - P_n^{(m)}(y)$, и если бы точка $\xi$ не зависела от $y$, то в результате дифференцирования равенства (1.32) мы получили бы $R_n^{(m)}(f, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n^{(m)}(y)$. Но $\xi$ зависит от $y$, и такая формула неверна, за исключением некоторых случаев с другим значением $\xi$.

**Теорема 1.6.** *Пусть существует* $f^{(n+1)}(x) \neq \pm\infty$ *на* $[a, b]$, *где* $a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$, $b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, y\}$, *и выполняется одно из условий*:

1) $y \notin (\alpha, \beta)$, *где* $\alpha = \min\{x_i\}_0^n$, $\beta = \max\{x_i\}_0^n$;

2) *порядок дифференцирования* $m = 1$, *а точка интерполирования* $y$ *совпадает с одним из узлов* $x_k$, $k \in \overline{0, n}$,

*тогда справедливо представление* $R_n^{(m)}(f, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\omega_n^{(m)}(y)$, *где* $\xi_1 \in (a, b)$, *причем множитель* $\omega_n^{(m)}(y) \neq 0$.

*Доказательство.* Пусть выполнено условие 1) теоремы. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - k\omega_n(x)$, где $k$ – некоторая постоянная, которую определим ниже. Эта функция дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[a, b]$ и имеет $(n+1)$ корней: $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [\alpha, \beta]$. По теореме Ролля функция $\varphi'(x)$ имеет $n$ корней на интервале $(\alpha, \beta)$, функция $\varphi''(x)$ имеет $(n-1)$ корней из $(\alpha, \beta)$ и т. д. Производная $\varphi^{(m)}(x)$ имеет $(n+1-m) \geq 1$ корней внутри интервала $(\alpha, \beta)$.

Заметим, что $\omega_n^{(m)}(x)$ – многочлен степени $(n+1-m)$ и по теореме Ролля имеет $(n+1-m)$ корней внутри $(\alpha, \beta)$. Так как $y \notin (\alpha, \beta)$, то $\omega_n^{(m)}(y) \neq 0$ и постоянную $k$ можно определить так, чтобы

$$0=\varphi^{(m)}(y)=f^{(m)}(y)-P_n^{(m)}(y)-k\omega_n^{(m)}(y). \qquad (1.33)$$

При избранной постоянной $k$ производная $\varphi^{(m)}(x)$ имеет $(n+2-m)$ корней на $[a,\, b]$. По теореме Ролля $\varphi^{(m+1)}(x)$ имеет $(n+1-m)$ корней внутри $(a,\, b)$ и т. д. Производная $\varphi^{(n+1)}(x)$ имеет 1 корень внутри $(a,\, b)$. Обозначим его $\xi_1$. Имеем $0=\varphi^{(n+1)}(\xi_1)=f^{(n+!)}(\xi_1)-k(n+1)!$, следовательно, $k=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}$. Подставляя полученное значение постоянной $k$ в равенство (1.33) и учитывая, что $f^{(m)}(y)-P_n^{(m)}(y)=R_n^{(m)}(f,\, y)$, получаем требуемое представление.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Тогда многочлен $\omega_n(x)$ имеет $(n+1)$ корней $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n \in [a,\, b]$. По теореме Ролля многочлен $\omega_n'(x)$ степени $n$ имеет $n$ корней, не совпадающих с узлами, поэтому $\omega_n'(x_k)\neq 0$, $k=\overline{0,n}$. Постоянную $k$ можно определить так, что $0=\varphi'(x_k)=f(x_k)-P_n'(x_k)-k\omega_n'(x_k)$. Таким образом, производная $\varphi'(x)$ имеет $(n+1)$ попарно различных корней на отрезке $[a,\, b]$. По теореме Ролля $\varphi^{(n+1)}(x)$ имеет по крайней мере один корень из интервала $(a,\, b)$. Обозначим его $\xi_1$. Так как $0=\varphi^{(n+1)}(\xi_1)=f^{(n+1)}(\xi_1)-k(n+1)!$, то $k=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}$, $\xi_1\in(a,\, b)$. Следовательно,

$$R_n'(f,\, x_k)=f'(x_k)-P_n'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\omega_n'(x_k),$$

т. е. при $m=1$ и $y=x_k$ получаем требуемое. ☒

*Замечание 1.9.* Приближенное равенство (1.31) обращается в точное, если функция $f(x)$ является многочленом степени не выше $n$, так как $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$. Если же функция $f(x)=x^{n+1}$, то $R_n^{(m)}(f,\, y)=\omega_n^{(m)}(y)\neq 0$, и формула (1.31) не точна. В этом случае говорят, что формула численного дифференцирования (1.31) имеет *алгебраическую степень точности*, равную $n$.

## 1.14.3. Некоторые частные случаи вычисления производных. Оценка погрешности

Приведем приближенные выражения для производных первого и второго порядка от функции $f(x)$ в точке $a$ через ее значения в равноотстоящих с шагом $h > 0$ точках $a-2h,\ a-h,\ a,\ a+h,\ a+2h$.

1. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах $a$, $a+h$. Требуется найти производную $f'(a)$ и оценить погрешность.

Интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования в начале таблицы, построенный по узлам $a$, $a+h$, имеет вид $P_1(a+th) = f(a) + \Delta f(a)\ t$. Вычислим производную по переменной $t$ от обеих частей этого равенства: $hP_1'(a+th) = \Delta f(a)$. Полагая $t=0$ в последнем выражении, получим $P_1'(a) = \dfrac{\Delta f(a)}{h} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Таким образом, искомое представление имеет вид

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1.34}$$

Оценим погрешность полученной формулы. Пусть $f(x)$ имеет конечную производную второго порядка, равного числу узлов. Узлами являются точки $a$, $a+h$, поэтому $\omega_1(x) = (x-a)(x-a-h)$, и, следовательно, $\omega_1'(a) = -h$. Так как выполнено условие 2) в теореме об оценке погрешности, то

$$R_1'(f,\ a) = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{f''(\xi_1)}{2}h, \quad \xi_1 \in (a,\ a+h). \tag{1.35}$$

2. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах $a-h,\ a$. Требуется, как и ранее, найти производную $f'(a)$ и оценить погрешность.

Интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования в начале таблицы, построенный по узлам $a-h,\ a$, имеет вид $P_1(a+th) = f(a-h) + \Delta f(a-h)t$. Вычислим производную по $t$ от обеих частей этой формулы: $hP_1'(a+th) = \Delta f(a-h)$. Полагая $t=0$ в последнем равенстве, найдем $P_1'(a) = \dfrac{\Delta f(a-h)}{h} = \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$. Таким образом,

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}. \tag{1.36}$$

Из равенства (1.35) заменой $h$ на $(-h)$ получим

$$R_1'(f,\ a)=\frac{f''(\xi_1)}{2!}h,\quad \xi_1\in(a-h,\ a). \tag{1.37}$$

3. Формула

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \tag{1.38}$$

может быть получена как полусумма правых частей приближенных формул (1.34) и (1.36). Она построена по узлам $a-h,\ a,\ a+h$, поэтому $\omega_2(x)=(x-a+h)(x-a)(x-a-h)$ и $\omega_2'(a)=-h^2$. Следовательно, ее погрешность имеет вид

$$R_2'(f,\ a)=f'(a)-\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=-\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^2,$$

где $\xi_1\in(a-h,\ a+h)$.

Формула (1.38) имеет второй порядок малости относительно шага $h$, в то время как оценки (1.35) и (1.37) – первый порядок.

4. Пусть известны значения функции $f(x)$ в точках $a,\ a+h,\ a+2h$. Необходимо найти $f'(a)$ и оценить погрешность. Дифференцируя по переменной $t$ формулу Ньютона

$$P_2(a+th)=f(a)+\Delta f(a)\ t+\frac{\Delta^2 f(a)\ t(t-1)}{2}$$

и полагая $t=0$, получим

$$P_2'(a)=\frac{1}{2h}\left(2\Delta f(a)-\Delta^2 f(a)\right)=\frac{1}{2h}\left[-3f(a)+4f(a+h)-f(a+2h)\right],$$

т. е. искомое представление имеет вид

$$f'(a)\approx\frac{1}{2h}\left[-3f(a)+4f(a+h)-f(a+2h)\right]. \tag{1.39}$$

Получим выражение для погрешности этой формулы. Так как $\omega_2(x)=(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$ и, следовательно, $\omega_2'(a)=2h^2$, имеем

$$R_2'(f,\ a)=f'(a)-\frac{1}{2h}\left[-3f(a)+4f(a+h)-f(a+2h)\right]=$$

$$=\frac{f'''(\xi_1)}{3}h^2,\ \ \xi_1\in(a,\ a+2h). \tag{1.40}$$

5. Аналогично для узлов $a,\ a-h,\ a-2h$ справедлива приближенная формула $f'(a)\approx\frac{1}{2h}\left[3f(a)-4f(a-h)+f(a-2h)\right]$. Ее можно получить,

например, из приближенного равенства (1.39) заменой $h$ на $(-h)$. Представление погрешности численного дифференцирования

$$R_2'(f,\ a) = f'(a) - \frac{1}{2h}\left[3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)\right] = \frac{f'''(\xi_1)}{3}h^2,$$

$\xi_1 \in (a-2h,\ a)$, также может быть получено путем замены $h$ на $(-h)$ в формуле (1.40) для оценки погрешности.

6. Пусть заданы значения $f(a-h), f(a), f(a+h)$. Требуется найти $f''(a)$ и оценить погрешность. Выпишем интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x)$, построенный по узлам $a-h,\ a,\ a+h$: $P_2(a+th) = f(a-h) + \Delta f(a-h)\ t + \dfrac{\Delta^2 f(a-h)\ t(t-1)}{2}$. Дифференцируя обе части этого равенства по переменной $t$ и полагая в полученном выражении $t=0$, имеем

$$P_2''(a) = \frac{\Delta^2 f(a-h)}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left[f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)\right],$$

$$f''(a) \approx \frac{1}{h^2}\left[f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)\right]. \qquad (1.41)$$

Получить представление погрешности этой формулы с помощью теоремы о погрешности численного дифференцирования невозможно, так как нарушены оба условия: точка интерполирования $y = a \in (\alpha,\ \beta)$, а порядок численного дифференцирования $m = 2$.

Предположим, что $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка на отрезке $[a-h,\ a+h]$, и воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}h^4,\ \xi_1 \in (a,\ a+h),$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}h^4,\ \xi_2 \in (a-h,\ a).$$

Сложив почленно последние два равенства, получим

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + \frac{\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right]}{24}h^4.$$

Откуда $f''(a) - \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = -\dfrac{\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right]}{24}h^2$.

Так как $f^{(4)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a-h,\ a+h]$, то найдется такая точка $\xi \in [a-h,\ a+h]$, что $\dfrac{\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right]}{2} = f^{(4)}(\xi)$. Это следует из теоремы Коши, так как левая часть последнего равенства удовлетворяет неравенству $m \le \dfrac{\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right]}{2} \le M$, где $m$ и $M$ – наименьшее и наибольшее значения функции $f^{(4)}(x)$ на отрезке $[a-h,\ a+h]$ соответственно. Таким образом,

$$f''(a) - \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2, \quad \xi \in [a-h,\ a+h],$$

т. е. формула численного дифференцирования (1.41) точна, если $f(x)$ – многочлен степени не выше третьей. Если же $f(x) = x^4$, то она не является точной. Это означает, что алгебраическая степень точности формулы (1.41) равна трем.

### 1.14.4. О методе неопределенных коэффициентов

Названный метод заключается в следующем: искомая производная функция $f^{(m)}(y)$ записывается в виде $f^{(m)}(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$, в предположении, что значения $f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, известны. Коэффициенты $A_k$ определяются из системы линейных уравнений $R(f) = 0$, где $f(x)$ последовательно полагают $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$.

***Пример 1.9.*** Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах $a$, $a+h$. Требуется найти производную $f'(a)$. Искомую производную функцию $f'(a)$ представим в виде $f'(a) = A_0 f(a) + A_1 f(a+h) + R(f)$. Неизвестные коэффициенты $A_k$ определим из системы линейных уравнений $R(f) = 0$, где функцию $f(x)$ последовательно будем полагать равной $1, x$.

При $f(x) = 1$ имеем $0 = A_0 + A_1 + R(f)$. Если $f(x) = x$, то получим $1 = A_0 a + A_1(a+h) + R(f)$. Полагая в двух последних равенствах $R(f) = 0$, составим систему для нахождения коэффициентов $A_k$:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 0, \\ A_0 a + A_1(a+h) - 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $A_0 = -\frac{1}{h}$, $A_1 = \frac{1}{h}$. Следовательно, искомая производная функция $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

# 1.15. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 1.15.1. Определение многочлена многих переменных. Достаточное условие неособенности матрицы Вандермонда

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in Z_+$, называется *мультииндексом*. Одночлен $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ – одночлен от переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$. Степень одночлена $x^\alpha$ равна числу $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, называемому *длиной мультииндекса* $\alpha$.

Многочлен $P(x)$ степени $m$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид $P(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha x^\alpha$, где $C_\alpha$ – комплексные числа, и суммирование во внутренней сумме ведется по всем мультииндексам длины $k$. Многочлен $P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha x^\alpha$ называется *однородной составляющей* степени $k$ многочлена $P(x)$.

Число всех одночленов степени не выше $m$ от $n$ переменных равно $\mu = C_{n+m}^n$. Пронумеруем одночлены $x^\alpha$ натуральными числами и будем обозначать их $\varphi_j(x)$, $j \ge 1$. Нумерацию выполним так, что одночлены меньшей степени имеют меньший номер, а одночлены одной и той же степени нумеруются в любом порядке, например лексикографическом. В частности, $\varphi_1(x) = 1$, и если одночлены одной и той же степени нумеруются в лексикографическом порядке, то $\varphi_2(x) = x_1$, $\varphi_3(x) = x_2$, …, $\varphi_{n+1}(x) = x_n$, $\varphi_{n+2}(x) = x_1^2$, $\varphi_{n+3}(x) = x_1 x_2$, $\varphi_{n+4}(x) = x_1 x_3$ и т. д. Среди одночленов $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,\mu}$, $\mu = C_{n+m}^n$, содержатся все одночлены степени не выше $m$ от $n$ переменных.

Пусть $\Omega$ – множество в $R^n$ такое, что одночлены $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,\mu}$, – функции от переменной $x$ на $\Omega$ линейно независимы. Это условие выполняется, если множество $\Omega$ имеет внутренние точки. Докажем, что в $\Omega$ существуют точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r-1)}$ такие, что определители $D_s = \left|\varphi_1\left(x^{(j)}\right) \;\; \varphi_2\left(x^{(j)}\right) \;\; \ldots \;\; \varphi_s\left(x^{(j)}\right)\right|_{j=1}^{s} \neq 0, \quad s = \overline{1,\mu}$.

Действительно, при $s = 1$ утверждение верно, так как $D_1 = \varphi_1\left(x^{(1)}\right) = 1$ для любой точки $x^{(1)} \in \Omega$.

Пусть утверждение верно для $s = r - 1$, покажем его справедливость при $s = r$. По предположению существуют точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r-1)}$ такие, что определители $D_{r-1} = \left|\varphi_1\left(x^{(j)}\right) \;\; \varphi_2\left(x^{(j)}\right) \;\; \ldots \;\; \varphi_{r-1}\left(x^{(j)}\right)\right|_{j=1}^{r-1} \neq 0$. Рассмотрим определитель

$$D_r(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1\left(x^{(1)}\right) & \varphi_2\left(x^{(1)}\right) & \ldots & \varphi_r\left(x^{(1)}\right) \\ . & . & . & . \\ \varphi_1\left(x^{(r-1)}\right) & \varphi_2\left(x^{(r-1)}\right) & \ldots & \varphi_r\left(x^{(r-1)}\right) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_r(x) \end{vmatrix},$$

зависящий от $x$. Утверждаем, что существует точка $x^{(r)} \in \Omega$, что $D_r\left(x^{(r)}\right) \neq 0$. Действительно, в противном случае $D_r(x) = 0$ для любых $x \in \Omega$. Это означает, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ линейно зависимы, так как разлагая $D_r(x)$ по элементам последней строки, получим линейную комбинацию одночленов $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ с постоянными коэффициентами, при этом коэффициент при $\varphi_r(x)$, равный $D_{r-1}$, по предположению отличен от нуля.

Матрица $V_m = \left[\varphi_1\left(x^{(j)}\right) \;\; \varphi_2\left(x^{(j)}\right) \;\; \ldots \;\; \varphi_\mu\left(x^{(j)}\right)\right]_{j=1}^{\mu}$, построенная по точкам $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)}$, $-$ *матрица Вандермонда*.

Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

**Теорема 1.7.** *Пусть множество $\Omega \subset R^n$ имеет внутренние точки. Тогда существуют такие $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)} \in \Omega$, что матрица Вандермонда $V_m$ неособенная.*

## 1.15.2. Алгебраическая гиперповерхность. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы совокупность точек принадлежала алгебраической гиперповерхности

Линейное комплексное пространство, элементами которого являются векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с комплексными составляющими, обозначим через $C^n$. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $m$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

*Определение 1.9.* Множество точек $x \in C^n$, удовлетворяющих условию $P(x) = 0$, называется *алгебраической гиперповерхностью* порядка $m$. При $m = 1$ эта гиперповерхность называется *гиперплоскостью*.

Так, гиперповерхность в $C^1$ – это множество корней многочлена $P(x_1)$ степени $m$ от одной переменной $x_1$, состоящее не более чем из $m$ точек. Гиперплоскость в пространстве $C^1$ – точка. Гиперплоскость в $C^2$ является алгебраической кривой порядка $m$ при $m \geq 2$ и прямой при $m = 1$.

**Теорема 1.8.** *Для того чтобы матрица Вандермонда $V_m$ была неособенной, необходимо и достаточно, чтобы определяющие ее точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)}$ не лежали на алгебраической гиперповерхности порядка $m$.*

*Доказательство.* Утверждение $\det V_m = 0$ равносильно тому, что столбцы матрицы $V_m$ линейно зависимы:

$$b_1\varphi_1\left(x^{(j)}\right) + b_2\varphi_2\left(x^{(j)}\right) + \ldots + b_\mu\ \varphi_\mu\left(x^{(j)}\right) = 0,\ j = \overline{1,\mu},$$

где среди коэффициентов $b_j$, $j = \overline{1,\mu}$, есть ненулевые. Это означает, что точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)}$ лежат на алгебраической гиперповерхности $b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \ldots + b_\mu\ \varphi_\mu(x) = 0$ порядка не выше $m$. ☒

При $n = 1$ условие из этой теоремы равносильно тому, как если бы точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\mu)}$, где $\mu = m + 1$, были попарно различны.

В случае $n \geq 2$ $\mu$ попарно различных точек могут лежать на алгебраической гиперповерхности порядка $m$. Например, если $n = 2$ и три точки лежат на прямой, то определяемая ими матрица Вандермонда является особенной.

*Следствие.* Если множество $\Omega \subset R^n$ имеет внутренние точки, тогда существуют $\mu = C_{n+m}^n$ точек в $\Omega$, которые не лежат на алгебраической гиперповерхности порядка $m$ при любом натуральном $m$.

Заметим, что $\nu$ точек из $\Omega$, где $\nu < \mu$, всегда лежат на алгебраической гиперповерхности порядка $m$. Таким образом, если $N$ точек не лежат на алгебраической гиперповерхности порядка $m$, то $N \geq \mu$.

## 1.15.3. Выбор точек, не принадлежащих алгебраической гиперповерхности фиксированного порядка

Имеются способы выбора $\mu$ точек, которые не лежат на алгебраической гиперповерхности порядка $m$.

Возьмем $m+1$ попарно различных чисел $S_0, S_1, \ldots, S_m$ и рассмотрим в $C^n$ точки $\left(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}\right)$, где мультииндекс $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ принимает все значения, удовлетворяющие неравенству $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ $\ldots + \alpha_n \leq m$. Множество указанных точек называется *ньютоновской системой точек*. В него, очевидно, входят $\mu = C_{n+m}^n$ точек, и, как можно доказать, эти точки не принадлежат алгебраической гиперповерхности порядка $m$.

Так, в случае $n=2$, $m=1$ ньютоновская система точек в пространстве $R^2$ состоит из $\mu = C_{2+1}^2 = 3$ точек $\left(S_0, S_0\right)$, $\left(S_0, S_1\right)$, $\left(S_1, S_0\right)$, не лежащих на одной прямой, так как числа $S_0$ и $S_1$ по определению различны.

На рис. 7 изображена ньютоновская система точек для $n=2$, $m=3$ в пространстве $R^2$.

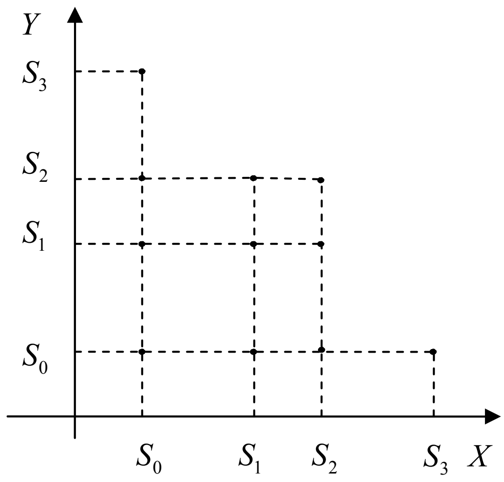



*Рис. 7*

## 1.15.4. Построение интерполяционного многочлена для функции многих переменных

Рассмотрим задачу построения интерполяционного многочлена $P(x)=\sum_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i(x)$ степени $m$ от $n$ переменных. Так как число неизвестных коэффициентов многочлена равно $\mu=C_{n+m}^{n}$, то требуется задать $\mu$ условий для их определения. Выберем $\mu$ точек $x^{(j)}$, $j=\overline{1,\mu}$, – узлов интерполирования и потребуем, чтобы многочлен $P(x)$ в этих точках принимал заданные значения: $\sum_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i\left(x^{(j)}\right)=f_j$, $j=\overline{1,\mu}$. Получили линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов $b_i$ многочлена $P(x)$. Матрица этой системы является матрицей Вандермонда, определяемой узлами интерполирования. На основании теоремы 1.8 получаем следующую теорему.

**Теорема 1.9.** *Интерполяционный многочлен $P(x)$ степени не выше $m$, удовлетворяющий условиям $P\left(x^{(j)}\right)=f_j$, $j=\overline{1,\mu}$, существует и единственный тогда и только тогда, когда узлы интерполирования $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(\mu)}$ не принадлежат алгебраической гиперповерхности порядка $m$.*

Обозначим через $L_i(x)$, $i=\overline{1,\mu}$, интерполяционный многочлен степени не выше $m$, удовлетворяющий условиям $L_i\left(x^{(j)}\right)=\delta_{ij}$, $j=\overline{1,\mu}$, где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера. Для его существования и единственности необходимо и достаточно, чтобы узлы интерполирования $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(\mu)}$ не лежали на алгебраической гиперповерхности порядка $m$.

Многочлены $L_i(x)$, $i=\overline{1,\mu}$, – *фундаментальные многочлены интерполирования*. Если узлы интерполирования вещественные, то коэффициенты многочлена $L_i(x)$ также вещественные.

Утверждение 1.7. *Степень многочлена $L_i(x)$ равна $m$.*

*Доказательство.* Допустим обратное: степень $L_i(x)$ меньше $m$. Обозначим через $R(x)$ многочлен первой степени, который равен нулю в точке $x^{(i)}$. Рассмотрим многочлен $L_i \cdot R$. Он имеет степень не выше $m$ и обращается в нуль во всех точках – узлах интерполирования. Это противоречит тому, что узлы не принадлежат алгебраической гиперповерхности порядка $m$. ☒

Для интерполяционного многочлена $P(x)$ из теоремы 1.9 справедливо представление в форме Лагранжа:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\mu} L_i(x) f_i.$$

Действительно, правая часть этого равенства является многочленом степени не выше $m$ и в точках $x^{(j)}$, $j = \overline{1,\mu}$, принимает значения $f_j$.

## ТЕМА 2

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

## 2.1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ОБЩЕГО ВИДА

### 2.1.1. Постановка задачи. Основные определения

Вопрос о вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (если функция $f(x) \in C[a, b]$ и, следовательно, существует ее первообразная $F(x)$) теоретически разрешен, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

известное как *основная формула интегрального исчисления*. Практически же ею можно воспользоваться в тех редких случаях, когда первообразная $F(x)$ выражается через элементарные функции. По этой причине большое значение имеют формулы для приближенного вычисления интегралов [4].

Наиболее часто для приближенного вычисления рассматриваемого интеграла строятся линейные *квадратурные формулы (квадратуры)* следующего вида:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), \tag{2.1}$$

где $S_n(f)$ – *квадратурная сумма*; $C_i$, $i = 0, 1, ..., n$, – *квадратурные коэффициенты*; а $x_i$, $i = 0, 1, ..., n$, – *узлы квадратуры*, которые считаются попарно различными.

Приближение интеграла квадратурной суммой представляется естественным, так как она является обобщением суммы Римана для рассматриваемого интеграла. Для ряда формул квадратурная сумма совпадает с суммой Римана. Это имеет место, например, для квадратурной формулы прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left[c+(j-1)\frac{b-a}{n}\right]$, $c\in[a,\ a+h]$.

Рассмотрим квадратурную формулу в более общем по сравнению с (2.1) виде:

$$I(f)=\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i). \tag{2.2}$$

Подынтегральная функция представляет собой произведение двух функций $p(x)$ и $f(x)$. Первая из них $p(x)$ считается фиксированной для данной квадратурной формулы (2.2) и называется *весовой функцией.* Функция $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, например непрерывных и таких, что рассматриваемый интеграл существует. В частности, если $p(x)\equiv 1$, то приходим к квадратурной формуле (2.1).

Поясним целесообразность рассмотрения квадратурных формул вида (2.2) с весовой функцией [8]. Применяемый далее способ получения квадратурных формул для $\int_a^b g(x)dx$ основан на приближении подынтегральной функции $g(x)$ интерполяционным многочленом. В некоторых случаях такой метод не может привести к удовлетворительному результату, так как $g(x)$ не допускает хорошего приближения многочленами. Например, если интеграл несобственный, при этом отрезок $[a,\ b]$ конечен и функция $g(x)$ не ограничена на $[a,\ b]$. Естественно попытаться представить подынтегральную функцию в виде $g(x)=p(x)f(x)$, где $p(x)$ содержит особенности функции $g(x)$, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией. Если такое представление возможно, то функцию $p(x)$ следует взять в качестве весовой, а приближать многочленом следует функцию $f(x)$, для которой такое приближение является более оправданным по сравнению с $g(x)$.

Для каждой функции $f(x)\in\Phi$, где $\Phi$ – некоторый класс функций (например, непрерывных на $[a,\ b]$ и таких, что интеграл $I(f)$ существует), разность между интегралом и квадратурной суммой $R_n(f)=$

$= I(f) - S_n(f)$ называют *погрешностью, остаточным членом* или *остатком квадратурной формулы* (2.2).

При этом *оценкой погрешности* на классе $\Phi$ называют величину $R_n(\Phi) = \sup\limits_{f \in \Phi} |R_n(f)|$.

## 2.1.2. Квадратуры, основанные на алгебраическом интерполировании

Наибольшее распространение получили квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании. Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b p(x) f(x) dx, \tag{2.3}$$

где отрезок интегрирования $[a,\ b] \subseteq R$, т. е. может быть и бесконечным. Основное требование к весовой функции состоит в существовании интегралов

$$\int_a^b p(x) x^k dx,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.4}$$

которые называются *моментами весовой функции* $p(x)$. Такое требование в дальнейшем всегда считается выполненным и вызвано тем, что функцию $f(x)$ будем приближать алгебраическим многочленом и после этого интегрировать произведение $p(x)$ на интерполяционный многочлен. Существование интеграла от этого произведения и обеспечивается существованием моментов (2.4). Предполагаем также, что $p(x) \neq 0$ на множестве из $[a,\ b]$ положительной меры. Функцию $f(x)$ считаем такой, что интеграл (2.3) существует.

Пусть на конечном промежутке $[a,\ b]$ по заданному набору попарно различных узлов $\{x_i\}_{i=0}^n$ функция $f(x)$ приближается интерполяционным многочленом $L_n(x)$ степени не выше $n$. Запишем его в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i), \tag{2.5}$$

где $l_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, – фундаментальные многочлены интерполирования.

В интеграле (2.3) функцию $f(x)$ заменим многочленом $L_n(x)$. Получим приближенное равенство $\int\limits_a^b p(x)f(x)dx \approx \int\limits_a^b p(x)L_n(x)dx$, в котором $L_n(x)$ определим правой частью формулы (2.5) и выполним интегрирование:

$$\int\limits_a^b p(x)L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\int\limits_a^b p(x)l_i(x)dx \cdot f(x_i).$$

Получим приближенное равенство вида (2.2), в котором коэффициенты $C_i$ определяются равенствами

$$C_i = \int\limits_a^b p(x)l_i(x)dx,\ i = 0,\ 1,\ ...,\ n. \qquad (2.6)$$

*Определение 2.1.* Квадратурная формула (2.2), в которой коэффициенты $C_i$ определяются по формуле (2.6), а узлы $x_i$, $i = 0,\ 1,\ ...,\ n$, – заданные попарно различные числа, называется *интерполяционной*.

**Теорема 2.1.** *Для того чтобы квадратурная формула* (2.2) *с* $(n+1)$ *попарно различными узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точна, когда* $f(x)$ *является многочленом степени не выше n или, что то же самое, когда* $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n$.

*Доказательство.* Пусть квадратурная формула (2.2) является интерполяционной, а $f(x)$ – многочлен степени не выше *n*. Интерполяционный многочлен, построенный для функции $f(x)$ по $(n+1)$ различным узлам квадратурной формулы (2.2), совпадает с ней: $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} l_j(x)f(x_j)$.

Умножим обе части последнего равенства на весовую функцию $p(x)$ и проинтегрируем по $[a,\ b]$. Получим

$$I(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{j=0}^{n}\int\limits_a^b p(x)l_j(x)dx \cdot f(x_j).$$

Так как квадратурная формула является интерполяционной, то $\int\limits_a^b p(x)l_j(x)dx = C_j$, следовательно, $I(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} C_j f(x_j)$. Таким образом, интерполяционная квадратурная формула с $(n+1)$ попарно различными узлами точна для многочленов степени не выше *n*.

Пусть, далее, квадратурная формула (2.2) с $(n+1)$ попарно различными узлами является точной для многочленов степени не выше $n$. В частности, она должна быть точна для фундаментальных многочленов интерполирования $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, $k=\overline{0,n}$, построенных по узлам рассматриваемой квадратурной формулы: $\int_a^b p(x)l_k(x)dx=\sum_{j=0}^{n}C_j\ l_k(x_j)$. Учитывая, что фундаментальные многочлены интерполирования $l_k(x_j)$ = $=\begin{cases}1,\ k=j;\\ 0,\ k\neq j,\end{cases}$ для $k, j=0,\ 1,\ ...,\ n$, получим, $\int_a^b p(x)l_k(x)dx=C_k$, $k=\overline{0,n}$. По определению квадратурная формула с $(n+1)$ попарно различными узлами и такими коэффициентами является интерполяционной. ☒

Из теории интерполирования известно, что если существует конечная непрерывная производная $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, то для любых $x\in[a,\ b]$ существует точка $\xi\in(a,\ b)$ такая, что погрешность интерполирования функции $f(x)$ многочленом $L_n(x)$, построенным по различным узлам $\{x_i\}_{i=0}^{n}\in[a,\ b]$, имеет представление

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Так как погрешность интерполяционной квадратурной формулы можно записать в виде $R_n(f)=I(f)-S_n(f)=\int_a^b p(x)[f(x)-L_n(x)]dx$, то при условии существования конечной непрерывной производной $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ для остаточного члена интегрирования справедливо представление

$$R_n(f)=\int_a^b p(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx,\ \xi\in(a,\ b).$$

### 2.1.3. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы

*Определение 2.2.* Целое неотрицательное число $d$ называется *алгебраической степенью точности* квадратурной формулы (2.2), если эта формула точна для всех многочленов $f(x)$ степени не выше $d$ и не является точной для одночлена $f\left(x\right)=x^{d+1}$.

Из теоремы 2.1 следует, что алгебраическая степень точности $d$ интерполяционной квадратурной формулы с $(n+1)$ узлами удовлетворяет неравенству $d \geq n$.

**Теорема 2.2.** *При дополнительных ограничениях на весовую функцию*

$$p(x) \geq 0, \quad x \in \left[a,\, b\right], \;\; \mu_0 = \int_a^b p(x)dx > 0 \tag{2.7}$$

*алгебраическая степень точности $d$ квадратурной формулы* (2.2) *с* $(n+1)$ *узлами* (*среди которых могут быть комплексные*) *удовлетворяет неравенству*

$$d \leq 2n+1. \tag{2.8}$$

*Доказательство.* По узлам $x_0,\, x_1,\, ...,\, x_n$ квадратурной формулы $I(f) \approx \approx S_n(f)$ образуем многочлены $\omega\left(x\right)=\left(x-x_0\right)...\left(x-x_n\right)$ и $\overline{\omega}(x) = =(x-\overline{x_0})...(x-\overline{x_n})$, где $\overline{x_k}$ означает комплексно-сопряженное с $x_k$ число. Многочлен $\omega(x)\cdot\overline{\omega}(x)$ степени $\left(2n+1\right)$ при $x \in \left[a,\, b\right]$ равен $|\,\omega(x)\,|^2$ и, следовательно, положителен на $\left[a,\, b\right]$ всюду, кроме $\left(n+1\right)$ точек, где он равен нулю.

Для многочлена $\omega(x)\cdot\overline{\omega}(x)$ квадратурная формула не точна, так как интеграл $\int\limits_a^b p(x)\,|\,\omega(x)\,|^2\, dx > 0$, а квадратурная сумма $\sum\limits_{i=0}^{n} C_i \omega(x_i)\overline{\omega}(x_i) = 0$. Следовательно, алгебраическая степень точности квадратурной формулы (2.2) удовлетворяет неравенству $d < 2\left(n+1\right)$, откуда следует (2.8). ☒

Обозначим через $[n]$ целую часть числа $n$.

*Следствие.* Если квадратурная формула (2.2) с весом, удовлетворяющим условиям (2.7), точна для всех многочленов степени не выше $m$, то число ее узлов удовлетворяет неравенству $n+1 \geq \left[\dfrac{m}{2}\right]+1$.

*Доказательство*. Предположим, что число узлов рассматриваемой квадратурной формулы $n+1 < \left[\dfrac{m}{2}\right]+1$, т. е. $n+1 \leq \left[\dfrac{m}{2}\right]$. Тогда по теореме 2.2 алгебраическая степень точности $d$ этой квадратурной формулы удовлетворяет неравенству $d \leq 2\left[\dfrac{m}{2}\right]-1$, т. е. $d < m$. Это невозможно, так как по определению алгебраическая степень точности $d \geq m$. ☒

## 2.2. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА – КОТЕСА

### 2.2.1. Определение. Степень точности

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ с весовой функцией, равной единице. Из требования существования моментов такой весовой функции следует, что отрезок интегрирования $[a,\ b]$ должен быть конечным. Пусть $n$ – натуральное число. Выберем в качестве узлов равноотстоящие с шагом $h$ точки

$$x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n. \tag{2.9}$$

Концы отрезка $[a,\ b]$ являются узлами, число узлов равно $n+1$.

*Определение 2.3*. Интерполяционные квадратурные формулы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), \tag{2.10}$$

построенные в случае системы равноотстоящих узлов (2.9), называются формулами *Ньютона – Котеса*.

Так как $n$ может принимать значения 1, 2, 3, …, то получаем последовательность квадратурных формул Ньютона – Котеса.

Эти формулы принято называть формулами Ньютона – Котеса в память того, что они в достаточно общей форме были рассмотрены Ньютоном, а коэффициенты для них в случае постоянной весовой функции найдены Котесом при $n = 1,\ 2,\ ...,\ 10$ [1, 9].

В квадратурной формуле (2.10), коэффициенты которой определяются равенствами $C_i = \int\limits_a^b l_i(x)dx$, где $l_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$, а узлы $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n$, произведем замену переменной $x = a + ht$.

Имеем

$$x - x_k = h(t-k),\ (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) = h^{n+1}t(t-1)(t-2)...(t-n),$$

и, следовательно, $C_k = \frac{h\ (-1)^{n-k}}{k!\ (n-k)!}\int\limits_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-k}dt,\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n$.

Заметим, что полученные значения коэффициентов $C_k$ зависят от величины $h=\dfrac{b-a}{n}$. Положим $C_k=(b-a)B_k$, где

$$B_k=\frac{(-1)^{n-k}}{k!\ (n-k)!\ n}\int_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-k}dt\,. \qquad (2.11)$$

Квадратурная формула Ньютона – Котеса (2.10) с коэффициентами $B_k$, определяемыми равенствами (2.11), имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\sum_{k=0}^n B_k f(x_k)\,. \qquad (2.12)$$

Числа $B_k$ не зависят от отрезка $[a,\ b]$, и их можно вычислить. Приведем таблицу значений $B_k$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$, в случае $n=1,\ 2,\ ...,\ 6$.

| $n$ | $B_0$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/2 | | | | | |
| 2 | 1/6 | 4/6 | 1/6 | | | | |
| 3 | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 | | | |
| 4 | 7/90 | 32/90 | 12/90 | 32/90 | 7/90 | | |
| 5 | 19/288 | 75/288 | 50/288 | 50/288 | 75/288 | 19/288 | |
| 6 | 41/840 | 216/840 | 27/840 | 272/840 | 27/840 | 216/840 | 41/840 |

*Замечание 2.1.* Для чисел $B_k$ справедливы равенства $B_k=B_{k-n}$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$, при любых $n$.

В работе [8] установлено, что алгебраическая степень точности $d_n$ формул Ньютона – Котеса (2.12) задается равенствами $d_n=\begin{cases} n,\ n\ -\ \text{нечетное;}\\ n+1,\ n\ -\ \text{четное.}\end{cases}$

## 2.2.2. Частные случаи формулы Ньютона – Котеса

Рассмотрим квадратурные формулы Ньютона – Котеса для $n=$ $=1,\ 2,\ 3$. Квадратурная формула (2.12) при $n=1$ примет вид

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big]. \qquad (2.13)$$

Полученное приближенное равенство (2.13) называется *формулой трапеции*. Алгебраическая степень точности формулы (2.13) равна 1.

При $n = 2$ формула (2.12) преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad (2.14)$$

Квадратурная формула (2.14) называется *формулой Симпсона*. Ее алгебраическая степень точности равна 3.

Положив в формуле (2.12) $n = 3$, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left[ f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right], \qquad (2.15)$$

где $h = \dfrac{b-a}{3}$. Формула (2.15) называется *формулой трех восьмых*. Ее название происходит от коэффициента 3/8. Алгебраическая степень точности равна 3.

*Замечание 2.2.* При $n = 0$ в квадратурной сумме $\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$ имеется единственное слагаемое $C_0 f(x_0)$, где $C_0 = \int_a^b dx = b - a$. Если в качестве $x_0$ взять любую точку $c$ из $[a,\ b]$, то получим приближенное равенство $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(c)$, которое называется *формулой прямоугольников*.

## 2.2.3. О представлении погрешности формул Ньютона – Котеса

Для погрешности $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k f(x_k)$ квадратурной формулы Ньютона – Котеса имеются представления в предположении, что $f(x)$ достаточное число раз дифференцируемая функция. Эти представления и способы их получения различны при $n$ четном и нечетном. Ограничимся рассмотрением простейшего случая $n = 1$.

При $n = 1$ речь идет о представлении погрешности квадратурной формулы трапеции $R_1(f) = \int_a^b f(x)dx - \dfrac{b-a}{2}\left[ f(a) + f(b)\right]$.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет производную второго порядка $f''(x)$, непрерывную на $[a,\, b]$. Пусть $P_1(x)$ – интерполяционный многочлен для функции $f(x)$, построенный по узлам $a$, $b$. Для погрешности интерполирования справедливо представление

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b), \;\; \xi = \xi(x) \in (a,\, b). \tag{2.16}$$

Проинтегрируем обе части равенства (2.16) по $x$ от $a$ до $b$:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx. \tag{2.17}$$

Учитывая, что квадратурная формула трапеции точна для $P_1(x)$: $\int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[P_1(a) - P_1(b)\right] = \frac{b-a}{2}\left[f(a) - f(b)\right]$, то левая часть равенства (2.17) есть погрешность $R_1(f)$ квадратурной формулы трапеции. Получим

$$R_1(f) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx. \tag{2.18}$$

Так как функция $f''(\xi) = f''(\xi(x))$ непрерывна как функция от $x$ на отрезке $[a,\, b]$, кроме, может быть, точек $a,\, b$, а отрицательное на $[a,\, b]$ произведение $(x-a)(x-b)$ не меняет знак на $[a,\, b]$, то подынтегральное выражение $f''(\xi)(x-a)(x-b)$ в правой части формулы (2.18) представляет собой произведение интегрируемых функций. По теореме о среднем существует интеграл этого произведения, и он равен $\mu\int_a^b (x-a)(x-b)dx$, где $m \le \mu \le M$, $m = \min\limits_{x\in[a,\, b]} f''(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,\, b]} f''(x)$. Следовательно, $R_1(f) = $ $= \frac{\mu}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$. Так как $f''(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$ и $m \le \mu \le M$, то по теореме Коши существует точка $\eta \in [a,\, b]$ такая, что $\mu = f''(\eta)$. Учитывая равенство $\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6}$, имеем

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \;\; \eta \in [a,\, b]. \tag{2.19}$$

Полученная формула (2.19) – представление погрешности квадратурной формулы трапеций. Из нее следует оценка $|R_1(f)| \le$ $\le \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,\,b]} |f''(x)|$.

Сформулируем без доказательства следующие утверждения [8].

Утверждение 2.1. *Если $n$ – любое нечетное число и функция $f(x)$ имеет на $[a,\,b]$ непрерывную производную порядка $(n+1)$, то для погрешности квадратурной формулы Ньютона – Котеса с $(n+1)$ узлами справедливо представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b (x-x_0)...(x-x_n)dx,\ \eta\in[a,\,b], \tag{2.20}$$

*где $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ – узлы квадратуры.*

В частности, если в равенстве (2.20) положить $n=1$, приходим к формуле представления погрешности квадратурной формулы трапеции (2.19).

Утверждение 2.2. *Если $n$ – любое четное число и функция $f(x)$ имеет на $[a,\,b]$ непрерывную производную порядка $(n+2)$, то для погрешности квадратурной формулы Ньютона – Котеса с $(n+1)$ узлами справедливо представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_a^b x(x-x_0)...(x-x_n)dx,\ \eta\in[a,\,b], \tag{2.21}$$

*где $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ – узлы квадратуры.*

Положив $n=2$ в равенстве (2.21), приходим к формуле представления погрешности квадратурной формулы Симпсона:

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta),\ \eta\in[a,\,b]. \tag{2.22}$$

Из выражения (2.22) следует оценка $|R_2(f)| \le \frac{(b-a)^5}{2880}\max_{x\in[a,\,b]}|f^{(4)}(x)|$.

## 2.2.4*. Некоторые замечания о свойствах квадратурных коэффициентов

Остановимся на вопросе о поведении коэффициентов $B_k$ при неограниченном возрастании $n$. Первую таблицу коэффициентов $B_k$ для

$n=1,\ 2,\ ...,\ 10$ получил Котес. Было замечено, что при $n=8$ и 10 среди коэффициентов встречаются отрицательные. В последующем были вычислены коэффициенты и при $n>10$. Оказалось, что при $n>10$ среди $B_k$ имеются как положительные, так и отрицательные. Р. О. Кузьмин установил асимптотические формулы для $B_k$, из которых вытекает, что $\gamma_n=\sum\limits_{k=0}^{n}|B_k|$ неограниченно возрастает при $n\to\infty$. Ввиду равенства $\gamma_n=\sum\limits_{k=0}^{n}B_k=1$, которое есть следствие того, что квадратурная формула (2.12) точна для 1, можно сделать заключение, что при больших $n$ среди коэффициентов имеются и положительные и отрицательные. Более того, это утверждение верно при всех $n\geq 10$.

Приведем (согласно [8]) значения $\gamma_n$ при нескольких первых значениях $n$, чтобы иметь представление о быстроте возрастания $\gamma_n$. Так, $\gamma_9=1$, $\gamma_{10}=3{,}06$, $\gamma_{20}=5{,}4\cdot 10^2$, $\gamma_{30}=2{,}12\cdot 10^5$, $\gamma_{40}=1{,}1\cdot 10^8$, а $\gamma_{50}=6{,}7\cdot 10^{10}$.

Рассмотрим квадратурную формулу $\int\limits_a^b p(x)f(x)dx\approx\sum\limits_{i=0}^{n}C_i f(x_i)$ общего вида, при этом будем считать, что она точна для $f(x)=1$: $\int\limits_a^b p(x)dx=$ $=\sum\limits_{i=0}^{n}C_i=\mu_0$ и $\mu_0>0$. Поясним, какое значение при вычислении рассматриваемого интеграла имеет сумма абсолютных величин коэффициентов $\gamma=\sum\limits_{k=0}^{n}|C_k|$.

При вычислении интеграла квадратурная сумма вычисляется лишь приближенно. Вместо значения $f(x_i)$ мы получаем $\tilde f(x_i)$, так что погрешность вычисления равна $\varepsilon_i=f(x_i)-\tilde f(x_i)$. Предположим, что $|\varepsilon_i|\leq\varepsilon$ при $k=0,\ 1\ ,...,\ n$ и что сумма $\sum\limits_{i=0}^{n}C_i\tilde f(x_i)$ вычисляется точно (в частности, не учитываются возможные погрешности округления в значениях $C_i$). Тогда погрешность квадратурной формулы не будет превосходить числа $\varepsilon\sum\limits_{k=0}^{n}|C_k|=\varepsilon\gamma$. На самом деле эта граница погрешности является точной верхней границей, так как погрешность может совпадать с $\varepsilon\gamma$.

Таким образом, точная верхняя граница погрешности вычисления квадратурной суммы пропорциональна $\gamma$. Чем больше $\gamma$, тем большей может быть погрешность вычисления квадратурной суммы.

Величина $\gamma = \sum_{i=0}^{n} |C_i|$ наименьшая, когда $C_i > 0,\ i = 0, 1, ..., n$. Действительно, $\sum_{i=0}^{n} C_i = \mu_0 = \left|\sum_{i=0}^{n} C_i\right| \le \sum_{i=0}^{n} |C_i| = \gamma$. Здесь равенство достигается тогда и только тогда, когда значение $C_i$ одного знака и, следовательно, положительны $(\mu_0 > 0)$. Это обстоятельство объясняет важность для приложений квадратурных формул с положительными коэффициентами.

У квадратурных формул Ньютона – Котеса при $n > 10$ свойство положительности коэффициентов не имеет места, а сумма абсолютных величин коэффициентов $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} |B_k|$ быстро возрастает. Поэтому квадратурные формулы Ньютона – Котеса при больших значениях $n$ применяются лишь в редких случаях.

## 2.3. СОСТАВНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

### 2.3.1. Составные квадратурные формулы общего вида

Точность простейших квадратурных формул Ньютона – Котеса лишь в редких случаях может быть удовлетворительной. Применение квадратурных формул Ньютона – Котеса при больших значениях $n$ нецелесообразно. Выгоднее добиваться повышения точности путем разбиения отрезка интегрирования на достаточно большое число равных интервалов и применения к каждому из них формулы Ньютона – Котеса при небольшом $n$. После суммирования по всем частичным отрезкам получим так называемую *составную квадратурную формулу*. Эти формулы также называются *большими* или *усложненными формулами*.

Пусть $n$ – натуральное число. Положим $x_i = a + ih,\ i = 0, 1, ..., n$, где $h = \frac{b-a}{n}$. В силу свойства аддитивности интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \qquad (2.23)$$

Для вычисления интегралов в правой части равенства (2.23) применим квадратурные правила, подобные квадратурной формуле вида

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \sum_{k=0}^{m} A_k \varphi(a_k) + \tilde{R}(\varphi), \qquad (2.24)$$

где $a_k \in [0,\ 1]$, а $\tilde{R}(\varphi)$ – погрешность формулы (2.24). Заметим, что в формуле (2.24) отрезком интегрирования является $[0,\ 1]$, что не ограничивает общности, но упрощает дальнейшее изложение материала. Квадратурную формулу (2.24) будем называть *исходной квадратурной формулой*.

В правой части равенства (2.23) в интеграле $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ произведем замену переменной $x = x_{i-1} + ht$ и для вычисления полученного интеграла $h\int_0^1 f(x_{i-1} + ht)dt$ воспользуемся правилом (2.24):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\sum_{k=0}^{m} A_k f(x_{i-1} + ha_k) + h\tilde{R}[f(x_{i-1} + ht)].$$

Чтобы записать составную квадратурную формулу, заменим интегралы в правой части равенства (2.23) на полученное выражение. В результате приходим к составной квадратурной формуле общего вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{S}_n(f) + \overline{R}_n(f), \qquad (2.25)$$

где квадратурная сумма $\overline{S}_n(f) = h\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} A_k f(x_{i-1} + ha_k)$, а остаточный член интегрирования $\overline{R}_n(f) = h\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}[f(x_{i-1} + ht)]$.

## 2.3.2. Примеры построения составных квадратурных формул

Приведем примеры построения составных квадратурных формул.

*а*) *Составная квадратурная формула трапеции.* Пусть $n$ – натуральное число, узлы определяются равенствами $x_i = a + ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Для вычисления интегралов в правой части равенства (2.23) в качестве исходной квадратурной формулы на отрезке $\left[x_{i-1},\ x_i\right]$ выберем формулу трапеции $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$. Учитывая, что $x_i - x_{i-1} = h$, можем записать $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$. Приведя подобные слагаемые в правой части последнего приближенного равенства, получим составную формулу трапеции:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2f(a+h) + ... + 2f(a+(n-1)h) + f(b)\right],$$

узлами которой являются точки $a = x_0,\ a+h = x_1,\ ...,\ a+(n-1)h = x_{n-1}$, $b = x_n$, равноотстоящие на отрезке $\left[a,\ b\right]$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.

*б) Составная квадратурная формула Симпсона*. Пусть $m$ – четное число. Положим $h = \frac{b-a}{m}$, $x_i = a + ih,\ i = 0,\ 1,\ ...,\ m$.

Для вычисления интегралов в правой части равенства $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1;3;5;...}^{m-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$ в качестве исходной квадратурной формулы на удвоенном частичном отрезке $\left[x_{i-1},\ x_{i+1}\right]$ применим квадратурную формулу Симпсона: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$. Учитывая, далее, что разность $x_{i+1} - x_{i-1} = 2h$, можем записать $\int\limits_a^b f(x)dx \approx$ $\approx \frac{h}{3}\sum\limits_{i=1;\,3;\,5;\,...}^{m-1}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$. Приведя подобные члены в правой части последнего приближенного равенства, получим составную квадратурную формулу Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3m}\left[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 4f(a+(m-1)h) + f(b)\right],$$

узлами которой являются точки $x_i = a + ih,\ i = 0,\ 1,\ ...,\ m$.

Таким же образом можно получить и другие составные квадратурные формулы Ньютона – Котеса.

### 2.3.3. Алгебраическая степень точности составной квадратурной формулы

**Теорема 2.3.** *Алгебраические степени точности исходной квадратурной формулы* (2.24) *и составной квадратурной формулы* (2.25) *совпадают.*

*Доказательство*. Пусть $d$ – алгебраическая точность квадратурной формулы (2.24). Это означает, что $\tilde{R}(\varphi)=0$, если $\varphi(t)$ – многочлен степени не выше $d$ и $\tilde{R}(t^{d+1})\neq 0$.

Если $f(x)$ – многочлен степени не выше $d$ от переменной $x$, то $f(x_{i-1}+th)$ – многочлен той же степени от переменной $t$, и из определения погрешности $\overline{R}_n(f)$ составной квадратурной формулы следует, что $\overline{R}_n(f)=0$, т. е. квадратурная формула (2.25) точна для всех многочленов степени не выше $d$.

Покажем, что $\overline{R}_n(x^{d+1})\neq 0$. Для этого вычислим погрешность $\overline{R}_n(f)$ в случае $f(x)=x^{d+1}$, используя определение. Получим

$$\overline{R}_n(f)=\overline{R}_n(x^{d+1})=h\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}\left[(x_{i-1}+th)^{d+1}\right]=$$

$$=h\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(h^{d+1}t^{d+1})=nh^{d+2}\tilde{R}(t^{d+1})\neq 0. \boxtimes$$

### 2.3.4. Представление погрешности составной квадратурной формулы

а) *Представление погрешности составной квадратурной формулы общего вида*. Докажем теорему о представлении погрешности составной квадратурной формулы.

**Теорема 2.4.** *Пусть для погрешности исходной квадратурной формулы* (2.24) *справедливо представление*

$$\tilde{R}(\varphi)=C_r\varphi^{(r)}(\eta),\ \eta\in[0,\,1],\ C_r\neq 0, \tag{2.26}$$

*в предположении, что существует производная* $\varphi^{(r)}(t)\in C[0,\,1]$. *Если* $f(x)$ *имеет производную* $f^{(r)}(x)\in C[a,\,b]$, *то для погрешности составной квадратурной формулы* (2.25) *справедливо представление*

$$\overline{R}_n(f)=C_r\frac{(b-a)^{r+1}}{n^r}f^{(r)}(\xi),\ \xi\in[a,\,b].$$

*Доказательство*. В формулу для погрешности составной квадратурной формулы $\overline{R}_n(f) = h\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}[f(x_{i-1} + th)]$ входят погрешности $\tilde{R}(\varphi_i)$ исходной квадратурной формулы (2.24), где $\varphi_i(t) = f(x_{i-1} + ht)$.

Так как существует $f^{(r)}(x)$, то $\varphi_i^{(r)}(t) = f^{(r)}(x_{i-1} + th)h^r$. В силу условия (2.26) имеем $\tilde{R}[f(x_{i-1} + ht)] = C_r h^r f^{(r)}(x_{i-1} + \eta_i h)$, $\eta_i \in [0, 1]$. С помощью последнего равенства находим

$$\overline{R}_n(f) = C_r h^{r+1} \sum_{i=1}^{n} f^{(r)}(x_{i-1} + \eta_i h). \tag{2.27}$$

Положим $m_r = \min\limits_{x\in[a,b]} f^{(r)}(x)$, $M_r = \max\limits_{x\in[a,b]} f^{(r)}(x)$. Так как значения $\eta_i \in [0, 1]$, то точки $x_{i-1} + \eta_i h$, $i = 1, 2, ..., n$, принадлежат $[a, b]$. Следовательно, справедливы неравенства $m_r \le \mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^{(r)}(x_{i-1} + \eta_i h) \le M_r$.

Из непрерывности $f^{(r)}(x)$ на основании теоремы Коши следует, что существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\mu_r = f^{(r)}(\xi)$.

Таким образом, в равенстве (2.27) сумму $\sum_{i=1}^{n} f^{(r)}(x_{i-1} + \eta_i h)$ можно заменить выражением $nf^{(r)}(\xi)$. ☒

*б) Погрешности составных квадратурных формул трапеции и Симпсона.* С помощью теоремы 2.4 получим представление погрешностей составных квадратурных формул трапеции и Симпсона.

Пусть исходной квадратурной формулой является формула трапеции для отрезка $[0, 1]$. Ее погрешность $\tilde{R}(\varphi) = -\frac{1}{12}\varphi''(\eta)$, $\eta \in [0, 1]$. Если существует производная $f''(x) \in C[a, b]$, тогда погрешность составной квадратурной формулы трапеции представима в виде $\overline{R}_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, и имеет место оценка

$$\left|\overline{R}_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|. \tag{2.28}$$

Если исходной квадратурной формулой для отрезка $[0,\ 1]$ длины $2h$ является формула Симпсона, то для остатка интегрирования справедливо представление $\tilde{R}(\varphi) = \dfrac{1}{2880}\varphi^{(4)}(\eta)$, $\eta \in [0,\ 1]$. При условии существования производной $f^{(4)}(x) \in C[a,\ b]$ погрешность составной квадратурной формулы Симпсона представима в виде $\bar{R}_n(f) = -\dfrac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a,\ b]$, где $m$ – число частичных отрезков длины $2h$, или $\bar{R}_n(f) = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a,\ b]$, где $n = 2m$ – число частичных отрезков длины $h$. Отсюда следует оценка

$$\left|\bar{R}_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,\, b]} \left|f^{(4)}(x)\right|. \qquad (2.29)$$

***Пример 2.1.*** Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{3} (2+x)^{-1}dx$, используя составную формулу трапеции при заданном числе $n = 4$ отрезков разбиения, и оценить погрешность метода.

Так как в этом случае $a = -1,\ b = 3,\ f(x) = (2+x)^{-1},\ n = 4$, то

$$\int\limits_{-1}^{3} (2+x)^{-1}dx \approx \frac{3-(-1)}{2\cdot 4}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1{,}6833\ldots.$$

При оценке погрешности будем исходить из неравенства (2.28). Поскольку $f''(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3} > 0,\quad \max\limits_{x\in[-1,\ 3]} \left|f''(x)\right| = f''(-1) = 2$, то приближенное значение интеграла будет с избытком, и $\left|R_4(f)\right| \le \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{4^3}{4^2}\cdot 2 = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$. Точное значение рассматриваемого интеграла равно $\ln 5 \approx 1{,}6094$. Сравнивая это значение с приближенным 1,6833, можно заметить, что для данного случая оценка (2.28) будет явно завышенной.

***Пример 2.2.*** Пусть требуется вычислить с одной верной цифрой после запятой значение интеграла $\int\limits_{0}^{4} (2+x)^{-1}dx.$

Естественно ожидать, что формула Симпсона даст необходимую точность при меньших затратах вычислительного труда по сравнению с правилом трапеции.

В самом деле, $a = 0,\ b = 4,\ f(x) = (2+x)^{-1}$, значит, $f''(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3} > 0$, $\max\limits_{x\in[0,\,4]} \left|f''(x)\right| = f''(0) = \dfrac{1}{4}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(2+x)^5}$, $\max\limits_{x\in[0,\,4]} \left|f^{(4)}(x)\right| = f''(0) = \dfrac{3}{4}$. Неравенства (2.28) и (2.29) примут вид $\left|R_n(f)\right| \le \dfrac{4^3}{12n^2}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{3n^2}$ и $\left|R_n(f)\right| \le$ $\le \dfrac{4^5}{180n^4}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3n^2}\cdot\dfrac{4^2}{5n^2}$ соответственно. Из полученных неравенств видно, что если для получения необходимой точности взять $n \ge 2$, то составная формула Симпсона даст значение интеграла с большей точностью, чем формула трапеции.

Если пользоваться правилом трапеции, то для достижения указанной в условии задачи точности достаточно потребовать $\dfrac{4}{3n^2} \le \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$. Поэтому достаточно взять $n = 6$. Для формулы Симпсона $\dfrac{4}{3n^2}\cdot\dfrac{4^2}{5n^2} \le \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$ и число $n$ можно взять равным 4.

Применяя составную формулу Симпсона при $n = 4$, получим $\int\limits_0^4 (2+x)^{-1}dx \approx \dfrac{4}{3\cdot 4}\left(\dfrac{1}{2} + 4\cdot\dfrac{1}{3} + 2\cdot\dfrac{1}{4} + 4\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6}\right) = 1{,}1$.

*Замечание 2.3.* Формула Симпсона не всегда будет давать более точный результат, чем формула трапеции [10]. Например, для функции $f(x) =$ $= -25x^4 + 45x^2 - 8$ имеем $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 4$. При $n = 2$ составная формула трапеции дает точный результат:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(-25x^4 + 45x^2 - 8\right)dx = \frac{2}{2\cdot 2}\left[f(-1) + 2f(0) + f(1)\right] = 4,$$

тогда как формула Симпсона при том же числе $n = 2$ не обеспечивает даже знака интеграла:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(-25x^4 + 45x^2 - 8\right)dx = \frac{2}{3\cdot 2}\left[f(-1) + 4f(0) + f(1)\right] = -\frac{8}{3}.$$

Отметим, что если при решении задачи вычисления интеграла с заданной степенью точностью по каким-либо причинам достаточно сложно воспользоваться правилами (2.28) и (2.29), то поступают следующим образом: начинают вычисления с некоторым фиксированным шагом $h$, а затем проводят их с шагом $h/2$, вдвое меньшим. При совпадении полученных значений интеграла с заданной степенью точности вычисления прекращают, а в качестве приближенного значения интеграла берут любое из полученных, в противном случае процедура повторяется.

## 2.4. ПРАВИЛА ПРАКТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

### 2.4.1. Правило Рунге

Пусть на отрезке длины $h$ для вычисления интеграла $I(f)$ используется некоторая квадратурная формула

$$I(f) \approx S_h(f), \tag{2.30}$$

имеющая алгебраический порядок точности, равный $m-1$. После разложения $f(x)$ в ряд Тейлора в середине отрезка, точке $c$, получим

$$I(f) - S_h(f) = \alpha f^{(m)}(c) h^{m+1} + o\left(h^{m+2}\right). \tag{2.31}$$

Обозначим через $I(f) \approx S_{h/2}(f)$ составную формулу, полученную применением формулы (2.30) для двух частей исходного отрезка – отрезков длины $h/2$. Тогда с тем же $\alpha$ находим

$$I(f) - S_{h/2}(f) = \alpha f^{(m)}(c) \frac{h^{m+1}}{2^m} + o\left(h^{m+2}\right). \tag{2.32}$$

Вычитая почленно из (2.31) равенство (2.32), имеем

$$S_{h/2}(f) - S_h(f) = \frac{\alpha f^m(c) h^{m+1}}{2^m}\left(2^m - 1\right).$$

С учетом формулы (2.32) правая часть последнего равенства принимает вид $[I(f) - S_{h/2}(f)](2^m - 1)$. Поэтому с точностью до членов $o\left(h^{m+2}\right)$ для представления погрешности составной квадратурной формулы справедливо следующее *правило Рунге*:

$$I(f) - S_{h/2}(f) \approx \frac{S_{h/2}(f) - S_h(f)}{2^m - 1},$$

в котором используются квадратурные суммы $S_h$ и $S_{h/2}$, полученные на сетках с шагами $h$ и $h/2$ соответственно.

### 2.4.2*. Процесс Эйткена

Рассмотрим *процесс Эйткена* как обобщение правила Рунге.

Пусть $I$ – точное значение интеграла $I(f)$. Выберем три равномерные сетки с шагами $h,\ h/2,\ h/4$ и квадратурную формулу, фактический порядок точности $(p-2)$ которой неизвестен для данной функции. Поставим задачу численной оценки погрешности интегрирования.

Обозначим через $S_h$ квадратурную сумму исходной квадратурной формулы, а через $S_{h/2}$ и $S_{h/4}$ – квадратурные суммы составных формул, полученных применением исходной формулы для двух отрезков длины $h/2$ и четырех отрезков длины $h/4$ соответственно.

Учитывая только главный член погрешности, запишем систему следующих трех уравнений:

$$\begin{cases} I = S_h + ch^p, \\ I = S_{h/2} + 2c\left(\dfrac{h}{2}\right)^p, \\ I = S_{h/4} + 4c\left(\dfrac{h}{4}\right)^p \end{cases} \tag{2.33}$$

относительно неизвестных $I,\ c,\ p$.

Из первого и второго уравнений системы (2.33) имеем

$$ch^p\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right) = S_{h/2} - S_h. \tag{2.34}$$

Из второго и третьего уравнений получим $\dfrac{2}{2^p}ch^p\left(1-\dfrac{1}{2^{p-1}}\right) = S_{h/4} - S_{h/2}$.

Из последних двух равенств запишем уравнение

$$2^{p-1} = \frac{S_{h/2} - S_h}{S_{h/4} - S_{h/2}} \tag{2.35}$$

для определения значения $p$.

Получим представление главного члена погрешности. Учитывая формулу (2.34), можем записать $ch^p = \dfrac{S_{h/2} - S_h}{1-\dfrac{1}{2^{p-1}}}$. Из равенства (2.35) имеем $1-\dfrac{1}{2^{p-1}} = 1-\dfrac{S_{h/4} - S_{h/2}}{S_{h/2} - S_h}$. Следовательно, главный член погрешности интегрирования представим в виде $ch^p = \dfrac{\left(S_{h/2} - S_h\right)^2}{2S_{h/2} - S_h - S_{h/4}}$.

Таким образом, применяя исходную квадратурную формулу, порядок точности которой неизвестен, можно оценить погрешность интегрирования по *правилу Эйткена* $I - S_h \approx \dfrac{\left(S_{h/2} - S_h\right)^2}{2S_{h/2} - S_h - S_{h/4}}$, в котором используются квадратурные суммы $S_h$, $S_{h/2}$, $S_{h/4}$, полученные на трех последовательных равномерных сетках с шагами $h$, $h/2$ и $h/4$ соответственно.

## 2.5. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА

### 2.5.1. Постановка задачи

Квадратурная формула общего вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),\ \ x_k \in [a,\, b],$$

содержит в качестве параметров коэффициенты $A_k$, узлы $x_k$, $k = 0,\, 1,\, ...,\, n$, и само число $n$. Выбор этих параметров, вообще говоря, не всегда произвольный, обычно подчинен одной или нескольким целям: 1) минимизации погрешности квадратурной формулы; 2) упрощению вычислений (для этого следует, например, выбрать узлы равноотстоящими или потребовать равенства коэффициентов $A_k \equiv C$ и рассмотреть формулу $\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$, которая содержит $n+3$ параметра: $C,\ n,\ x_0,\, ...,\, x_n$); 3) увеличению степени точности для многочленов до наивысшей возможной.

Так как число параметров $A_k$ и $x_k$ равно $2n+2$, то естественно ожидать, что квадратурная формула при заданном числе $n+1$ узлов будет иметь степень точности $2n+1$. Можно предполагать, что такая степень является, как правило, наивысшей возможной.

К. Гаусс рассмотрел задачу построения интерполяционной квадратурной формулы, точной для многочленов максимально возможной степени, в случае конечного отрезка интегрирования и постоянной весовой функции. Он доказал, что такая задача разрешима при условии специального выбора узлов. Позднее результат К. Гаусса был обобщен на случай произвольного отрезка и неотрицательной весовой функции. Настоящий параграф посвящен изложению этих общих результатов.

## 2.5.2. Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов максимально возможной степени

Ранее (п. 1.1.2) было установлено, что при любом выборе попарно различных точек $x_0, x_1, ..., x_n$ интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.36}$$

при условии специального выбора коэффициентов $A_k = \int_a^b p(x) l_k(x) dx$, где $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$, $k = 0, 1, ..., n$, – фундаментальные многочлены интерполирования, является точной для алгебраических многочленов степени не выше $n$. Поставим задачу максимально возможного повышения степени точности этой формулы за счет выбора оставшихся параметров – узлов $x_k$, $k = 0, 1, ..., n$.

Пусть весовая функция удовлетворяет условиям

$$p(x) \geq 0,\ x \in [a, b],\ \ \mu_0 = \int_a^b p(x) dx > 0. \tag{2.37}$$

*Определение 2.4.* Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* относительно веса $p(x)$ и отрезка $[a, b]$, если справедливо равенство $\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x) dx = 0$.

В частности, если $p(x) \equiv 1$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ортогональны на $[a, b]$.

**Теорема 2.5.** *Для того чтобы квадратурная формула* (2.36) *была точна для любого многочлена степени не выше* $2n+1$, *необходимо и достаточно, чтобы*:

*1) эта формула была интерполяционной*;

*2) ее узлы* $x_0, x_1, ..., x_n$ *являлись корнями ортогонального относительно веса* $p(x)$ *и отрезка* $[a, b]$ *многочлена* $\omega_n(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$ *к любому многочлену степени не выше* $n$.

*Доказательство*. Пусть формула (2.36) точна для всех многочленов степени не выше $2n+1$. Следовательно, она является интерполяционной.

Образуем по узлам формулы (2.36) многочлен $\omega_n(x)=(x-x_0)...$ $...(x-x_n)$ и составим произведение $\omega_n(x)q(x)$, где $q(x)$ – многочлен степени не выше *n*. Степень этого произведения не выше $2n+1$, поэтому для него квадратурная формула (2.36) точна: $\int_a^b p(x)\omega_n(x)q(x)dx=$ $=\sum_{k=0}^{n} C_k\omega_n(x_k)q(x_k)=0$, так как $\omega_n(x_k)=0$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$. Таким образом, $\omega_n(x)$ – ортогональный к любому многочлену степени не выше $n$ относительно веса $p(x)$ и $[a,\ b]$ многочлен.

Докажем обратное утверждение. Пусть $P(x)$ – любой многочлен степени не выше $2n+1$. Выполним деление $P(x)$ на $\omega_n(x)$. Имеем

$$P(x)=\omega_n(x)q(x)+r(x), \tag{2.38}$$

где $q(x)$ и $r(x)$ – частное и остаток, многочлены степени не выше $n$. Умножим обе части равенства (2.38) на весовую функцию $p(x)$ и проинтегрируем от $a$ до $b$. Получим

$$\int_a^b p(x)P(x)dx=\int_a^b p(x)\omega_n(x)q(x)dx+\int_a^b p(x)r(x)dx. \tag{2.39}$$

Первый интеграл в правой части (2.39) равен нулю в силу условия ортогональности, второй интеграл точно равен квадратурной сумме, так как степень многочлена $r(x)$ не выше *n,* а формула (2.36) по условию интерполяционная. Таким образом, получаем $\int_a^b p(x)P(x)dx=\sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k)$. В силу представления (2.38) имеем $P(x_k)=r(x_k)$, следовательно,

$$\int_a^b p(x)P(x)dx=\sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k),$$

т. е. квадратурная формула точна для любых многочленов степени не выше $2n+1$. ☒

Квадратурная формула, о которой идет речь в теореме 2.5, называется *квадратурной формулой гауссова типа*.

***Пример 2.3.*** Рассмотрим схему построения квадратурной формулы гауссова типа $\int_0^1 (1+x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ в случае $n=3$. Неизвестными в этой формуле являются узлы $x_k$ и коэффициенты $A_k$, $k=\overline{0,3}$. Так как весовая функция $p(x) = 1 + x$ удовлетворяет дополнительным условиям (2.37): $p(x) \geq 0,\ x \in [0,\ 1],\ \mu_0 = \int_0^1 p(x)dx > 0$, то для построения квадратуры воспользуемся теоремой 2.5.

Для определения узлов $x_k$, $k = \overline{0,3}$, искомой квадратурной формулы запишем многочлен степени $n+1=4$ вида

$$\omega_3(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

с неизвестными коэффициентами $a_k$, $k = \overline{0,3}$.

Исходя из условий ортогональности многочлена $\omega_3(x)$ относительно веса $p(x) = 1 + x$ и отрезка $[0,\ 1]$ к любому многочлену степени не выше третьей, составим систему из четырех уравнений

$$\left\{ \int_0^1 (1+x)\cdot\omega_3(x)\cdot x^i dx = 0,\ i = \overline{0,3}, \right.$$

для нахождения неизвестных $a_k$, $k = \overline{0,3}$.

Решив полученную систему уравнений, тем самым вычислив коэффициенты $a_k$, $k = \overline{0,3}$, многочлена $\omega_3(x)$, а затем его корни, выберем последние в качестве узлов $x_k$, $k = \overline{0,3}$, квадратуры.

Коэффициенты $A_k$ квадратурной формулы определим, используя равенства $A_k = \int_0^1 (1+x)l_k(x)dx$, где $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq k}}^{3} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$, $k = \overline{0,3}$.

Заметим, что полученная по такой схеме квадратурная формула будет точна для любого многочлена степени не выше седьмой.

### 2.5.3. Существование и единственность квадратурной формулы гауссова типа

Выясним вопрос о существовании многочлена $\omega_n(x)$, удовлетворяющего второму условию в доказанной теореме 2.5. Сейчас удобно рассматривать не корни $x_k$ многочлена $\omega_n(x)$, а его разложение по степеням $x$ и коэффициенты этого разложения:

$$\omega_n(x) = x^{n+1} + a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\,. \tag{2.40}$$

**Теорема 2.6.** *Пусть весовая функция удовлетворяет условиям* (2.37). *Тогда при всяком n существует единственный многочлен вида* (2.40), *ортогональный по весу* $p(x)$ *ко всякому многочлену степени меньшей или равной n.*

*Доказательство.* Ортогональность к любому многочлену степени не выше $n$ равносильна ортогональности к $1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^{n-1},\ x^n$. Условия же ортогональности к этим одночленам дадут следующую систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n$:

$$\int_a^b p(x)\left[x^{n+1}+a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\right]x^i dx=0,\ i=0,\ 1,\ ...,\ n. \qquad (2.41)$$

Чтобы убедиться в существовании и единственности решения системы (2.41), достаточно проверить, что однородная система

$$\int_a^b p(x)\left[a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\right]x^i dx=0,\ i=0,\ 1,\ ...,\ n,$$

имеет только нулевое решение. Если выписать уравнения однородной системы для $i=0,\ 1,\ ...,\ n$, умножить их последовательно на $a_n,\ a_{n-1},\ ...,\ a_1,\ a_0$ и результаты сложить, получим равенство $\int_a^b p(x)\left[a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\right]^2 dx=0$.

Далее, так как $p(x)\ge 0$ и $\int_a^b p(x)dx>0$, то многочлен $a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+...+a_n\equiv 0$, что возможно лишь в случае $a_0=a_1=a_2=...=a_n=0$. Следовательно, у однородной системы существует только нулевое решение. ☒

Заметим, что узлы $x_k$ квадратурной формулы предполагаются лежащими на отрезке интегрирования $[a,\ b]$. Значит, остается выяснить, будут ли корни многочлена $\omega_n(x)$, найденного по условиям ортогональности (2.41), принадлежать этому отрезку.

**Теорема 2.7.** *Пусть весовая функция знакопостоянна на* $[a,\ b]$ *и многочлен* $\omega_n(x)$ *ортогонален на* $[a,\ b]$ *с весом* $p(x)$ *ко всякому многочлену степени не выше n. Тогда корни многочлена* $\omega_n(x)$ *лежат внутри* $[a,\ b]$ *и различны между собой.*

*Доказательство.* Пусть у многочлена $\omega_n(x)$ всего $m+1$ различных корней, имеющих нечетную кратность и лежащих внутри $[a,\ b]$. Корни нечетной кратности существуют, так как $\int_a^b p(x)\omega_n(x)\cdot 1\, dx = 0$ в силу ортогональности $\omega_n(x)$ с весом $p(x)$ к 1. Пусть $x'_0, x'_1, ..., x'_m$ – $m+1$ различных корней нечетной кратности, принадлежащих интервалу $(a, b)$. Составим многочлен $Q(x) = (x - x'_0)(x - x'_1)...(x - x'_m)$ степени $m+1 \le n+1$.

Произведение $\omega_n(x)Q(x)$ является многочленом, у которого на $(a, b)$ все корни четной кратности. Значит, на отрезке $[a, b]$ такой многочлен сохраняет знак. Но тогда $\int_a^b p(x)\omega_n(x)Q(x)dx \ne 0$ в силу условий $p(x) \ge 0$ и $\int_a^b p(x)dx > 0$.

Так как $\omega_n(x)$ ортогонален ко всем многочленам степени не выше *n*, то из последнего утверждения следует, что степень $Q(x)$ больше или равна $n+1$. Но по предположению степень $Q(x)$ равна $m+1$ и не превышает $n+1$. Таким образом, $m+1 = n+1$. ☒

*Следствие.* При сделанных предположениях (2.37) о весовой функции формула гауссова типа всегда существует. Для заданного числа *n* такая формула единственна.

*Доказательство*. Существование формулы следует из теорем 2.6 и 2.7. Докажем ее единственность.

Если бы существовало два ортогональных многочлена $\omega_n(x)$ и $\omega_n^*(x)$, то их разность $Q(x) = \omega_n(x) - \omega_n^*(x)$ (считаем, что при старшей степени коэффициенты у $\omega_n(x)$ и $\omega_n^*(x)$ равны 1) была бы многочленом степени *n*, и по свойству ортогональности с весом $p(x)$ к любому многочлену степени не больше *n* мы получили бы

$$\int_a^b p(x)[\omega_n(x) - \omega_n^*(x)]Q(x)dx = \int_a^b p(x)Q^2(x)dx = 0,$$

что возможно лишь при $Q(x) = \omega_n(x) - \omega_n^*(x) \equiv 0$. ☒

Покажем, что квадратурная формула $\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 2.5, не может быть точна для всех многочленов степени $2n+2$, т. е. число $2n+1$ является наивысшей алгебраической степенью точности этой формулы.

**Теорема 2.8.** *Если* $p(x)$ *сохраняет знак на* $[a,\ b]$, *то ни при каких коэффициентах* $A_k$ *и узлах* $x_k$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$, *равенство*

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.42}$$

*не может быть точным для всех многочленов степени* $2n+2$.

*Доказательство.* По квадратурным узлам $x_k$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$, построим функцию $\omega_n(x)=(x-x_0)...(x-x_n)$ и рассмотрим многочлен $f(x)=\omega_n^2(x)$ степени $2n+2$. Он положителен всюду на $[a,\ b]$, кроме точек $x_k$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$. Интеграл $\int_a^b p(x)\omega_n^2(x)dx \neq 0$, так как произведение $p(x)\omega_n^2(x)$ сохраняет знак и $\int_a^b p(x)dx \neq 0$, а квадратурная сумма $\sum_{k=0}^{n} A_k\omega_n^2(x_k)=0$ при любом выборе коэффициентов $A_k$, $k=0,\ 1,\ ...,\ n$. Таким образом, существует многочлен степени $2n+2$, для которого равенство (2.42) не является точным. ☒

Число $2n+1$ является наивысшей алгебраической степенью точности формулы (2.42), в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 2.5. Отсюда происходит другое название квадратурных формул гауссова типа – *квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.*

## 2.5.4. О положительности квадратурных коэффициентов

Пусть весовая функция удовлетворяет дополнительным условиям (2.37).

**Теорема 2.9.** *Коэффициенты формул типа Гаусса положительны.*

*Доказательство.* Рассмотрим многочлен $f(x)=\left[\dfrac{\omega_n(x)}{x-x_k}\right]^2$ степени $2n$. В узлах $x_j$ имеем $f(x_j)=\begin{cases} 0, & j\neq k; \\ \left[\omega_n'(x_k)\right]^2, & j=k. \end{cases}$

Для многочлена $f(x)$ формула типа Гаусса точна, т. е. $\int_a^b p(x)f(x)dx = A_k\left[\omega'_n(x_k)\right]^2$. Из последнего равенства видно, что $A_k > 0$, так как $\int_a^b p(x)f(x)dx > 0$ в силу предположения о весовой функции $p(x)$ и определения $f(x)$. ☒

## 2.5.5. Представление остаточного члена формулы типа Гаусса

Приведем без доказательства теорему о представлении погрешности квадратурной формулы гауссова типа [8].

**Теорема 2.10.** *Пусть отрезок интегрирования* $[a, b]$ *конечен. Если функция* $f(x)$ *имеет непрерывную производную порядка* $2n+2$, *то существует точка* $\eta \in [a, b]$ *такая, что погрешность квадратурной формулы* (2.36) *гауссова типа имеет представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b p(x)\omega_n^2(x)dx,$$

*где* $\omega_n(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$, *а точки* $x_k$, $k = 0,\ 1,\ ...,\ n$, *– узлы квадратуры.*

## 2.5.6*. О сходимости квадратурных формул

Докажем теорему о сходимости квадратурных формул типа Гаусса. Для простоты записи ранее не отмечалась зависимость узлов и коэффициентов от числа $n$. В теореме 2.11 и ее доказательстве квадратурную сумму формулы гауссова типа будем записывать в виде $\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

**Теорема 2.11.** *Если отрезок интегрирования* $[a, b]$ *конечен и функция* $f(x)$ *непрерывна на нем, то имеет место сходимость квадратурных сумм формулы типа Гаусса к интегралу при* $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x)f(x)dx. \qquad (2.43)$$

*Доказательство*. Требуется доказать, что при $n \to \infty$ величина $R_n(f) = \int\limits_a^b p(x) f(x) dx - \sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \to 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $[a, b]$ конечен и функция $f(x)$ непрерывна на нем, то по теореме Вейерштрасса найдется многочлен $P(x)$ такой, что

$$|f(x) - P(x)| \le \varepsilon \tag{2.44}$$

при всех $x \in [a, b]$. Имеем

$$R_n(f) = \int\limits_a^b p(x)(f(x) - P(x))dx + \left[ \int\limits_a^b p(x)P(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right] + \\ + \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})). \tag{2.45}$$

Выражение в квадратных скобках равенства (2.45) представляет собой остаток $R_n(P)$ квадратурной формулы для многочлена $P(x)$. Если обозначить через $N$ степень этого многочлена, то при $2n+1 > N$ имеет место равенство $R_n(P) = 0$. Два оставшихся выражения в правой части (2.45) несложно оценить на основании неравенства (2.44):

$$\left| \int\limits_a^b p(x)(f(x) - P(x))dx \right| \le \varepsilon \int\limits_a^b p(x)dx,$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})) \right| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = \varepsilon \int\limits_a^b p(x)dx.$$

Итак, при $2n+1 > N$ получим $|R_n(f)| \le 2\varepsilon \int\limits_a^b p(x)dx$, откуда следует (2.43). ☒

Приведем без доказательства теорему Стеклова [8] о сходимости последовательности квадратурных формул общего вида (не обязательно типа Гаусса):

$$\int\limits_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{2.46}$$

**Теорема 2.12.** *Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен и весовая функция $p(x)$ интегрируема на нем. Для того чтобы имело место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int\limits_a^b p(x) f(x) dx$ для любой* *непрерывной на* $[a,\ b]$ *функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно*, *чтобы выполнялись условия*:

*1*) *это предельное соотношение имеет место*, *когда* $f(x)$ *– любой многочлен*;

*2*) *существует такое число K*, *что* $\sum_{k=0}^{n}\left|A_k^{(n)}\right| \le K,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ .

Условие 2) теоремы 2.12 выполнено, если квадратурные формулы (2.46) точны для $f(x) = 1$ и их коэффициенты положительны. Действительно, в этом случае $\sum_{k=0}^{n}\left|A_k^{(n)}\right| = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = \int_a^b p(x)dx,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$ Если, кроме того, квадратурные формулы (2.46) интерполяционные, то выполнено и условие 1) теоремы 2.12. Таким образом, теорема 2.11 является частным случаем теоремы 2.12.

Теорема о сходимости последовательности квадратурных формул – еще один факт, подтверждающий важность свойства положительности коэффициентов квадратурной формулы (см. также п. 2.2.4).

## 2.6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССОВА ТИПА

Рассмотрим квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности, соответствующие классическим весам: постоянному весу $p(x) \equiv 1$, весу Якоби $p(x) = (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$, $x \in (a,\ b)$, Чебышева – Лагерра $p(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $x \in (0,\ \infty)$ и Чебышева – Эрмита $p(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty,\ \infty)$. Эти весовые функции позволяют заранее учитывать наиболее часто встречающиеся в приложениях особенности подынтегральных функций $F(x)$ путем представления их в виде произведения $F(x) = p(x)f(x)$.

### 2.6.1. Квадратурная формула гауссова типа с весом Якоби

Рассмотрим *весовую функцию Якоби* $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, определенную на отрезке $[-1,\ 1]$ и параметрами $\alpha,\ \beta > -1$. Ограничительные условия на $\alpha$ и $\beta$ обеспечивают существование интеграла $\int_{-1}^{1} p(x)dx$ и тем самым всех моментов веса $p(x)$. Очевидно, выполнены и условия $p(x) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$, $\mu_0 = \int\limits_{-1}^{1} p(x)dx > 0$.

*Определение 2.5.* Ортогональный ко всем многочленам степени не выше $n-1$ относительно веса Якоби на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, удовлетворяющий условию

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(1+\alpha)},$$

называется *многочленом Якоби*.

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, определяемая интегралом Эйлера второго рода $\Gamma(z) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Отметим некоторые свойства гамма-функций. Нетрудно видеть, что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Из него следует, что для натуральных $n$ справедлива формула $\Gamma(n+1) = n!$, а в случае произведения последовательных чисел имеет место следующее равенство:

$$z(z+1)(z+2)...(z+n) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma(z)}.$$

Представление многочлена Якоби в виде

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$$

называется *формулой Родрига.*

Квадратурная формула наивысшей степени точности с весом Якоби имеет вид

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k), \qquad (2.47)$$

где узлы $x_k$, $k = 1, 2, ..., n$, – корни многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, определяемого формулой Родрига, зависящие от $n$, $\alpha$ и $\beta$.

Приведем [5] формулу для коэффициентов квадратурной формулы (2.47):

$$C_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\left(1-x_k^2\right)\left[P_n^{(\alpha,\,\beta)\prime}(x_k)\right]^2}. \qquad (2.48)$$

Для погрешности квадратурной формулы гауссова типа с весом Якоби справедливо [5] равенство

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma^2(2n+\alpha+\beta+1)(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \qquad (2.49)$$

где $\eta \in [-1,\, 1]$, в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывную на $[-1,\, 1]$ производную порядка $2n$.

Функция Якоби позволяет учитывать степенные особенности подынтегральной функции $F(x) = (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} f(x)$ на концах $[a,\, b]$ при достаточной гладкости $F(x)$ внутри отрезка.

Остановимся на четырех частных случаях квадратурной формулы с весом Якоби.

1. Пусть $\alpha = \beta = 0$, тогда $p(x) \equiv 1$. В этом случае квадратурная формула (2.47) имеет вид $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} C_k f(x_k)$ и называется *формулой Гаусса*.

Ее узлами являются корни многочлена Лежандра (они симметричны относительно точки 0) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$, а коэффициенты $C_k$ при $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$ можно найти как непосредственно, так и из общей формулы (2.48) для представления коэффициентов: $C_k = \frac{2}{\left(1-x_k^2\right)\left[P_n'(x_k)\right]^2}$.

Погрешность формулы Гаусса имеет представление

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left[(2n)!\right]^3} f^{(2n)}(\eta),\ \eta \in [-1,\, 1],$$

которое следует из (2.49) при $\alpha = \beta = 0$.

Отметим, что постоянная весовая функция выбирается в случае, когда подынтегральная функция $F(x)$ не имеет особенностей и является достаточно гладкой на всем отрезке $[a,\, b]$.

2. Пусть $\alpha = \beta = -1/2$, тогда $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – *вес Чебышева*. Квадратурная формула (2.47) в этом случае имеет вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k).$$

Узлы полученной формулы $x_k = \cos\left[\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, пронумерованные в порядке убывания, являются корнями полинома Якоби $P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x) = \lambda T_n(x)$, где $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$ – многочлен Чебышева первого рода, а $\lambda$ – постоянный множитель.

Коэффициенты $C_k$ можно найти как из общей формулы: $C_k = \dfrac{\Gamma^2(n+1/2)}{n!\Gamma(2n)n^2\lambda^2}$ (заметим, что они не зависят от $k$), так и непосредственно. Вычислим $C_k \equiv C$, исходя из свойства инвариантности квадратурной формулы относительно 1. Итак, квадратурная формула должна быть точна для функции $f(x) \equiv 1$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k = nC = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$. Отсюда $C = \pi/n$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Квадратурная формула (2.47) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\left[\frac{2k-1}{2n}\pi\right]\right). \tag{2.50}$$

Она называется квадратурной *формулой Мелера* и замечательна тем, что имеет одинаковые коэффициенты. Если значения $f(x)$ в узлах уже вычислены, то для вычисления квадратурной суммы достаточно выполнить только одно умножение (вместо $n$ умножений в случае, когда коэффициенты попарно различны).

Погрешность формулы Мелера задается равенством

$$R_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in [-1,\ 1]. \tag{2.51}$$

Действительно, из формулы для представления погрешности общей формулы гауссова типа получим $R_n(f) = \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right)^2 dx$.

Учитывая, что интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n^2(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$ приходим к равенству (2.51).

3. Пусть $\alpha=\beta=1/2$, тогда $p(x)=\sqrt{1-x^2}$. Узлами квадратурной формулы с таким весом являются [8] корни многочлена Чебышева $U_n(x)=\frac{\sin\left[(n+1)\arccos(x)\right]}{\sqrt{1-x^2}}$ второго рода – точки $x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k=1$, 2, ..., $n$, которые пронумерованы в порядке убывания. Коэффициенты квадратуры представимы как $C_k=\frac{\pi}{n+1}\left(\sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$, а сама квадратурная формула гауссова типа с весом $p(x)=\sqrt{1-x^2}$ имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Погрешность интегрирования задается равенством

$$R_n(f)=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n+1}}f^{(2n)}(\eta),\ \eta\in[-1,\ 1].$$

4. Пусть $\alpha=-\beta=1/2$, тогда $p(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Узлами квадратурной формулы гауссова типа с таким весом являются корни многочлена Якоби $P_n^{(1/2,\ -1/2)}(x)$, которые определяются [8] равенствами $x_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Для коэффициентов квадратуры справедливо представление $C_k=\frac{4\pi}{2n+1}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$.

Таким образом, квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности с весом $p(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)\,dx\approx\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

Ее погрешность может быть представлена как

$$R_n(f)=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n}}f^{(2n)}(\eta),\ \eta\in[-1,\ 1].$$

## 2.6.2. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева – Эрмита

Вес *Чебышева – Эрмита* $p(x)=e^{-x^2}$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, связан со скоростью убывания подынтегральной функции $F(x)=e^{-x^2}f(x)$ при $x\to\pm\infty$ в случае интегрирования по всей числовой оси.

Квадратурная формула гауссова типа с весом Чебышева – Эрмита имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{j=k}^{n} C_k f(x_k). \tag{2.52}$$

Ее узлами являются [8] корни многочлена Чебышева – Эрмита $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$, которые симметричны относительно точки 0.

Коэффициенты квадратуры задаются равенствами $C_k=\dfrac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{\left[H_n'(x_k)\right]^2}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Погрешность интегрирования представима в виде $R_n(f)=\dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\eta)$, $\eta\in R$.

## 2.6.3. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева – Лагерра

Вес *Чебышева – Лагерра* $p(x)=x^s e^{-x}$, $x\in(0,\ \infty)$, учитывает степенную особенность в точке $x=0$ и связан со скоростью убывания подынтегральной функции $F(x)=x^s e^{-x}f(x)$ при $x\to\infty$.

Квадратурная формула гауссова типа с весом Чебышева – Лагерра имеет вид

$$\int_{0}^{\infty} x^s e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k). \tag{2.53}$$

Ее узлы – корни многочлена Чебышева – Лагерра $L_n^{(s)}(x)=$ $=(-1)^n x^{-s}e^{x}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{s+n}e^{-x}\right)$, коэффициенты [8] задаются равенствами

$C_k = \dfrac{n!\Gamma(n+s+1)}{x_k\left[L_n^{(s)\prime}(x_k)\right]^2}$, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$, а погрешность имеет представление

$$R_n(f) = \frac{n!\Gamma(n+s+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta),\ \eta \in (0,\ \infty).$$

***Пример 2.4.*** Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой Мелера (2.50) с остаточным членом (2.51).

В случае $n=5$ погрешность интегрирования $R_5(f)$ меньше двух единиц 5-го десятичного знака. Суммируя значения функции $f(x)=e^{2x}$ в узлах квадратуры $x_k = \cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$, получим число 11,397928. Следовательно, значение интеграла $I = \dfrac{11,397928}{5}\pi$ приближенно равно значению $7,161529$, которое отличается от точного значения этого интеграла на одну единицу шестого десятичного знака.

***Пример 2.5.*** Пусть требуется вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x)dx$.

Для решения поставленной задачи применим формулу гауссова типа (2.52) с весом Чебышева – Эрмита при $n=5$.

Так как узлы расположены симметрично относительно $x=0$ и симметричным узлам соответствуют одинаковые коэффициенты $C_k = \dfrac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{\left[M_n'(x_k)\right]^2}$, то получаем $I \approx C_3\cos(x_3) + 2C_4\cos(x_4) + 2C_5\cos(x_5) =$

$$= 0,945309 + 2(0,393619\cdot 0,574689 - 0,019953\cdot 0,434413) = 1,380390.$$

Для остатка интегрирования справедлива оценка $\left|R_n(f)\right| < 0,2\cdot 10^{-5}$. При этом точное значение интеграла равно $\sqrt{\pi}e^{-1/4} = 1,3803885...$ .

***Пример 2.6.*** Пусть требуется вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{xdx}{e^x + e^{-x} - 1}$.

Перепишем его в виде $I = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{xe^{-x}}{1+e^{-2x}-e^{-x}}dx$ и воспользуемся квадратурной формулой гауссова типа (2.53) с весом Чебышева – Лагерра. Положим $n=2$. Многочлен Чебышева – Лагерра второй степени имеет вид $L_2^{(1)} = x^2 - 6x + 6$, его корни равны $x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{3}$. Для квадратурных коэффициентов $C_1$ и $C_2$ справедливы выражения $C_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$, $C_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$.

В результате вычислений $I \approx C_1 f\left(x_1\right) + C_2 f\left(x_2\right)$ получим приближенное значение интеграла $I \approx 1{,}20$. Оно отличается от точного значения этого интеграла, равного 1,17…, третьей значащей цифрой.

# 2.7. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

## 2.7.1. Постановка задачи. Основные определения

Пусть требуется вычислить интеграл $I(f) = \int\limits_{\Omega} p(x) f(x) dx$, где $\Omega$ – область из $R^n$, имеющая внутренние точки, $x = (x_1,\, ...,\, x_n)$; $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$, $p(x)$ – весовая функция.

*Определение 2.6.* Приближенное равенство

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}) \tag{2.54}$$

называется *кубатурной формулой* при $n \geq 2$ и *квадратурной* при $n=1$. Сумма в правой части равенства (2.54) называется *кубатурной суммой*, точки $x^{(j)} = (x_1^{(j)},\, ...,\, x_n^{(j)})$ – *узлами*, а числа $C_j$ – *коэффициентами* кубатурной формулы. Обычно узлы принадлежат $\Omega$, но это требование не является обязательным.

## 2.7.2. Кубатурные формулы, основанные на интерполировании. Существование и единственность

Рассмотрим способ построения кубатурных формул, основанный на интерполировании. Так как $f(x)$ будет заменена интерполяционным многочленом, то необходимо потребовать, чтобы существовал интеграл от произведения весовой функции $p(x)$ на этот многочлен. Поэтому будем предполагать, что $p(x)$ – вещественная функция, заданная на $\Omega$, и что существуют моменты весовой функции – интегралы

$$\mu_1 = \int_\Omega p(x)\varphi_i(x)dx,\ i = 1,\ 2,\ \dots,$$

где $\varphi_i(x)$ – одночлены от $n$ переменных.

Выберем $\mu = C_{n+m}^n$ точек $x^{(j)}$, $j = 1,\ 2,\ \dots,\ \mu$, не лежащих на алгебраической гиперповерхности порядка $m$ и принадлежащих $\Omega$, в качестве узлов интерполирования и построим интерполяционный многочлен $P(x)$ степени не выше $m$ функции $f(x)$.

Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1,$ $2,\ \dots,\ \mu$. Он существует, является единственным и имеет представление $P(x) = \sum_{i=1}^{\mu} L_i(x) f(x^{(j)})$, где $L_i(x^{(j)}) = \delta_{ij},\ i, j = 1,\ 2,\ \dots,\ \mu$.

Подставим в интеграл $I(f)$ вместо $f(x)$ интерполяционный многочлен $P(x)$. Получим приближенное равенство вида (2.54)

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{\mu} I(L_i) f(x^{(i)}), \tag{2.55}$$

в котором число узлов $N = \mu$, а коэффициенты

$$C_i = I(L_i),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ \mu. \tag{2.56}$$

*Определение 2.7.* Кубатурная формула (2.54), в которой $N = \mu$ узлов не лежат на алгебраической гиперповерхности порядка $m$, а коэффициенты определяются равенствами (2.56), называется *интерполяционной кубатурной формулой.*

**Теорема 2.13.** *Если точки* $x^{(i)}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ \mu$, *не лежат на алгебраической гиперповерхности порядка m, то существует и притом единственная интерполяционная кубатурная формула, узлами которой являются эти точки.*

Доказательство теоремы следует из того, что кубатурная формула однозначно определяется заданием вещественных узлов, так как ее коэффициенты определяются единственным образом с помощью равенств (2.56). Из вещественности узлов интерполяционной кубатурной формулы следует вещественность ее коэффициентов, так как фундаментальный многочлен интерполирования, построенный по вещественным узлам, является вещественным. ☒

## 2.7.3. Свойство инвариантности интерполяционной кубатурной формулы относительно многочленов соответствующей степени

Утверждение 2.3. *Интерполяционная кубатурная формула с* $\mu$ *узлами обращается в точное равенство, когда* $f(x)$ *– многочлен степени не выше m.*

*Доказательство.* В этом случае $f(x)$ тождественно совпадает со своим интерполяционным многочленом и, следовательно, равенство (2.55) точное. ☒

*Замечание 2.4.* При $n=1$ верно обратное утверждение п. 2.1.2: если квадратурная формула с $\mu = m+1$ различными узлами точна для всех многочленов степени не выше *m*, то она интерполяционная. При $n \geq 2$ обратное утверждение неверно.

Приведем без доказательства следующую теорему [8].

**Теорема 2.14.** *Пусть кубатурная формула* (2.54) *точна для всех многочленов степени не выше m и число ее узлов удовлетворяет неравенству* $N \leq \mu$. *Для того чтобы формула* (2.54) *была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$[\varphi_1(x^{(j)}) \quad \varphi_2(x^{(j)}) \quad \ldots \quad \varphi_\mu(x^{(j)})]_{j=1}^{N},$$

*построенной по узлам формулы* (2.54), *был равен N.*

## 2.7.4. Методы построения кубатурных формул

В случае простейших областей интегрирования в $R^n$ (куб, шар, симплекс) применяются методы построения кубатурных формул, известные как метод повторного применения квадратурных формул и метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим каждый из них на конкретных примерах. Для упрощения записи будем считать $n=2$ и переменные $x_1, x_2$ будем обозначать $x, y$.

а) *Метод повторного применения квадратурных формул.* Рассмотрим этот метод для квадрата и треугольника и единичной весовой функции.

1. Пусть область интегрирования – квадрат $K_2 = [-1, 1]^2$. Вычисление интеграла по $K_2$ приводит к вычислению двух простых интегралов:

$$\iint_{K_2} f(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} f(x, y)dx.$$

Для вычисления интеграла по каждой переменной применим одну и ту же квадратурную формулу, например формулу Гаусса $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$ $\approx \sum_{j=1}^{m} C_j f(x_j)$. В результате получим кубатурную формулу вида $\iint_{K_2} f(x, y)dxdy \approx \sum_{i,j=1}^{m} C_i C_j f(x_i, x_j)$, которая имеет $m^2$ узлов и обращается в точное равенство, когда $f(x, y) = x^r x^s$, где $0 \le r,\ s \le 2m-1$. В частности, полученная кубатурная формула точна для всех многочленов степени не выше $2m-1$.

2. В случае треугольника $T_2 = \{(x, y) \in R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0, x + y \le 1\}$ имеем

$$I(f) = \iint_{T_2} f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)dy.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной $y = (1-x)t$: $I(f) =$ $= \int_0^1 (1-x)dx \int_0^1 f(x, (1-x)t)dt$. Интегрирование по $t$ выполним приближенно по квадратурной формуле Гаусса $\int_0^1 \varphi(t)dt \approx \sum_{j=1}^{m} B_j \varphi(t_j)$ для отрезка $[0, 1]$. Получим $I(f) \approx \sum_{j=1}^{m} B_j \int_0^1 (1-x) f(x,\ (1-x)t_j)dx$. Для вычисления этого интеграла по $x$ применим квадратурную формулу гауссова типа $\int_0^1 (1-x)\varphi(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} D_i \varphi(x_i)$ с весом $p(x) = 1 - x$. Это приводит к кубатурной формуле

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{m} D_i B_j f(x,\ (1-x)t_j),$$

которая имеет $m^2$ узлов и точна, когда $f(x, y)$ – многочлен степени не выше $2m-1$.

*Замечание 2.5.* Кубатурные формулы, получаемые методом повторного применения квадратурных формул, имеют тот недостаток, что с повышением кратности $n$ интеграла число узлов возрастает, как $m^n$, где $m$ – число узлов используемой квадратурной формулы. По этой причине такие кубатурные формулы применяются лишь при небольших $n$ ($n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$).

*б*) *Метод неопределенных параметров.* Суть этого метода поясним примером построения кубатурной формулы для квадрата $K_2$, точной для многочленов не выше пятой степени.

В интерполяционной кубатурной формуле свойство точности достигается за счет выбора коэффициентов, число которых совпадает с числом одночленов степени не выше пятой, равным $C_{n+m}^{n} = C_{2+5}^{2} = 21$. В методе неопределенных параметров неизвестными являются не только коэффициенты, но и узлы. Узлы зависят от неизвестных параметров, но в их выборе нет полной свободы: расположение узлов согласуется с симметрией области интегрирования, при этом симметричным узлам соответствуют одинаковые коэффициенты.

Пусть $N$ – число узлов искомой кубатурной формулы. С каждым узлом связаны три неизвестных параметра: две координаты и коэффициент. Следовательно, общее число неизвестных параметров равно $3N$. Эти неизвестные должны быть определены требованием точности формулы для всех одночленов степени не выше пятой, что дает 21 уравнение. Естественно считать, что число уравнений совпадает с числом неизвестных, т. е. $3N = 21$, откуда $N = 7$. Это ориентировочное число узлов получено в предположении, что в выборе узлов полная свобода. По этой причине будем строить кубатурную формулу, содержащую 8 узлов, расположение которых просто согласовать с симметрией квадрата.

Узлы разобьем на две группы по 4 узла в каждой. К первой группе отнесем узлы – точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = a^2$ с осями координат и поставим им в соответствие равные коэффициенты $A$. Ко второй группе отнесем узлы – точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 2b^2$ с диагоналями квадрата $K_2$ и поставим им в соответствие равные коэффициенты $B$. Соответствующая такому выбору узлов и коэффициентов кубатурная формула запишется в виде

$$\iint_{K_2} f(x,\ y)dxdy \approx A[f(a,\ 0) + f(0,\ a) + f(-a,\ 0) + f(0, -a)] +$$
$$+ B[f(b,\ b) + f(-b,\ -b) + f(b,\ -b) + f(-b,\ b)].$$

Заметим, что записанная кубатурная формула точна для всех одночленов $x^r y^s$, у которых хотя бы одно из чисел *r, s* нечетно, при любых значениях параметров *a*, *b*, *A*, *B*. Чтобы эта формула была точна для всех одночленов степени не выше пятой, потребуем, чтобы она была точна, когда $f(x, y)=1,\ x^2,\ y^2,\ x^4,\ y^4,\ x^2y^2$. Это приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} 4A+4B=4, \\ 2Aa^2+4Bb^2=4/3, \\ 2Aa^4+4Bb^4=4/5, \\ 4Bb^4=4/9. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений находим $2Aa^4=16/45$. С помощью этого равенства и последнего уравнения системы исключаем $A$ и $B$ из первых двух уравнений системы. В результате получим два равенства:

$$\frac{8}{45a^4}+\frac{1}{9b^4}=1, \quad \frac{4}{15a^2}+\frac{1}{3b^2}=1.$$

С помощью обозначения $u=\frac{1}{a^2},\ v=\frac{1}{b^2}$ приходим к системе $\begin{cases} \frac{8}{45}u^2+\frac{1}{9}v^2=1, \\ \frac{4}{15}u+\frac{1}{3}v=1, \end{cases}$ которая имеет два решения $\left(\frac{15}{7};\ \frac{9}{7}\right)$ и $(0;\ 3)$. Второе решение исключаем, так как $u\neq 0$, а первое приводит к следующим значениям параметров:

$$a=\sqrt{\frac{7}{15}}, \quad b=\frac{\sqrt{7}}{3}, \quad A=\frac{40}{49}, \quad B=\frac{9}{49}.$$

Таким образом, получена формула, точная для многочленов степени не выше пятой и с числом узлов, равным 8, которое гораздо меньше, чем число узлов $\mu=21$ в определении интерполяционной кубатурной формулы. Это достигнуто за счет того, что в число неизвестных включены параметры, определяющие узлы, и тем самым линейная относительно коэффициентов система заменена нелинейной системой относительно этих параметров.

### 2.7.5. Метод Монте-Карло

Этот метод является одним из методов приближенного вычисления значения интеграла, при котором погрешность интегрирования оценивается не гарантированно, а лишь с некоторой степенью достоверности [1].

Пусть задана случайная величина $\xi$, математическое ожидание которой равно искомой величине $z$, т. е.

$$M\left[\xi\right] = z\,. \tag{2.57}$$

Осуществляя серию $n$ независимых испытаний $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ случайной величины $\xi$, приближенно полагаем $\bar{\xi}_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} \approx z$.

В силу (2.57) для любого натурального $n$ имеем $M[\bar{\xi}_n] = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\xi_i] =$ $= z$. Если величина $D(\xi) = \delta^2$ конечна, то $D[\bar{\xi}_n] = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[\xi_i] = \dfrac{\delta^2}{n}$, причем известно, что неравенство

$$| z - \bar{\xi}_n | < \frac{3\delta}{\sqrt{n}} \tag{2.58}$$

выполняется с вероятностью, достаточно близкой к единице ($\approx 0{,}997$).

На практике, если величина $\delta$ неизвестна, но во всяком случае конечна, то ее оценивают [1, 3] при $n > 10$ по формуле

$$\delta \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi}_n)^2}\,. \tag{2.59}$$

Рассмотрим однократный интеграл $I = \int_0^1 f(x)dx$, который может быть и несобственным интегралом, но таким, что существует $\int_0^1 f^2(x)dx$.

Пусть $\eta$ – равномерно распределенная на [0, 1] случайная величина, т. е. имеющая плотность распределения $\rho_\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\ 1]; \\ 0, & x \notin [0,\ 1]. \end{cases}$ Тогда $\xi = f(\eta)$ – тоже некоторая случайная величина, причем по определению математического ожидания $M[\xi] = \int_0^1 f(x)\rho_\eta(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = I$.

Таким образом, $I \approx \bar{\xi}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)$, где $\eta_i$ – независимые реализации случайной величины $\eta$.

Далее, так как $\delta^2 = D[f(\eta)] = M[f^2(\eta)] - \left(M[f(\eta)]\right)^2$, то

$$\delta^2 = \int_0^1 f^2(x)dx - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 < \infty. \qquad (2.60)$$

Значение $\delta$ оценивают либо по формуле (2.59), либо исходя из равенства (2.60), где величину $\int_0^1 f^2(x)dx$ оценивают сверху, а значение интеграла $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$ снизу, например, нулем.

Для оценки погрешности интегрирования $I - \overline{\xi}_n$ применима формула (2.58) с вероятностью, приближенно равной 0,997.

Аналогично для двукратных интегралов имеем

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)dxdy \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \theta_i), \qquad (2.61)$$

где $\eta_i$, $\theta_i$ – независимые реализации равномерно распределенных на [0, 1] случайных величин $\eta$, $\theta$.

По сравнению с кубатурными формулами метод Монте-Карло имеет ряд достоинств и недостатков.

К достоинствам следует отнести тот факт, что число узлов с повышением кратности интеграла растет достаточно медленно. Кроме того, точность метода не зависит от гладкости подынтегральной функции. Заметим также простую приспособляемость к форме области интегрирования. Например, полагаем $\iint\limits_{\Omega} f(p)dp = \iint\limits_{R} f^*(p)dp$, где $R$ – квадрат, содержащий замкнутую область $\Omega$, а $f^*(p) = \begin{cases} f(p), & p \in \Omega; \\ 0, & p \notin \Omega. \end{cases}$ Далее применяется формула вида (2.61).

Недостатком метода Монте-Карло является вероятный характер результата, т. е. отсутствие строгих, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ оценок погрешности.

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов*, *Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987.

2. *Березин*, *И. С.* Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Наука, 1966. Т. 1.

3. *Волков*, *Е. А.* Численные методы / Е. А. Волков. – М.: Наука, 1987.

4. *Крылов*, *В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967.

5. *Крылов*, *В. И.* Вычислительные методы высшей математики. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Выш. шк., 1972–1975.

6. *Крылов*, *В. И.* Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Наука и техника, 1983.

7. *Марчук*, *Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1980.

8. *Мысовских*, *И. П.* Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998.

9. *Самарский*, *А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989.

10. *Монастырный*, *П. И.* Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – М.: Наука, 1994.

# СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

**Игнатенко** Марина Викторовна

# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ
## ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

**Курс лекций**

В авторской редакции

Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *Г. М. Добыш*
Компьютерная верстка *Т. В. Шестаковой*

Ответственный за выпуск *У. Ю. Верина*

---

Подписано в печать 10.11.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 5,78. Тираж 100 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности
№ 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.